ಪರಿಷ್ಕೃತ ಪಠ್ಯ 2024–25

YK Notes Revised 2025-26

ಗಣಿತ

ಹತ್ತನೆಯ ತರಗತಿ

ಭಾಗ–2

Version 1.1

Copyright is preserved

Yakub S Koyyur, GHS Kayarthadka,
Belthangady Taluk, D.K.-574216

ಸಂಭವನೀಯ ನೀಲ ನಕಾಶೆ

ಕ್ರ.ಸಂ.	ವಿಭಾಗ	ಅಧ್ಯಾಯ	ಸಂಭವನೀಯ ಅಂಕಗಳು	ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳು
1	ಇತರ	ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ	**6**	**10**
2		ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನ್ವಯಗಳು	**4**	
3	ರೇಖಾಗಣಿತ	ವೃತ್ತಗಳು	**4**	**4**
4	ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ	ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು	**3**	**10**
5		ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲ	**7**	
6	ಇತರ	ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	**4**	**4**
7	ಇತರ	ಸಂಭವನೀಯತೆ	**4**	**4**

ಪರಿವಿಡಿ

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಅಧ್ಯಾಯ	ಪುಟ ಸಂಖ್ಯೆ
8	ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ	**2 - 15**
9	ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನ್ವಯಗಳು	**16 - 24**
10	ವೃತ್ತಗಳು	**25 - 32**
11	ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು	**33 - 39**
12	ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲ	**40 - 48**
13	ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	**49 - 62**
14	ಸಂಭವನೀಯತೆ	**63 - 72**

8 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

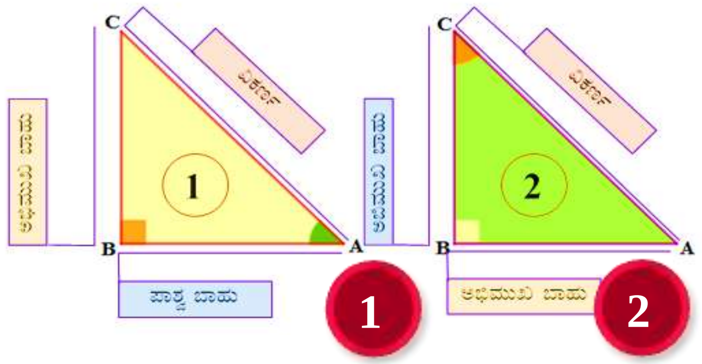
ಕಲಿಕಾಂಶಗಳು:

1. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು
2. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನದ ಅಳತೆಯ ಅನುಪಾತಗಳು
3. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತದ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತಗಳು
4. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು
5. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳ ಅನ್ವಯಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.

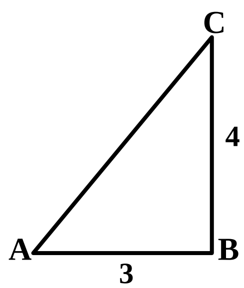
11.2 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು

ಒಟ್ಟು ಆರು ತ್ರಿಕೋಣೀಯ ಅನುಪಾತಗಳಿವೆ



ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು		ತ್ರಿಭುಜ 1	ತ್ರಿಭುಜ 2
SinA	ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು / ವಿಕರ್ಣ	$\frac{BC}{AC}$	$\frac{AB}{AC}$
CosA	ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು / ವಿಕರ್ಣ	$\frac{AB}{AC}$	$\frac{BC}{AB}$
Tan A	ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು / ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು	$\frac{BC}{AB}$	$\frac{AB}{BC}$
CosecA	ವಿಕರ್ಣ / ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು	$\frac{AC}{BC}$	$\frac{AC}{AB}$
SecA	ವಿಕರ್ಣ / ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{AC}{BC}$
CotA	ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು / ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು	$\frac{AB}{BC}$	$\frac{BC}{AB}$

ಉದಾಹರಣೆ 1: tan A = $\frac{4}{3}$ ಆದರೆ ಕೋನ A ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle ABC = 90^0$

$\therefore$ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

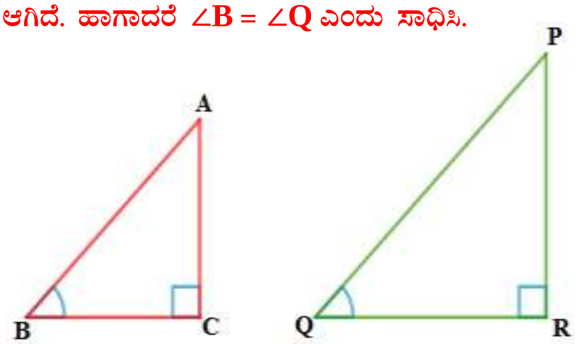
$\Rightarrow AC^2 = 4^2 + 3^3 = 16 + 9 = 25$

$\Rightarrow AC = 5$

SinA $= \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$; **Cos A** $= \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$; **TanA** $= \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$

CosecA $= \frac{AC}{BC} = \frac{5}{4}$; **SecA** $= \frac{AC}{AB} = \frac{5}{3}$; **CotA** $= \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$

ಉದಾಹರಣೆ 2: $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle Q$ ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದು, SinB = SinQ ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ $\angle B = \angle Q$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



Sin B = SinQ

$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$

$\Rightarrow \frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k$ ---------- (1)

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$

$\Rightarrow \sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2}$

$\Rightarrow k.\sqrt{PQ^2 - PR^2}$ [(1) ರಿಂದ]

$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$

$\Rightarrow \frac{BC}{QR} = \frac{k.\sqrt{PQ^2-PR^2}}{\sqrt{PQ^2-PR^2}} = k$ -------(2)

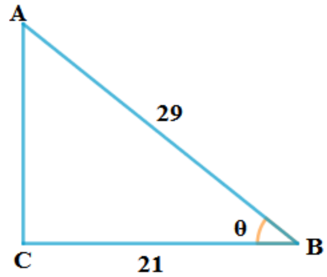
(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore$ **∠B = ∠Q**

ಉದಾಹರಣೆ 3: ΔACB ಯಲ್ಲಿ, AB = 29 ಮಾನಗಳು, BC = 21 ಮಾನಗಳು ಮತ್ತು ∠ABC = θ (ಚಿತ್ರ 8.10 ನೋಡಿ) ಆದರೆ, ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $Cos^2\theta + Sin^2\theta$ (ii) $Cos^2\theta - Sin^2\theta$



ಚಿತ್ರ: 8.10

ಪರಿಹಾರ: ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ACB ಯಲ್ಲಿ,

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} \Rightarrow AC = \sqrt{29^2 - 21^2} \Rightarrow AC = \sqrt{841 - 441} = \sqrt{400} = 20$

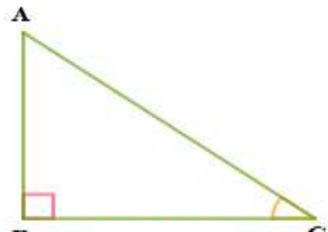
(i) $Cos^2\theta + Sin^2\theta$

$= \frac{21^2}{29^2} + \frac{20^2}{29^2} = \frac{441+400}{841} = \frac{841}{841} = 1$

(ii) $Cos^2\theta - Sin^2\theta$

$= \frac{21^2}{29^2} - \frac{20^2}{29^2} = \frac{441-400}{841} = \frac{41}{841} = 1$

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ, B ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. tan A = 1 ಆದರೆ, 2sin A cos A = 1ಆಗಿದೆಯೇ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ: 8.11

ಪರಿಹಾರ: ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ACB ಯಲ್ಲಿ,

$\tan A = 1$

$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = 1$

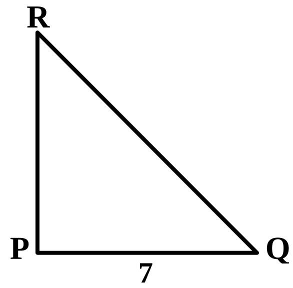
$\Rightarrow AB = BC$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow AC^2 = 2AB^2$ ---------- (1)

ಈಗ, 2sin A cos A $= 2.\frac{AB}{AC}.\frac{BC}{AC} = 2.\frac{AB^2}{AC^2} = 2.\frac{AB^2}{2AB^2} = 1$

ಉದಾಹರಣೆ 5:ΔOPQ ಯಲ್ಲಿ, P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. OP = 7cm ಮತ್ತು OQ - PQ = 1cm (ಚಿತ್ರ 8.12ನೋಡಿ) sin Q ಮತ್ತು cos Q ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 8.12

ಪರಿಹಾರ: ΔOPQ ನಲ್ಲಿ,

$OQ^2 = PQ^2 + OP^2$

$\Rightarrow (1 + PQ)^2 = PQ^2 + 7^2$

$\Rightarrow 1 + PQ^2 + 2PQ = PQ^2 + 49$

$\Rightarrow 1 + 2PQ = 49$

$\Rightarrow 2PQ = 49 - 1 = 48 \Rightarrow PQ = 24cm$

$\Rightarrow OQ = 1 + PQ = 1 + 24 \Rightarrow OQ = 25$

$\therefore$ **sin Q** $= \frac{7}{25}$ ಮತ್ತು **cos Q** $= \frac{24}{25}$

ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತಗಳು		
$\frac{1}{SinA}$	$\frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$	**CosecA**
$\frac{1}{CosA}$	$\frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$	**SecA**
$\frac{1}{Tan A}$	$\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$	**CotA**

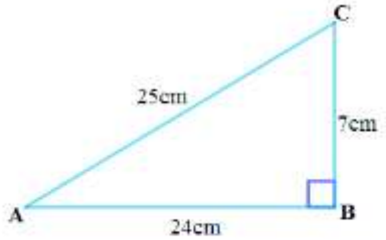
ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತಗಳು		
$\frac{1}{CosecA}$	$\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$	**SinA**
$\frac{1}{SecA}$	$\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$	**SecA**
$\frac{1}{CotA}$	$\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$	**CotA**

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

[ಲೆಕ್ಕ ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಪಠ್ಯದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಅನುಪಾತ ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಅಳತೆಗಳನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ k ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದೆ. ಉದಾಹಣೆ SinA = $\frac{3}{4}$ ಇದ್ದರೆ, ಅಳತೆಗಳು 3k ಮತ್ತು 4k ಇಲ್ಲಿ k ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ. ಆದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗಲಿ ಎಂಬ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ k = 1ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲಾಗಿದೆ]

1. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, B ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. AB = 24cm, BC = 7cm ಆದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) sin A, cos A (ii) sin C, cos C



Δ ABC,ಯಲ್ಲಿ ∠B = 90°

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (24)^2 + 7^2$

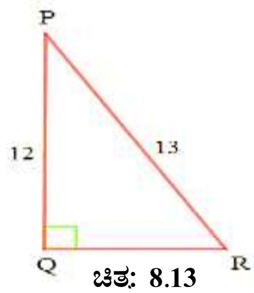
$= (576+49)\ cm^2 = 625\ cm^2$

$\Rightarrow AC = 25$

(i) $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$, $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$

(ii) $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$; $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$

2. ಚಿತ್ರ 8.13 ರಲ್ಲಿ tan P - cot R ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ: 8.13

ΔPQR , ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$QR^2 = PR^2 - PQ^2$

$= (13)^2 - (12)^2$

$= 169 - 144 \Rightarrow QR^2 = 25 \Rightarrow QR = 5$ cm

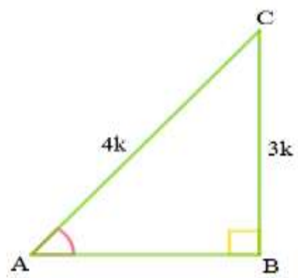
ಈಗ,

$\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$

$\cot R = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$

$\tan P - \cot R = \frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 0$

3. sin A = $\frac{3}{4}$ ಆದರೆ, cos A ಮತ್ತು tan A ಬೆಲೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಿ.



ΔABC ಯಲ್ಲಿ ∠B = 90^0

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, $\sin A = \frac{3}{4} = \frac{BC}{AC}$

$\Rightarrow AC = 4k, BC = 3k$ [ಇಲ್ಲಿ k = 1 ಆಗಿರಲಿ]

∴ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

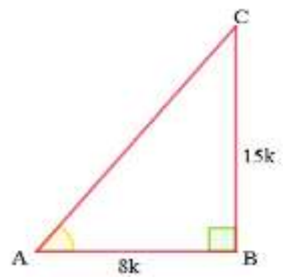
$AB^2 = AC^2 - BC^2$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 - BC^2$

$AB^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow AB = \sqrt{7}$

∴**cos A** $= \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ **tan A** $= \frac{Bc}{AB} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

4. 15 cot A = 8 ಆದರೆ, sin A ಮತ್ತು sec A ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, $\cot A = \frac{8}{15} = \frac{BC}{AB}$

ΔABC ಯಲ್ಲಿ ∠B = 90^0

BC = 15k, AB = 8k [ಇಲ್ಲಿ k = 1 ಆಗಿರಲಿ]

∴ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 8^2 + 15^2$

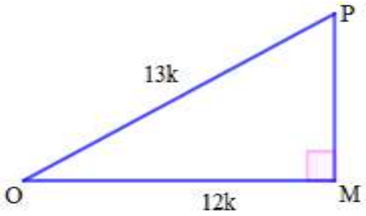
$= 64 + 225$

$= 289 \Rightarrow AC = 17$

$\Rightarrow$**sin A** $= \frac{BC}{AC} = \frac{15}{17}$; **sec A** $= \frac{AC}{AB} = \frac{17}{8}$

5. sec θ = $\frac{13}{12}$ ಆದರೆ, ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, $\sec\theta = \frac{13}{12} = \frac{OP}{OM}$; ΔPMO ಯಲ್ಲಿ $\angle M = 90^0$



$OM = 12k, OP = 13k$ [ಇಲ್ಲಿ $k = 1$ ಆಗಿರಲಿ]

∴ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ, $PM^2 = OP^2 + OM^2$

$PM^2 = 13^2 + 12^2$

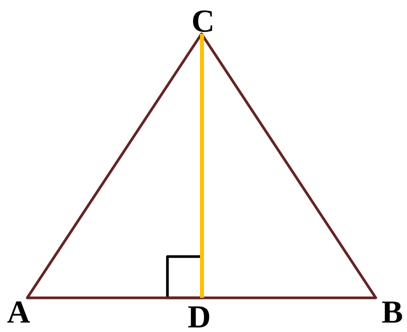
$= 169 - 144 = 25 \Rightarrow AC = 5$

$\sin\theta = \frac{MP}{OP} = \frac{5}{13}$; $\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{12}{13}$; $\tan\theta = \frac{MP}{OM} = \frac{5}{12}$

$\cot\theta = \frac{OM}{MP} = \frac{12}{5}$; $\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{OP}{MP} = \frac{13}{5}$

6. ∠A ಮತ್ತು ∠B ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದು cos A = cos B ಆಗಿದೆ. ∠A ಮತ್ತು ∠B ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ΔABC ಯಲ್ಲಿ $CD \perp AB$.



ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, $\cos A = \cos B$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$

$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$

$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = k$ ಆಗಿರಲಿ.

$\Rightarrow AD = kBD$ -------(1) ಮತ್ತು $AC = kBC$ -------(2)

ΔCAD ಮತ್ತು ΔCBD ಗಳಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$CD^2 = AC^2 - AD^2$ -------- (3) ಮತ್ತು $CD^2 = BC^2 - BD^2$ ----------- (4)

(3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ,

$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$

$\Rightarrow (kBC)^2 - (k\,BD)^2 = BC^2 - BD^2$

$\Rightarrow k^2 (BC^2 - BD^2) = BC^2 - BD^2$

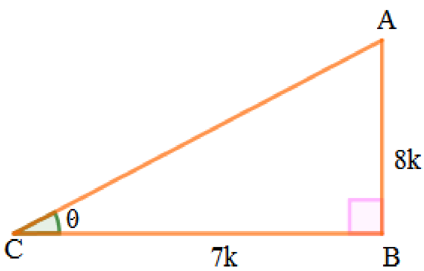
$\Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = 1$

$k = 1$ ಎಂದು (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$AC = BC \Rightarrow \angle A = \angle B$ [ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮ]

7. cot θ = $\frac{7}{8}$ ಆದರೆ, i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ ii) $\cot^2\theta$ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^o$ ಮತ್ತು $\angle C = \theta$



ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, $\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{8}$

$\Rightarrow AB = 8$ ಮತ್ತು $BC = 7$ [$k = 1$ ಆದಾಗ]

ΔABCಯಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8^2 + 7^2$

$= 64 + 49 = 113 = \sqrt{113}$

$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{\sqrt{113}}$ ಮತ್ತು $\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{\sqrt{113}}$

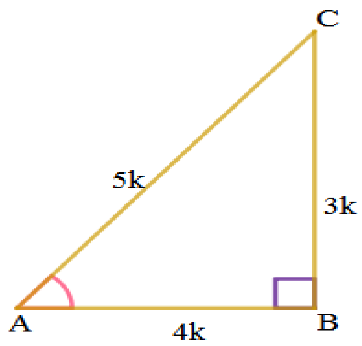
ಪರಿಹಾರ:

(i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

$= \frac{1-\left(\frac{8}{\sqrt{113}}\right)^2}{1-\left(\frac{7}{\sqrt{113}}\right)^2} = \frac{1-\frac{64}{113}}{1-\frac{49}{113}} = \frac{\frac{113-64}{113}}{\frac{113-49}{113}} = \frac{\frac{49}{113}}{\frac{64}{113}} = \mathbf{\frac{49}{64}}$

(ii) $\cot^2\theta = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \mathbf{\frac{49}{64}}$

8. $3 \cot A = 4$ ಆದರೆ, $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ ಆಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.



Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^o$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, $\cot A = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow AB = 4$ ಮತ್ತು $BC = 3$, [k = 1 ಆಗಿರಲಿ]

Δ ABCಯಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2$

$= 16 + 9 = 25 \Rightarrow$ **AC = 5**

$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$;$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$; $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$

$LHS = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

$= \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{\frac{16-9}{16}}{\frac{16+9}{16}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{25}$

R.H.S. $= \cos^2 A - \sin^2 A = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$

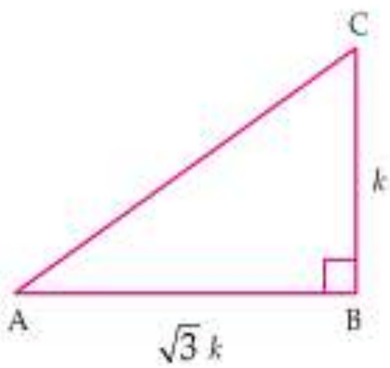
$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

$\Rightarrow$R.H.S. = L.H.S.

$\Rightarrow \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$

9. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle B = 90^0$, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ಆದರೆ

i) sin A cos C + cos A sin C ii) cos A cos C - sin A sin C ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^o$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$AB = \sqrt{3}$ ಮತ್ತು $BC = 1$ಆಗಿರಲಿ,

Δ ABCಯಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = (\sqrt{3})^2 + (1)^2 = 3 + 1 = 4$

$\Rightarrow AC = 2$

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$; $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

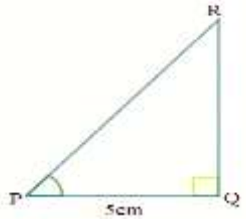
(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

10. ΔPQR ನಲ್ಲಿ $\angle Q = 90^0$ O, PR + QR = 25cm ಮತ್ತು PQ = 5 ಆಗಿದೆ sin P, cos P ಮತ್ತು tan P ಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, PR + QR = 25 , PQ = 5

PR = x ಆಗಿರಲಿ. $\therefore$ QR = 25 - x

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ, $PR^2 = PQ^2 + QR^2$



$x^2 = (5)^2 + (25 - x)^2$

$= 25 + 625 + x^2 - 50x$

$50x = 650 \Rightarrow x = 13$

⇒ **PR = 13 cm; QR** = (25 - 13) cm = **12 cm**

$\sin P = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$; $\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$; $\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$

11. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯೇ ಅಥವಾ ತಪ್ಪೇ ತಿಳಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) tan A ಬೆಲೆಯು ಯಾವಗಲೂ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ii) ಕೋನ A ದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ sec A =$\frac{12}{5}$ ಆಗಿದೆ iii) ಕೋನ A ದ cosecant A ಅನ್ನು cos A ಎಂದು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ. iv) cot A ಎಂಬುದು cot ಮತ್ತು A ಗಳ ನಡುವಿನ ಗುಣಲಬ್ಧ v) θ ದ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ sin θ = $\frac{4}{3}$ ಆಗಿದೆ

(i) ತಪ್ಪು. - tan A ಯ ಬೆಲೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ $-\infty$ ಮತ್ತು $+\infty$ ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ.

(ii) ಸರಿ – SecA ಯ ಬೆಲೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ 1ಕ್ಕಿಂದ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ತಪ್ಪು – cosecantA ಸಂಕ್ಷೀಪ್ತವಾಗಿ cosec A ಬದಲು ಮತ್ತು cos A ಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷೀಪ್ತವಾಗಿ cosine ಬದಲು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.

(iv) ತಪ್ಪು – cot A ಯು cot ಮತ್ತು Aಗಳಿ ಗುಣಲಬ್ಧವಲ್ಲ. ಅದು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಅನುಪಾತದ ಸೂಚಕ.

(v) ತಪ್ಪು– ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣವು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹು.∴ sin θ ಯಾವಾಗಲೂ < 1

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{4}{3}$, θ ದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

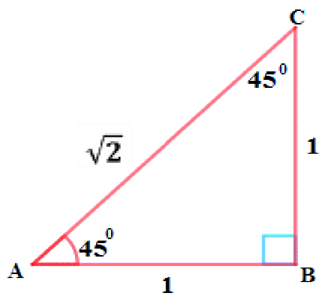
8.3 ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

45^0 ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle B = 90^0$, ಒಂದು ಕೋನವು $\angle A = 45^0$

$\Rightarrow \angle C = 45^0$ [ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0]

⇒ AB = BC = 1 ಆಗಿರಲಿ,



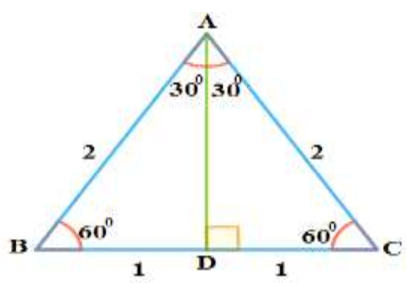
ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 1^2 + 1^2 = 1+1 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$

Sin45⁰	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	**Cosec45⁰**	$\sqrt{2}$
Cos45⁰	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	**Sec45⁰**	$\sqrt{2}$
Tan45⁰	**1**	**Cot45⁰**	**1**

30^0 ಮತ್ತು 60^0 ಯ ತಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಕೋನದ ಅಳತೆಯು 60^0



$\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 60^0$

AD⊥BC ಎಳೆದಿದೆ.

⇒BD = CD

[ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಶೃಂಗದಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಬಾಹುವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.]

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD = 30^0$

AB = BC = CA = 2 ಆಗಿರಲಿ ⇒BD = CD = 1

ΔABD ಯಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

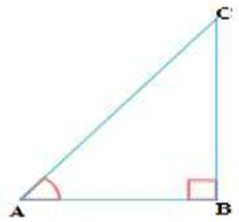
$AD^2 = AB^2 – BD^2$

$AD^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow AD = \sqrt{3}$

$Sin60^0$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**$Cosec60^0$**	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$Cos60^0$	$\frac{1}{2}$	**$Sec60^0$**	**2**
$Tan60^0$	$\sqrt{3}$	**$Cot60^0$**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

$Sin30^0$	$\frac{1}{2}$	**$Cosec30^0$**	**2**
$Cos30^0$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**$Sec30^0$**	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$Tan30^0$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**$Cot30^0$**	$\sqrt{3}$

0^0 ಮತ್ತು 90^0 ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು



$\angle A$ ಯು 0^0 ಗೆ ಸಮೀಪವಾದಂತೆ $BC = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತು $AB = AC$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$AB = AC = 1$ಮತ್ತು $BC = 0$

$\angle A$ ಯು 90^0 ಗೆ ಸಮೀಪವಾದಂತೆ $AB = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತು $AC = AC$ ಆಗುತ್ತದೆ. $AB = AC = 1$ಮತ್ತು $BC = 0$

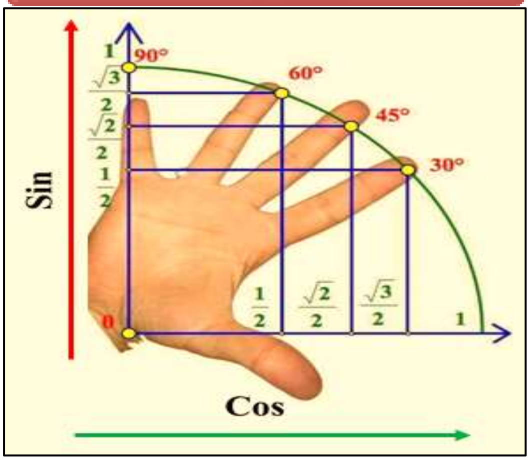
$Sin0^0$	**0**	**$Cosec0^0$**	**ND**
$Cos0^0$	**1**	**$Sec0^0$**	**1**
$Tan0^0$	**0**	**$Cot0^0$**	**ND**

$Sin90^0$	**0**	**$Cosec90^0$**	**ND**
$Cos90^0$	**1**	**$Sec90^0$**	**1**
$Tan90^0$	**0**	**$Cot90^0$**	**ND**

ಕೋಷ್ಟಕ 8.1

$\angle A$	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ND
osec	ND	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
Sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	ND
Cot	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ಕುತೂಹಲಕ್ಕಾಗಿ



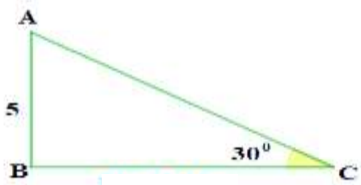
ಉದಾಹರಣೆ 6: ΔABC ಯಲ್ಲಿ, B ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. $AB = 5cm$ ಮತ್ತು ACB $=30^0$ (ಚಿತ್ರ 8.19 ನೋಡಿ) BC ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$Tan30^0 = \frac{5}{BC} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{BC} \Rightarrow 5\sqrt{3}cm$

$Sin30^0 = \frac{5}{AC}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$

$\Rightarrow AC = 10cm$



ಚಿತ್ರ: 8.19

ಉದಾಹರಣೆ 7: ΔPQR ನಲ್ಲಿ, $\angle Q = 90^0$, $PQ = 3cm$, ಮತ್ತು $PR = 6cm$. $\angle QPR$ ಮತ್ತು $\angle PRQ$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$SinR = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \angle R = 30^0$

$\Rightarrow \angle PRQ = 30^0$

$\therefore \angle QPR = 60^0$

ಚಿತ್ರ: 8.20

ಉದಾಹರಣೆ 8: $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, $0 < A + B \leq 90$, $A > B$ ಆಗಿದ್ದರೆ, A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\sin(A - B) = \frac{1}{2}$ ಆದರೆ $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A - B = 30^0$ -----------------(1)

$\cos(A + B) = \frac{1}{2}$ ಆದರೆ $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A + B = 60^0$ -----------------(2)

(1) + (2) = $2A = 90^0 \Rightarrow A = 45^0$;

(2) ರಿಂದ $\Rightarrow 45^0 - B = 30^0 \Rightarrow \mathbf{B = 15^0}$

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. **ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

i) $\sin 60^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$ ii) $2\tan^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 60^0$ iii) $\frac{\cos 45^0}{\sec 30^0 + \operatorname{cosec} 30^0}$

iv) $\frac{\sin 30^0 + \tan 45^0 - \operatorname{Cosec} 45^0}{\sec 30^0 + \cos 60^0 + \cot 45^0}$ v) $\frac{5\cos^2 60^0 + 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0}$

i) $\sin 60^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

ii) $2\tan^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 60^0$

$= 2(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2$

iii) $\frac{\cos 45^0}{\sec 30^0 + \operatorname{cosec} 30^0}$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(2+2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}} \times \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}$

$= \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{18}}{(2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{6})^2}$

$= \frac{2\sqrt{6}-6\sqrt{2}}{4x2 - 4x6} = \frac{2(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{8-24}$

$= \frac{2(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{-16} = \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{-8} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$

iv) $\frac{\sin 30^0 + \tan 45^0 - \operatorname{Cosec} 60^0}{\sec 30^0 + \cos 60^0 + \cot 45^0}$

$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}$

$= \frac{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}-4}{4+3\sqrt{3}}$

$= \frac{3\sqrt{3}-4}{4+3\sqrt{3}} \times \frac{4-3\sqrt{3}}{4-3\sqrt{3}}$

$= \frac{12\sqrt{3} - 16 - 9\sqrt{9} + 12\sqrt{3}}{(4)^2 - (3\sqrt{3})^2}$

$= \frac{12\sqrt{3} - 16 - 27 + 12\sqrt{3}}{16 - 27} = \frac{24\sqrt{3} - 43}{-11} = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{11}$

iv) $\frac{5\cos^2 60^0+4\sec^2 30^0-\tan^2 45^0}{\sin^2 30^0+\cos^2 30^0}$

$= \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= \frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{15+64-12}{12}}{1} = \frac{67}{12}$

2. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ, ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) $\frac{2\tan 30^0}{1+\tan^2 30^0}$

A) sin 60^0 B) cos 60^0 C) tan 60^0 D) sin 30^0

$= \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ans: A) sin 60^0

ii) $\frac{1-\tan^2 45^0}{1+\tan^2 45^0}$

A) tan 90^0 B) 1 C) sin 45^0 D) 0

$\frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

Ans: D) 0

iii) sin 2A = 2 sin A ಎಂಬುದು A ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

A) 0 B) 30 C) 45 D) 60

sin 2x0 = 2 sin 0 = sin 0 = 2 sin0 = 0 = 0 = 0

Ans: A) 0

iv) $\frac{2\tan 30^0}{1-\tan^2 30^0}$

A) cos 60^0 B) sin 60^0 C) tan 60^0 D) sin 30^0

$\frac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Ans: C) tan 60^0

3. tan (A + B) = $\sqrt{3}$ ಮತ್ತು tan (A - B) = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $0 < A + B \leq 90$; A > B ಆದರೆ, A ಮತ್ತು B ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

tan (A + B) = $\sqrt{3}$

$\Rightarrow A + B = 60^0$ ---------------(1)

tan (A - B) = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow A - B = 30^0$ ------------- (2)

(2) – (1) $\Rightarrow$ 2B = $30^0 \Rightarrow B = 15^0$

(1) ರಿಂದ A = 60 – 15 = 45^0

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ತಿಳಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) sin (A + B) = sin A + sin B

A = 30^0 ಮತ್ತು B = 90^0 ಆಗಿರಲಿ

sin $(30^0 + 60^0)$ = sin 90^0 = 1;

sin 30^0 + sin 60^0 = $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin(A + B) \neq \sin A + \sin B$ ∴ **ಹೇಳಿಕೆ ತಪ್ಪು.**

ii) θ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ sin θ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

$\sin 0^0 = 0$, $\sin 90^0 = 1$ ∴ **ಹೇಳಿಕೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆ.**

iii) θ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ cos θ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

$\text{Cos } 0^0 = 1$, $\text{Cos } 90^0 = 0$

θ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ cos θ ಬೆಲೆಯು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿದೆ. ∴ **ಹೇಳಿಕೆ ತಪ್ಪು.**

iv) θ ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ sin θ = cos θ ಆಗಿದೆ

$\sin 30^0 = \frac{1}{2}$; $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

⇒θ ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ sin θ = cos θ ಆಗಿಲ್ಲ ∴ **ಹೇಳಿಕೆ ತಪ್ಪು.**

v) $A = 0^0$ ಗೆ cot A ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿಲ್ಲ **ಹೇಳಿಕೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆ.**

8.5 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು

ಒಂದು ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\text{Sin}^2A + \cos^2A = 1$

$\tan^2 + 1 = \sec^2A$

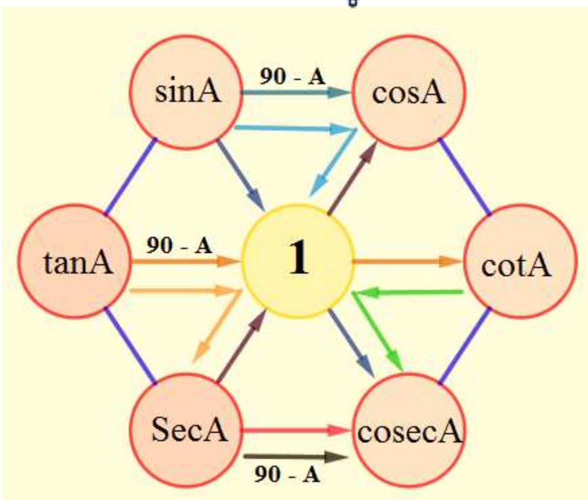
$1 + \cot^2A = \text{cosec}^2A$

ನೆನಪಿಡಿ

$\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$

$\frac{\cos A}{\sin A} = \cot A$

ಕುತೂಹಲಕ್ಕಾಗಿ



ಉದಾಹರಣೆ 12: cos A, tan A ಮತ್ತು sec A ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು sin A ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\cos^2A + \sin^2A = 1$

$\Rightarrow \cos^2A = 1 - \sin^2A$

$\cos A = \sqrt{1 - \sin2A}$

$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \Rightarrow \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin2A}}$

$\sec A = \frac{1}{\cos A} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \sin2A}}$

ಉದಾಹರಣೆ 13: sec A (1 - sin A)(sec A + tan A) = 1 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಎಡಭಾಗ $= \sec A(1 - \sin A)(\sec A + \tan A)$

$= \frac{1}{\cos A}(1 - \sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$

$= \left(\frac{1 - \sin A}{\cos A}\right)\left(\frac{1 + \sin A}{\cos A}\right)$

$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1$

ಉದಾಹರಣೆ 14: $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

$$\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$$

$$= \frac{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\frac{1}{\sin A} - 1}{\frac{1}{\sin A} + 1} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$$

ಉದಾಹರಣೆ 15: $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಬಳಸಿ, $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1} \times \frac{\tan\theta - \sec\theta}{\tan\theta - \sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(\tan\theta - \sec\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)(\tan\theta - \sec\theta)} = \frac{-1}{(\tan\theta - \sec\theta)} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 8.3

1. sinA, secA ಮತ್ತು tanA ಈ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು cotA ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

$\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 A} = 1 + \cot^2 A$

$\Rightarrow \sin^2 A = \frac{1}{1 + \cot^2 A}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\sin A = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}}$

$\sin^2 A = \frac{1}{1 + \cot^2 A}$

$\Rightarrow 1 - \cos^2 A = \frac{1}{1 + \cot^2 A}$ $\quad \Rightarrow \cos^2 A = 1 - \frac{1}{1 + \cot^2 A}$

$\Rightarrow \cos^2 A = \frac{1 + \cot^2 A - 1}{1 + \cot^2 A}$ $\Rightarrow \frac{1}{\sec^2 A} = \frac{\cot^2 A}{1 + \cot^2 A}$ $\Rightarrow \sec^2 A = \frac{1 + \cot^2 A}{\cot^2 A}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\sec A = \frac{\pm\sqrt{1 + \cot^2 A}}{\cot A}}$ $\Rightarrow \boldsymbol{\tan A = \frac{1}{\cot A}}$

2. ∠A ದ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು sec A ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

i) $\sec A = \frac{1}{\cos A}$ $\Rightarrow \boldsymbol{\cos A = \frac{1}{\sec A}}$

ii) $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

$\Rightarrow \sin^2 A = 1 - \cos^2 A \Rightarrow \sin^2 A = 1 - \frac{1}{\sec^2 A} \Rightarrow \sin^2 A = \frac{\sec^2 A - 1}{\sec^2 A}$ $\Rightarrow \boldsymbol{\sin A = \frac{\pm\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}}$

iii) $\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$ $\Rightarrow \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$ $\Rightarrow \boldsymbol{\operatorname{cosec} A = \frac{\pm \sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}}$

iv) $\sec^2 A - \tan^2 A = 1 \Rightarrow \tan^2 A = \sec^2 A + 1$ $\Rightarrow \boldsymbol{\tan A = \sqrt{\sec^2 A + 1}}$

v) $\tan A = \frac{1}{\cot A} \Rightarrow \cot A = \frac{1}{\tan A}$ $\Rightarrow \boldsymbol{\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A + 1}}}$

2. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) $9\sec^2A - 9\tan^2A$

A) 1 B) 9 C) 8 D) 0

$9\sec^2A - 9\tan^2A = 9(\sec^2A - \tan^2A) = 9\times1 = 9$ $[\because \sec^2A - \tan^2A = 1]$

Ans: B) 9

ii) **$(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \mathrm{cosec}\,\theta) =$**

A) 0 B) 1 C) 2 D) -1

$(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \mathrm{cosec}\,\theta)$

$=\left(1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right)$

$= \frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta} \times \frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta} = \frac{(\cos\theta+\sin\theta)^2-1}{\cos\theta.\sin\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta-1}{\cos\theta.\sin\theta} = \frac{1+2\cos\theta\sin\theta-1}{\cos\theta.\sin\theta} = \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta.\sin\theta} = 2$

Ans C) 2

i) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) =$

A) secA B) sinA C) cosecA D) cosA

$(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$

$= \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \sin A) = \left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \sin A) = \frac{1-\sin^2A}{\cos A} = \frac{\cos^2A}{\cos A} = \cos A$

Ans: D) cosA

iv) **$\frac{1+\tan^2A}{1+\cot^2A} =$**

A) $\sec^2A$ B) -1 C) $\cot^2A$ D) $\tan^2A$

$\frac{1+\tan^2A}{1+\cot^2A} = \frac{1+\frac{1}{\cot^2A}}{1+\cot^2A} = \frac{\cot^2A+1}{\cot^2A} \times \frac{1}{1+\cot^2A}$

$= \frac{1}{\cot^2A} = \tan^2A$

Ans: D) $\tan^2A$

3. ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

i) $(\mathrm{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

L.H.S. = $(\mathrm{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2$

$= (\mathrm{cosec}^2\theta + \cot^2\theta - 2\,\mathrm{cosec}\,\theta\cot\theta)$

$= \left(\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)$

$= \left(\frac{1+\cos^2\theta-2\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\right) = \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ =RHS

ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

L.H.S. = $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A}$

$= \frac{\cos^2A+(1+\sin A)^2}{(1+\sin A)\cos A}$

$= \frac{\cos^2A+1+\sin^2A+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A} = \frac{1+1+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$

$= \frac{2+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A} = \frac{2(1+\sin A)}{(1+\sin A)\cos A} = \frac{2}{\cos A}$

$= 2\sec A$ = R.H.S.

iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta.\cos\theta$

[ಸುಳುಹು: sin θ ಮತ್ತು cos θ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಿ]

$$\text{L.H.S.}=\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}}+\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}-\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$=\frac{1}{(\sin\theta-\cos\theta)}\left[\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$=\frac{1}{(\sin\theta-\cos\theta)}\left[\frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\cos\theta.\sin\theta}\right]$$

$$=\frac{1}{(\sin\theta-\cos\theta)}\left[\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)}{\cos\theta.\sin\theta}\right]$$

$$=\left[\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)}{\cos\theta.\sin\theta}\right]=\left[\frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta.\sin\theta}\right]=\left[\frac{1}{\cos\theta.\sin\theta}+1\right]$$

$= 1 + \sec\theta\ \text{cosec}\ \theta$ = R.H.S.

iv) $\frac{1+\sec A}{\sec A}=\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}=2\sec A$

[ಸುಳುಹು: ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ]

$$\text{L.H.S.}=\frac{1+\sec A}{\sec A}=\frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}=\frac{\frac{\cos A+1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}=\frac{\cos A+1}{\cos A}\text{x}\frac{\cos A}{1}=\cos A+1$$

$$\text{R.H.S.}=\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$$

$$=\frac{(1+\cos A)(1-\cos A)}{1-\cos A}=\cos A+1$$

L.H.S. = R.H.S.

v) $\text{cosec}^2A=1+\cot^2A$ ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ,

$\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1}=\text{cosec}\ A+\cot A$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\text{L.H.S.}=\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1}$$

ಛೇದ ಮತ್ತು ಅಂಶಗಳಿಗೆ sin A ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$=\frac{\frac{\cos A-\sin A+1}{\sin A}}{\frac{\cos A+\sin A-1}{\sin A}}=\frac{\cot A-1+\text{cosec}A}{\cot A+1-\text{cosec}A}$$

$$=\frac{\cot A-\text{cosec}^2A+\cot^2A+\text{cosec}A}{\cot A+1-\text{cosec}A}\quad(\text{using }\text{cosec}^2A-\cot^2A=1)$$

$$=\frac{\cot A+\text{cosec}A-(\text{cosec}^2A-\cot^2A)}{\cot A+1-\text{cosec}A}$$

$$=\frac{(\cot A+\text{cosec}A)(1-\text{cosec}A-\cot A)}{1-\text{cosec}A+\cot A}$$

$= \cot A + \text{cosec}\ A$ = R.H.S.

vi) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}=\sec A+\tan A$

$$=\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}\text{x}\frac{1+\sin A}{1+\sin A}}=\sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$$

$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}} = \frac{1+\sin A}{\cos A}$

$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \sec A + \tan A = RHS$

vii) $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

L.H.S. $= \frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)} = \frac{\sin\theta[1 - 2(1-\cos^2\theta)]}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta[1 - 2 + 2\cos^2\theta]}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta[2\cos^2\theta - 1]}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta =$ R.H.S.

viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

L.H.S. $= (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$

$= \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2 \sin A \operatorname{cosec} A + \cos^2 A + \sec^2 A + 2 \cos A \sec A$

$= (\sin^2 A + \cos^2 A) + 2 \sin A\left(\frac{1}{\sin A}\right) + 2 \cos A\left(\frac{1}{\cos A}\right) + 1 + \tan^2 A + 1 + \cot^2 A$

$= 1 + 2 + 2 + 2 + \tan^2 A + \cot^2 A$ **$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A =$ R.H.S.**

ix) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

[ಸುಳುಹು: ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ]

L.H.S. $= (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A)$

$= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A} - \cos A\right)$

$= \left(\frac{\cos^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{\sin^2 A}{\cos A}\right) = \cos A \sin A$

R.H.S. $= \frac{1}{\tan A + \cot A} = \frac{1}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A . \sin A}}$

$= \frac{1}{\frac{1}{\cos A.\sin A}} = \mathbf{\cos A.\sin A}$

L.H.S. = R.H.S.

x) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

L.H.S. $= \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$

$= \frac{1+\tan^2 A}{1+\frac{1}{\tan^2 A}} = \frac{1+\tan^2 A}{\frac{\tan^2 A + 1}{\tan^2 A}}$

$= \frac{1+\tan^2 A}{\frac{1+\tan^2 A}{\tan^2 A}} = \tan^2 A$

$\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{1-\frac{1}{\tan A}}\right)^2$

$= \left(\frac{1-\tan A}{\frac{\tan A - 1}{\tan A}}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{\frac{-(1-\tan A)}{\tan A}}\right)^2 = (-\tan A)^2 = \tan^2 A$

****

9 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳು

ಕಲಿಕಾಂಶಗಳು:

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳ ಅನ್ವಯಿಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

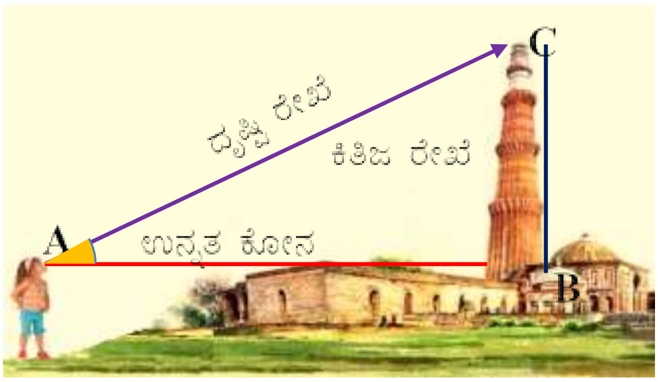
ಜಗತ್ತಿನ ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಪಂಡಿತರು ಅಭ್ಯಾಸಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಒಂದು ಪುರಾತನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯೂ ಒಂದು. 11ನೇ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದ್ದದರಿಂದ ಇದರ ಅನ್ವೇಷಣೆಯಾಯಿತು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು, ಭೂಮಿಯಿಂದ ಗ್ರಹಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ನಕ್ಷತ್ರಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು ಭೂಗೋಳ ಮತ್ತು ಸಮುದ್ರಯಾನದಲ್ಲಿ ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ನಕ್ಷೆಗಳ ರಚನೆ, ಅಕ್ಷಾಂಶ ಮತ್ತು ರೇಖಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ದ್ವೀಪಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು.

[ಸಮೀಕ್ಷಾ ಸಾಧನ, ಇದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ತತ್ವಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ಭ್ರಮಿಸುವ ಟೆಲಿಸ್ಕೋಪ್(ದೂರದರ್ಶಕ) ದೊಂದಿಗೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.]

ಭಾರತದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು 19ನೇ ಶತಮಾನದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಮೀಕ್ಷಾ ಯೋಜನೆಯೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಎರಡು ಬೃಹತ್ ಥಿಯೋಡಲೈಟ್‌ಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಗಿತ್ತು. 1852 ರಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಸಮೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಪಂಚದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಪರ್ವತದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಯಿತು. ಸುಮಾರು 160 **km** ದೂರದಿಂದ, 6 ವಿವಿಧ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಲಾಗಿತ್ತು. ಪರ್ವತದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಥಿಯೋಡಲೈಟ್ಸ್‌ಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಸರ್ ಜಾರ್ಜ್ ಎವರೆಸ್ಟ್ ರವರ ಹೆಸರಲ್ಲಿ ಈ ಪರ್ವತವನ್ನು ಮೌಂಟ್ ಎವರೆಸ್ಟ್ ಪರ್ವತ ಎಂದು 1856 ರಲ್ಲಿ ಕರೆಯಲಾಯಿತು.

12.2 ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರ

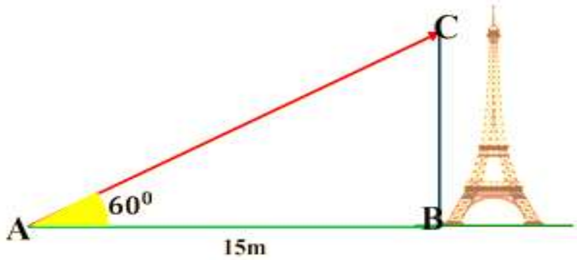
ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆಯು ವೀಕ್ಷಕನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ, ವೀಕ್ಷಕನು ಗಮನಿಸುತ್ತಿರುವ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.



ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಮೇಲೆತ್ತಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು, ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಕೆಳಗಿದ್ದರೆ ಅಂದರೆ, ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿಳಿಸಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡರೇಖೆ ನಡುವೆ ಉಂಟಾದ ಕೋನವನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಅವನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ಗೋಪುರವು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ನೇರವಾಗಿ ನಿಂತಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ 15m ದೂರದ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



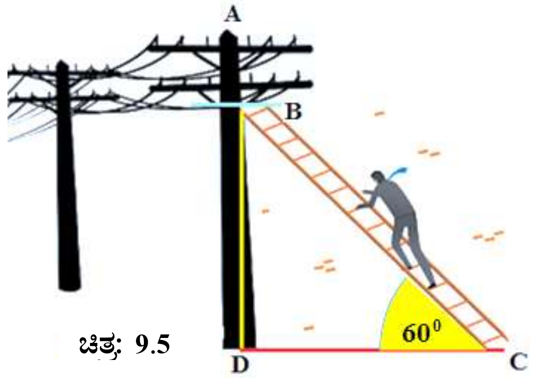
ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = BC ಆಗಿರಲಿ.

AB = 15m

$\tan 60^0 = \frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{BC}{15} \Rightarrow \mathbf{BC = 15\sqrt{3}\ m}$

ಉದಾಹರಣೆ 2: ವಿದ್ಯುಚ್ಛಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರೊಬ್ಬರು 5m ಎತ್ತರದ ಕಂಬದ ಮೇಲೆ ವಿದ್ಯುತ್ ದೋಷವನ್ನು ದುರಸ್ತಿ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಕಂಬದ ಮೇಲ್ತುದಿಯಿಂದ 1.3m ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪಿ, ಅವರು ದುರಸ್ತಿ ಕಾರ್ಯ ಮಾಡಬೇಕಿದೆ (ಚಿತ್ರ 9.5 ನೋಡಿ). ಕ್ಷಿತಿಜಕ್ಕೆ 60^0 ಕೋನ ಏರ್ಪಡುವಂತೆ ಓರೆಯಾಗಿ ಏಣಿಯನಿಟ್ಟು ಅವರು ತಲುಪಬೇಕಾದ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಲು ಬೇಕಾದ ಏಣಿಯ ಉದ್ದವೇನು? ಹಾಗೆಯೇ ಕಂಬದ ಪಾದದಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಏಣಿಯ ಪಾದವಿರಬೇಕು? (ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ $\sqrt{3}$ = 1.73 ಎಂದು ಬಳಸಬಹುದು)



ಚಿತ್ರ: 9.5

ಪರಿಹಾರ: ಕಂಬದ ಎತ್ತರ AD = 5m; ದುರಸ್ತಿ ಮಾಡಬೇಕದ

ಕಂಬದ ಎತ್ತರ BD = 5 – 1.3 = 3.7m

ಏಣಿಯ ಎತ್ತರ BC = ?.

ಕಂಬದ ಬುಡದಿಂದ ಏಣಿಯ ಪಾದಕ್ಕಿರುವ ದೂರ CD=?

$\text{Sin } 60^0 = \frac{BD}{BC}$

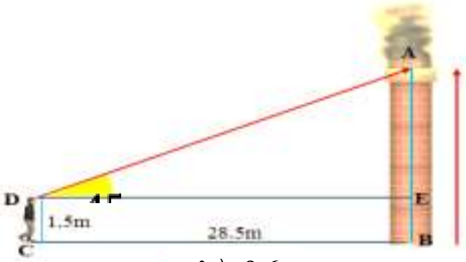
$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3.7}{BC} \Rightarrow BC = \frac{3.7x2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{7.4}{\sqrt{3}} m \approx \frac{740}{173} = 4.28m$

$\text{Tan}60^0 = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3.7}{CD} = \frac{3.7}{\sqrt{3}} m \approx 2.14m$

∴ ಏಣಿಯ ಎತ್ತರ BC = 4.28m ಮತ್ತು ಕಂಬದ ಬುಡದಿಂದ ಏಣಿಯ ಪಾದಕ್ಕಿರುವ ದೂರ CD = 2.14m

ಉದಾಹರಣೆ 3: 1.5m ಎತ್ತರವಿರುವ ವೀಕ್ಷಕರೊಬ್ಬರು ಚಿಮಣಿಯಿಂದ 28.5m ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದಾರೆ. ಚಿಮಣಿಯ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಅವರ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45 ಆಗಿದೆ. ಚಿಮಣಿಯ ಎತ್ತರವೇನು?



ಚಿತ: 9.6

ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಎತ್ತರ CD = BE = 1.5m,

ಚಿಮಿಣಿಯಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಿ ಇರುವ ದೂರ DE = CB = 28.5m;

ಚಿಮಿಣಿಯ ಎತ್ತರ AB = ?

$\tan45^0 = \frac{AE}{DE}$

$\Rightarrow 1 = \frac{AE}{28.5} \Rightarrow AE = 28.5m$

∴ ಚಿಮಿಣಿಯ ಎತ್ತರ = AE + BE = 28.5 + 1.5 = **30m**

ಉದಾಹರಣೆ 4: ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು P ನಿಂದ 10m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲೆ ಧ್ವಜವನ್ನು ಹಾರಿಸಿದೆ ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಈ ಧ್ವಜ ಸ್ತಂಭದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45^0. ಹಾಗಾದರೆ ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಉದ್ದವನ್ನು ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕಟ್ಟಡಕ್ಕಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\sqrt{3}$ = 1.732 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ)

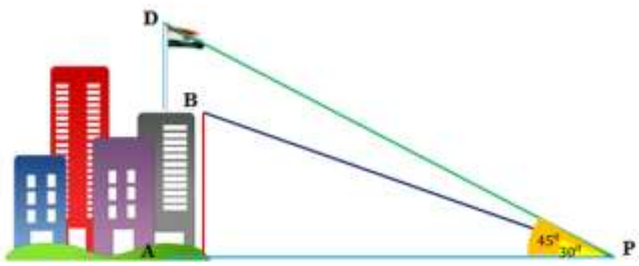
ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ AB = 10m

$\text{Tan}30^0 = \frac{AB}{AP} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$

$\Rightarrow AP = 10\sqrt{3} = 10x1.732 = 17.32m$

$\text{Tan}45^0 = \frac{AD}{AP}$

$\Rightarrow 1 = \frac{AD}{17.32} \Rightarrow AD = 17.32m$



∴ ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ = AD – AB = 17.32 – 10 = 7.32m

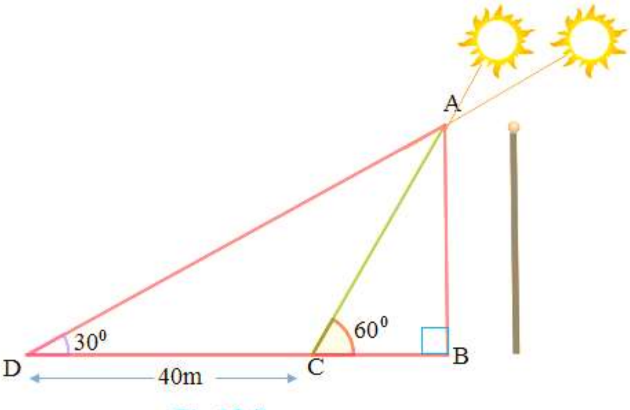
ಉದಾಹರಣೆ 5: ನೆಲದ ಮೇಲೆ ನೇರವಾಗಿ ನಿಂತ ಸ್ತಂಭವೊಂದರ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು, ಸೂರ್ಯನೆಡೆಗಿನ ಕೋನವು 60 ಇದ್ದಾಗ ಉಂಟಾದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ, 30 ಇದ್ದಾಗ ಉಂಟಾದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು 40m ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸೂರ್ಯನೆಡೆಗೆ 60^0 ಕೋನವಿದ್ದಾಗ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ

BC = x ಮೀ ಆಗಿರಲಿ.

∴ಸೂರ್ಯನೆಡೆಗೆ 30^0 ಇದ್ದಾಗ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ

BD = $(40 + x)$m



ಚಿತ್ರ: 9.8

$\tan 60^0 = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{x} \Rightarrow AB = \sqrt{3}x$ ------------ (1)

$\tan 30^0 = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{40+x}$

$\Rightarrow 40+x = \sqrt{3}AB$

$\Rightarrow 40 + x = \sqrt{3} . \sqrt{3}x$

$\Rightarrow 40 + x = 3x \Rightarrow 2x = 40 \Rightarrow x = 20m$

∴ (1) $\Rightarrow AB = \sqrt{3}x \Rightarrow AB = 20\sqrt{3}$ m

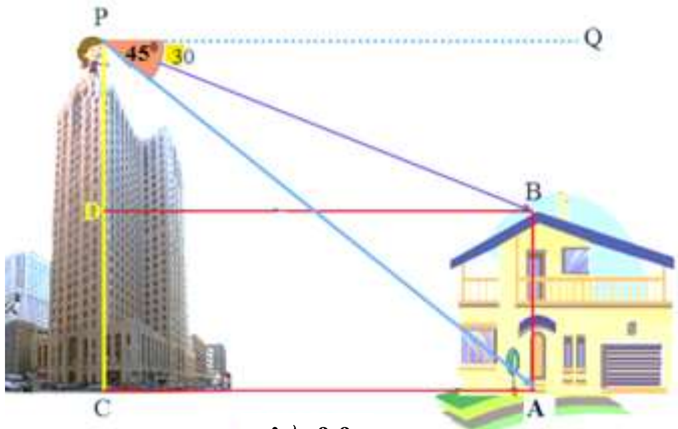
ಉದಾಹರಣೆ 6: ಒಂದು ಬಹುಮಹಡಿ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲಿನಿಂದ 8m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಮೇಲ್ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30^0 ಮತ್ತು 45^0 ಆಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಬಹುಮಹಡಿ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಆ ಎರಡೂ ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ = AB = 8m

ಬಹು ಮಹಡಿ ಕಟ್ಟದದ ಎತ್ತರ

PC = PD + CD

= PD + AB **= PD + 8m -------- (1)**



ಚಿತ್ರ: 9.9

ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = AC = BD; PQ∥BD,

∴ ∠BPQ = ∠PBD [ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು]

$\therefore \tan 30^0 = \frac{PD}{BD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{PD}{BD}$

$\Rightarrow BD = \sqrt{3}PD$ -----------------------(2)

PQ∥AC, ∴ ∠APQ = ∠PAC [ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು]

$\therefore \tan 45^0 = \frac{PC}{AC}$

$\Rightarrow 1 = \frac{PD+8}{\sqrt{3}PD}$ [(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ]

$\Rightarrow \sqrt{3}PD = PD + 8 \Rightarrow PD(\sqrt{3} - 1) = 8$

$\Rightarrow PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{2} = 4(\sqrt{3} + 1)$

∴ ಬಹು ಮಹಡಿ ಕಟ್ಟದದ ಎತ್ತರ PC $= PD + 8m = 4(\sqrt{3} + 1) + 8 = 4\sqrt{3} + 12 = 4(3 + \sqrt{3})m$

∴ ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = ಬಹು ಮಹಡಿ ಕಟ್ಟದದ ಎತ್ತರ $= 4(3 + \sqrt{3})m$

[ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = AC = BD ⇒ BD = $4\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$ [(2) ರಿಂದ] ⇒ BD =$4(3 + \sqrt{3})$m]

ಉದಾಹರಣೆ 7: ನದಿಗೆ ಕಟ್ಟಲಾದ ಸೇತುವೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ನದಿಯ ಎರಡೂ ಪಾರ್ಶ್ವದ ದಡಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30^0 ಮತ್ತು 45^0 ಆಗಿವೆ. ಸೇತುವೆಯು ದಡದ ಮೇಲಿನಿಂದ 3 m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ನದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನದಿಯ ಅಗಲ = AD + BD; MN∥AB

$\Rightarrow \angle MPA = \angle A = 30^0$ ಮತ್ತು

$\angle NPD = \angle B = 45^0$ [ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು]

$\tan 30^0 = \frac{PD}{AD}$

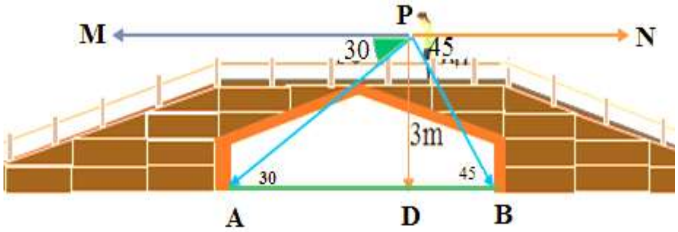
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD} \Rightarrow AD = 3\sqrt{3}$ m ---------------------(1)

$\tan 45^0 = \frac{PD}{BD}$

$\Rightarrow 1 = \frac{3}{BD} \Rightarrow BD = 3$m --------------------(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

ನದಿಯ ಅಗಲ = $AD + BD = 3\sqrt{3} + 3 = 3(\sqrt{3} + 1)$m



ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1. ಒಬ್ಬ ಸರ್ಕಸಿನ ಕಲಾವಿದನು, ನೇರ ಸ್ತಂಭದಿಂದ ಹಿಗ್ಗಿಸಿ ನೆಲಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿರುವ 20m ಉದ್ದದ ಹಗ್ಗದ ಮೇಲೆ ಹತ್ತುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ನೆಲದೊಂದಿಗೆ ಹಗ್ಗದ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 30^0 ಆದರೆ, ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 9.11 ನೋಡಿ)

ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ BC

$\sin 30^0 = \frac{BC}{AC}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{20}$

$\Rightarrow BC = 10$m

$\therefore$ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ BC = 10m

2. ಬಿರುಗಾಳಿಗೆ ಸಿಕ್ಕಿ ಒಂದು ಮರವು ಮುರಿದು, ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿದಾಗ ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 30 ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ ಮತ್ತು ಮರದ ತುದಿಯು ಮರದ ಬುಡದಿಂದ 8m ದೂರದಲ್ಲಿ ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮುರಿದು ಬೀಳುವ ಮುನ್ನ ಮರದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟಿತ್ತೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

= AB+BC

$\cos 30° = \frac{AC}{BC}$

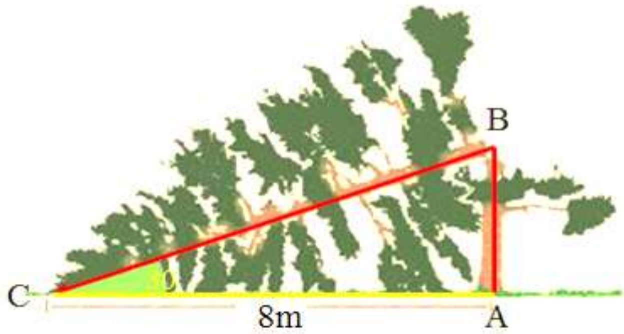
$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{BC} \Rightarrow BC = \frac{16}{\sqrt{3}}$

$\tan 30° = \frac{AB}{AC}$

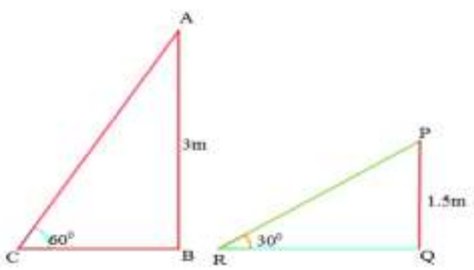
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{8} \Rightarrow AB = \frac{8}{\sqrt{3}}$ m

$\therefore$ ಮರದ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ = AB+ BC

$= \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$m



3. ಗುತ್ತಿಗೆದಾರರೊಬ್ಬರು ಉದ್ಯಾನವನದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳಿಗಾಗಿ ಎರಡು ಜಾರುಬಂಡೆಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಯೋಜಿಸುತ್ತಾರೆ. 5 ವರ್ಷದ ಕೆಳಗಿನ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಇಳಿಜಾರು ಸುಮಾರು 1.5m ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ನೆಲಕ್ಕೆ 30^0 ಓರೆ ಕೋನ ಉಂಟಾಗುವಂತೆ ಹಾಗೂ ಹಿರಿಯ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಜಾರುಬಂಡೆ ಸುಮಾರು 3m ಎತ್ತರ ಹಾಗೂ ನೆಲಕ್ಕೆ 60^0 ಓರೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಇಷ್ಟಪಡುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಜಾರುಬಂಡೆಯ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?



60^0 ಓರೆ ಕೋನವಿರುವ ಇಳಿಜಾರಿನ ಉದ್ದ = AC

30° ಓರೆ ಕೋನವಿರುವ ಇಳಿಜಾರಿನ ಉದ್ದ = PR ಆಗಿರಲಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\sin 30° = \frac{PQ}{PR}$

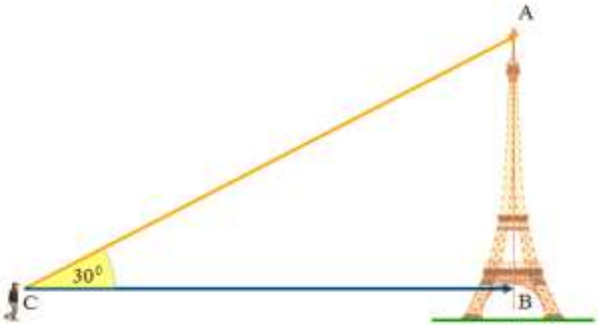
$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1.5}{PR} \Rightarrow PR = 3m$

ಲಂಬಕೋನ ΔPQRನಲ್ಲಿ, $\sin 60° = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{3}} m = 2\sqrt{3}$ m

∴ ಇಳಿಜಾರುಗಳ ಎತ್ತರಗಳು 3m ಮತ್ತು $2\sqrt{3}$ m .

4. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ 30m ದೂರದ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಗೋಪುರದ ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಆದರೆ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = AB ಆಗಿರಲಿ.

ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ BC = 30m

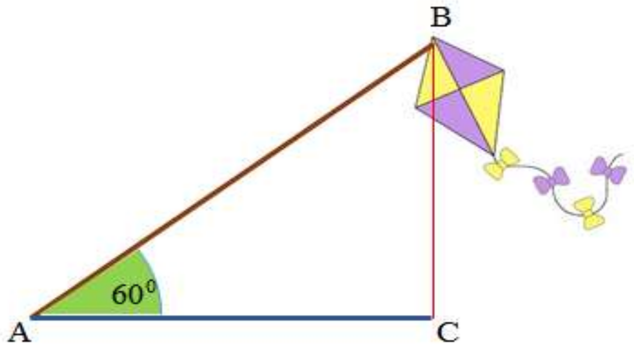
ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 30^0 = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{30}$

$\Rightarrow AB = \frac{30}{\sqrt{3}} = \mathbf{10\sqrt{3}m}$

5. ಗಾಳಿಪಟವೊಂದು ನೆಲದ ಮೇಲಿನಿಂದ 60m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಹಾರಾಡುತ್ತಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಲಾದ ದಾರವನ್ನು ತಾತ್ಕಲಿಕವಾಗಿ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಗೂಟಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿದೆ. ದಾರವು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 60^0 ಯ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ. ದಾರವು ಸಡಿಲವಾಗಿಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ, ದಾರದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಗಾಳಿಪಟದ ಎತ್ತರ BC = 60m

ದಾರದ ಉದ್ದ = AB ಆಗಿರಲಿ.

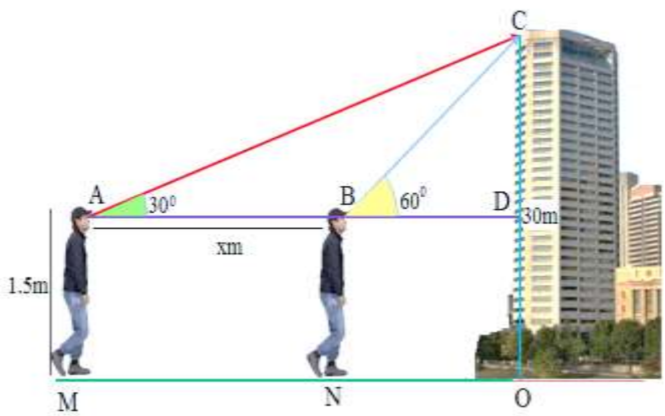
ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ,

$\text{Sin}60^0 = \frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{AB}$

$\Rightarrow AB = \frac{120}{\sqrt{3}} = \mathbf{40\sqrt{3}m}$

6. 1.5m ಎತ್ತರದ ಹುಡುಗನೊಬ್ಬ 30m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡದಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ. ಕಟ್ಟಡದ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ನಡೆದು ಹೋಗುವಾಗ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಅವನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಯಿಂದ 60^0ಗೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನು ಕಟ್ಟಡದ ಕಡೆಗೆ ಎಷ್ಟು ದೂರ ನಡೆದು ಬಂದಿದ್ದಾನೆ?



ಹುಡುಗನು M ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನ 30° ಮತ್ತು

ಅವನು ಕಟ್ಟಡದ ಕಡೆಗೆ ನಡೆದ ದೂರ x' m

x' m ನಡೆದಾಗ ಅವನು ನಿಂತಿರುವ ಬಿಂದು N ಆಗಿರಲಿ.

M ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನ 60° ಆಗಿದೆ.

∴ MN = AB = x.

ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ = OC = 30 m

CD = OC - OD = (30 - 1.5) = **28.5 m**

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, ಲಂಬಕೋನ ΔADC ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 30° = \frac{CD}{AD} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{28.5}{AD}$

$\Rightarrow AD = 28.5\sqrt{3}$ m

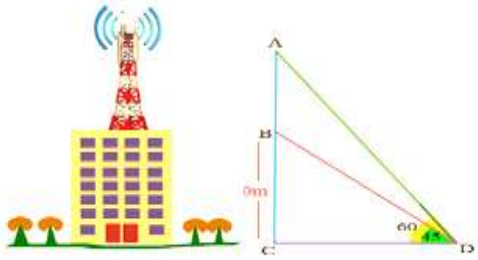
ಲಂಬಕೋನ ΔCBD ಯಲ್ಲಿ

$\tan 60° = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{28.5}{\sqrt{3}} = 9.5\sqrt{3}$ m

$\therefore$ MN $= AB = x = (28.5\sqrt{3} - 9.5\sqrt{3}) = 19\sqrt{3}$ m

∴ಅವನು ಕಟ್ಟಡದ ಕಡೆಗೆ ನಡೆದ ದೂರ= $19\sqrt{3}$ m

7. **20m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾದ ಪ್ರಸರಣೆಯ ಗೋಪುರವೊಂದರ (transmission tower) ಮೇಲ್ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದಗಳ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60^0 ಮತ್ತು 45^0 ಇದೆ. ಪ್ರಸರಣೆಯ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**



ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ = BC= 20 m ಆಗಿರಲಿ.ನೆಲದ ಮೇಲಿಂದ ಗೋಪುರವನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುವ ಪ್ರಸರಣೆ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ AB = AC - BC

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, ಲಂಬಕೋನ ΔBCD ಯಲ್ಲಿ,

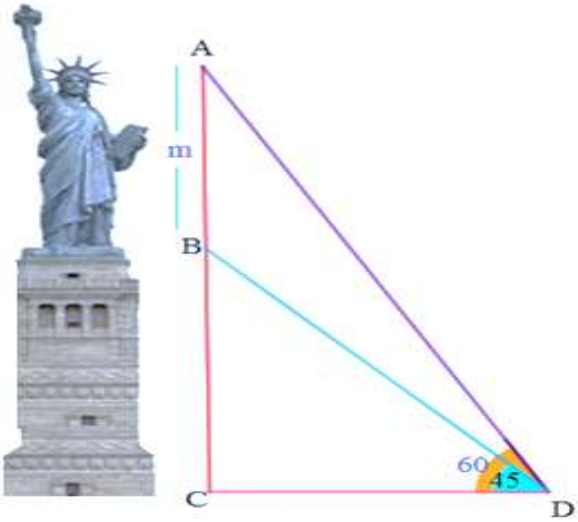
$\tan 45° = \frac{BC}{CD} \Rightarrow 1 = \frac{20}{CD} \Rightarrow CD = 20$ m

ಲಂಬಕೋನ ΔACD ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 60° = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AC}{20} \Rightarrow AC = 20\sqrt{3}$ m

ಪ್ರಸರಣೆ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ $AB = AC - BC = (20\sqrt{3} - 20)$ m $= 20(\sqrt{3} - 1)$ m.

8. **1.6m ಎತ್ತರದ ಪ್ರತಿಮೆಯೊಂದನ್ನು ಒಂದು ಪೀಠದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರತಿಮೆಯ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಮತ್ತು ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪೀಠದ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45^0 ಆಗಿದೆ. ಪೀಠದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**



ಪ್ರತಿಮೆಯ ಎತ್ತರ = AB ಆಗಿರಲಿ.

ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಉನ್ನತಕೋನವು ಉಂಟಾದ ಬಿಂದು D ಆಗಿರಲಿ.

ಪೀಠದ ಎತ್ತರ BC = AC - AB

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, ಲಂಬಕೋನ ΔBCD ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 45° = \frac{BC}{CD} \Rightarrow 1 = \frac{BC}{CD}$ **⇒ BC = CD.**

ಲಂಬಕೋನ ΔACD ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 60° = \frac{AC}{CD}$

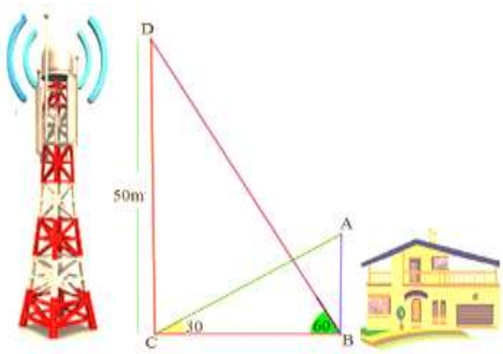
$\Rightarrow \sqrt{3}CD = 1.6$ m + BC $\Rightarrow \sqrt{3}BC = 1.6$ m + BC

$\Rightarrow \sqrt{3}BC - BC = 1.6$ m $\Rightarrow BC(\sqrt{3} - 1) = 1.6$ m

$\Rightarrow BC(\sqrt{3} - 1) = \frac{1.6}{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow BC = 0.8(\sqrt{3} + 1)$ m

∴ಪೀಠದ ಎತ್ತರ $BC = 0.8(\sqrt{3} + 1)$ m.

9. **ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಮೇಲ್ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಮತ್ತು ಕಟ್ಟದದ ಪಾದದಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60 ಇದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ 50m ಇದ್ದರೆ, ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**



ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ CD = 50 m (ದತ್ತ)

ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ = AB ಆಗಿರಲಿ.

ಕಟ್ಟಡದ ಬುಡದಿಂದ ಗೋಪುರಕ್ಕಿರುವ ದೂರ BC

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, ಲಂಬಕೋನ ΔBCD ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 60° = \frac{CD}{BC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{50}{BC}$

$\Rightarrow BC = \frac{50}{\sqrt{3}}$

ಲಂಬಕೋನ ΔABCಯಲ್ಲಿ, $\tan 30° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = \frac{BC}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow AB = \frac{50}{3}$m

ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ = $\frac{50}{3}$ m = **$16\frac{2}{3}$ m**

10. 80 ಅಡಿ ಅಗಲವುಳ್ಳ ರಸ್ತೆಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಎತ್ತರವಿರುವ 2 ಕಂಬಗಳು ಅಭಿಮುಖವಾಗಿ ನಿಂತಿವೆ. ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಕಂಬದ ಮೇಲ್ತುದಿಗಳ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60^0 ಮತ್ತು 30^0 ಆಗಿದೆ. ಕಂಬಗಳ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಕಂಬಗಳಿಂದ ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

AB ಮತ್ತು CD ಗಳು ಎರಡು ಸಮ ಎತ್ತರವಿರುವ ಕಂಬಗಳು.

ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಉನ್ನತಕೋನ ಉಂಟಾಗುವ ಬಿಂದು O ಆಗಿದೆ.

ಕಂಬಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = BD

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ AB = CD, OB + OD = 80 m

ಲಂಬಕೋನ ΔCDOನಲ್ಲಿ, $\tan 30° = \frac{CD}{OD}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{CD}{OD} \Rightarrow CD = \frac{OD}{\sqrt{3}}$ -------------------- (1)

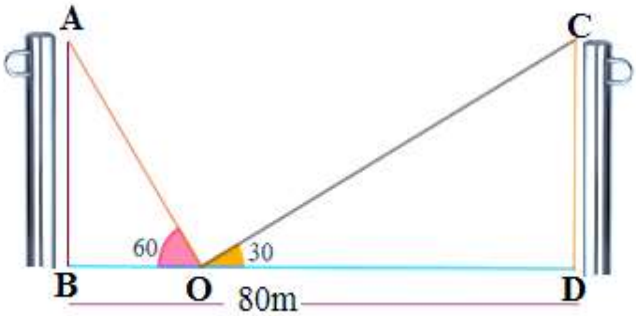
ಲಂಬಕೋನ ΔABOನಲ್ಲಿ, $\tan 60° = \frac{AB}{OB}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{80-OD} \Rightarrow AB = \sqrt{3}(80 - OD)$

AB = CD (ದತ್ತ)

$\Rightarrow \sqrt{3}(80-OD) = \frac{OD}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3(80-OD) = OD$

$\Rightarrow 240 - 3\,OD = OD \Rightarrow 4\,OD = 240 \Rightarrow$ **OD = 60**



OD = 60 ಎಂದು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$CD = \frac{60}{\sqrt{3}} \Rightarrow CD = 20\sqrt{3}$ m

$OB + OD = 80 \text{ m} \Rightarrow OB = (80-60) \text{ m} = 20$ m

ಆದ್ದರಿಂದ ಕಂಬಗಳ ಎತ್ತರ = $20\sqrt{3}$ m ಮತ್ತು ಉನ್ನತ ಕೋನ ಏರ್ಪಡುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕಂಬಗಳಿಗಿರುವ ದೂರಗಳು = 60ಮೀ ಮತ್ತು 20 ಮೀ ಗಳಾಗಿವೆ.

11. ಒಂದು ಕಾಲುವೆಯ ದಡದ ಮೇಲೆ ದೂರದರ್ಶನದ ಗೋಪುರವೊಂದು ನೇರವಾಗಿ ನಿಂತಿದೆ. ಗೋಪುರಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾದ ಮತ್ತೊಂದು ದಡದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಆಗಿದೆ. ಇದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಪಾದವನ್ನು ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ 20m ದೂರದ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 12.12 ನೋಡಿ). ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಕಾಲುವೆಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = AB ಆಗಿರಲಿ.

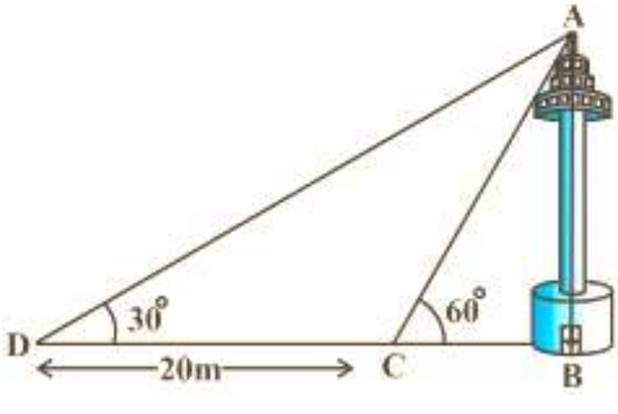
CD = 20 m (ದತ್ತ)

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, ಲಂಬಕೋನ ΔABD ಯಲ್ಲಿ, $\tan 30° = \frac{AB}{BD}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{CD+BC} \Rightarrow AB = \frac{(20+BC)}{\sqrt{3}}$ -------------------- (1)

ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\tan 60° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow AB = \sqrt{3}\,BC$ -------------------- (2)



ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$\frac{(20+BC)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,BC \Rightarrow 3\,BC = 20 + BC \Rightarrow 2\,BC = 20 \Rightarrow BC = 10$ m

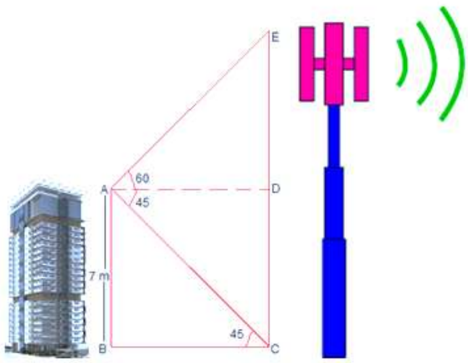
BC =10 ಇದನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$AB = 10\sqrt{3}$ m **ಆದ್ದರಿಂದ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = $10\sqrt{3}$ m ಮತ್ತು ಕಾಲುವೆಯ ಅಗಲ= 10 m.**

12. 7m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದಕ್ಕೆ ಅವನತ ಕೋನವು 45^0 ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ AB = 7 m ಮತ್ತು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = EC

A ಯು ಉನ್ನತಕೋನ ಏರ್ಪಡುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.



EC = DE + CD

CD = AB = 7 m ಮತ್ತು BC = AD

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 45° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow 1 = \frac{7}{BC} \Rightarrow BC = 7\ m = AD$

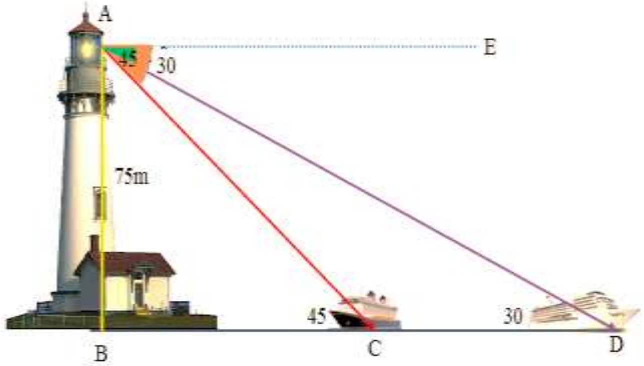
ಲಂಬಕೋನ ΔADE ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 60° = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{DE}{7} \Rightarrow DE = 7\sqrt{3}\ m$

ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = EC = DE + CD

$= (7\sqrt{3} + 7)\ m = 7\sqrt{3}+1)\ m.$

13. ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಿಂದ 75m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವ ದೀಪಸ್ತಂಭವೊಂದರ ಮೇಲಿನಿಂದ ಎರಡು ಹಡಗುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30^0 ಮತ್ತು 45^0 ಆಗಿದೆ. ದೀಪಸ್ತಂಭದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹಡಗಿನ ಹಿಂದೆ ಮತ್ತೊಂದಿದ್ದರೆ ಎರಡು ಹಡಗುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ದೀಪ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರAB = 75 m.

C ಮತ್ತು D ಗಳು ಹಡಗುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 45° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow 1 = \frac{75}{BC} \Rightarrow BC = 75\ m$

ಲಂಬಕೋನ ΔABD ಯಲ್ಲಿ,

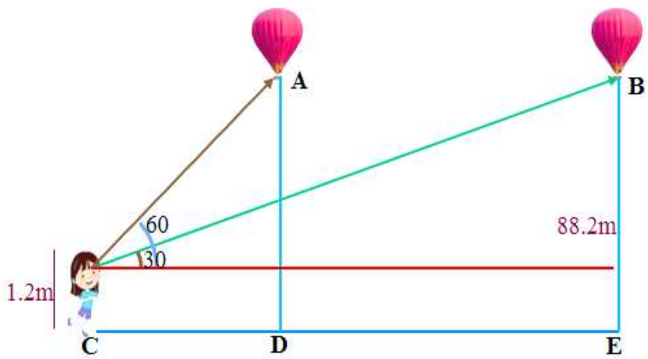
$\tan 30° = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{75}{BD} \Rightarrow BD = 75\sqrt{3}m$

ಹಡಗುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = CD = BD - BC

$\mathbf{= (75\sqrt{3} - 75)m = 75(\sqrt{3}-1)m.}$

14. 1.2m ಎತ್ತರದ ಹುಡುಗಿಯು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 88.2m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಬಲೂನ್‌ಗಳೆರಡು ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿ ತೇಲುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಒಂದು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಹುಡುಗಿಯ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಬಲೂನ್‌ಗೆ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಸ್ವಲ್ಪ ಸಮಯದ ನಂತರ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಆಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 12.13 ನೋಡಿ). ಈ ಸಮಯದ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಬಲೂನ್ ಚಲಿಸಿದ ದೂರವೆಷ್ಟು?

ಬಲೂನಿನ ಆರಂಭಿಕ ಸ್ಥಾನ A ಮತ್ತು ನಂತರದ ಸ್ಥಾನ B ಆಗಿರಲಿ.



ಬಲೂನಿನ ಎತ್ತರ = 88.2 m - 1.2 m = 87 m

ಬಲೂನ್ ಚಲಿಸಿದ ದೂರ = DE = CE - CD

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, ಲಂಬಕೋನ ΔBEC ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 30° = \frac{BE}{CE} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{87}{CE} \Rightarrow CE = 87\sqrt{3}\ m$

ಲಂಬಕೋನ ΔADC ಯಲ್ಲಿ, $\tan 60° = \frac{AD}{CD}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{87}{CD} \Rightarrow CD = \frac{87}{\sqrt{3}}\ m = 29\sqrt{3}\ m$

ಬಲೂನ್ ಚಲಿಸಿದ ದೂರ

$DE = CE - CD = (87\sqrt{3} - 29\sqrt{3})\ m = 58\sqrt{3}\ m.$

15. ಒಂದು ನೇರ ಹೆದ್ದಾರಿಯೂ ಗೋಪುರದ ಪಾದಕ್ಕೆ ದಾರಿಯಾಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತ ವ್ಯಕ್ತಿಯೊಬ್ಬರು ಏಕರೂಪ ಜವದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತಿರುವ ಕಾರೊಂದನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾರೆ. ಕಾರಿನ ಅವನತ ಕೋನವು 30^0 ಆಗಿದೆ. 6 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ ಕಾರಿನ ಅವನತ ಕೋನವು 60^0 ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಬರಲು ಕಾರು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯವೆಷ್ಟು?

ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = AB

D ಯು ಕಾರಿನ ಆರಂಭಿಕ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು C ಕಾರಿನ ನಂತರದ ಸ್ಥಾನವಾಗಿರಲಿ..

BC ಯು ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ಕಾರಿಗಿರುವ ದೂರವಾಗಿರಲಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sqrt{3}}$ m

ಲಂಬಕೋನ ΔADB ಯಲ್ಲಿ, $\tan 30° = \frac{AB}{BD}$

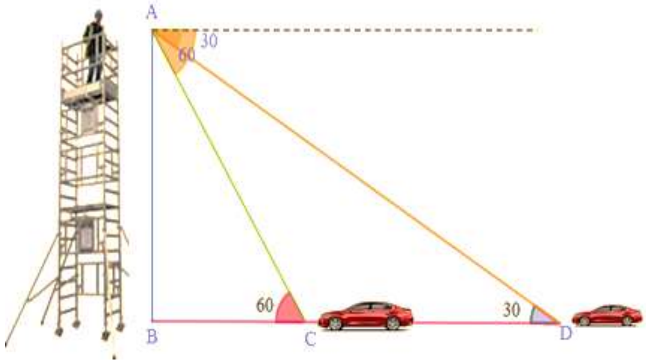
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC + CD}$

$\Rightarrow AB\sqrt{3} = \frac{AB}{\sqrt{3}} + CD$

$\Rightarrow CD = AB\sqrt{3} - \frac{AB}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow CD = AB\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow CD = AB\left(\frac{3-1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow CD = \frac{2AB}{\sqrt{3}}$ m



ಇಲ್ಲಿ ದೂರ BC ಯು ದೂರ CD ಯ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕಾರು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯವು ಅರ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

CDದೂರ ಚಲಿಸಲು ಕಾರು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಮಯ = 6 sec.

ಆದ್ದರಿಂದ BC ದೂರ ಚಲಿಸಲು ಕಾರು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಮಯ = 6/2 = 3 sec.

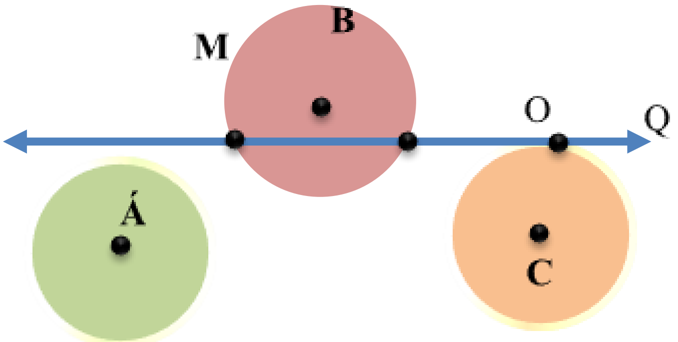
****

10 ವೃತ್ತಗಳು

ಕಲಿಕಾಂಶಗಳು:

1. ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಛೇದಕ, ಸ್ಪರ್ಶಕ, ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳ ನಿರೂಪಣೆ
2. ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯಗಳು
3. ವೃತ್ತದದ ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅನ್ವಯಿಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

ಛೇದಕವಲ್ಲದ ರೇಖೆ: ರೇಖೆಯು ವೃತ್ತದೊಂದಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. A ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ PQ ಒಂದು ಛೇದಕವಲ್ಲದ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.



ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆ: ರೇಖೆಯು ವೃತ್ತದೊಂದಿಗೆ ಎರಡು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. B ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ PQ ರೇಖೆಯು ಒಂದು ಛೇದಕವಾಗಿದೆ. ಅದು ವೃತ್ತದೊಂದಿಗೆ M ಮತ್ತು N ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ

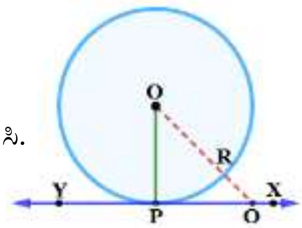
ಸ್ಪರ್ಶಕ ರೇಖೆ: ರೇಖೆಯು ವೃತ್ತದೊಂದಿಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.C ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ PQ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ. ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.

4.2 ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ

ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವಿರುತ್ತದೆ. ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕ್ಕಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು, ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 10.1

ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು, ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ದತ್ತ: O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ XY ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೀಯ: $OP \perp XY$

ರಚನೆ: P ಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, XY ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು Q ಆಗಿರಲಿ OQ ಸೇರಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ: Q ಸ್ಪರ್ಶಕ XY ಮೇಲೆ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು P ಯನ್ನು ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ Q ವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿರಬೇಕು.

[∵ವೃತ್ತ ಸ್ಪರ್ಶಕವು, ವೃತ್ತದೊಂದಿಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.]

OQ ವೃತ್ತವನ್ನು R ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.

∴ $OP = OR$ [∵ ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು]

ಈಗ, $OQ = OR + RQ$

$\Rightarrow OQ > OR$

$\Rightarrow OQ > OP$ [∵$OP = OR$]

ಆದ್ದರಿಂದ, OP ಯು O ನಿಂದ XY ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆಳೆದ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರವಾಗಿದೆ.

∴ $OP \perp XY$ [∵ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ರೇಖೆಗಿರುವ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರವು ಆ ರೇಖೆಗೆಳೆದ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.]

1. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.
2. ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೆಲವು ಸಲ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ವೃತ್ತದ 'ಲಂಬಕ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1. ವೃತ್ತವು ಹೊಂದಿರಬಹುದಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? **ಉತ್ತರ: ಅಪರಿಮಿತ**
2. ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳ ತುಂಬಿರಿ:

   i) ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಕವೊಂದು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ______________ [ಉತ್ತರ: ಒಂದು]

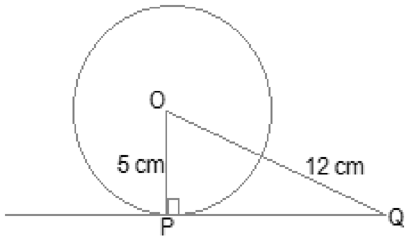
   ii) ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಯೇ ______________ [ಉತ್ತರ: ಛೇದಕ]

   iii) ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಹೊಂದಿರಬಹುದಾದ ಸಮಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ ______________ [ಉತ್ತರ: ಎರಡು]

   iv) ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತ ಹೊಂದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವೇ ______________ [ಉತ್ತರ: ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು]

3. **5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ PQ. ಇದು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ O ದಿಂದ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯನ್ನು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. OQ = 12 cm ಆದರೆ PQ ಉದ್ದವು**

   a) 12 cm b) 13 cm c) 8.5 cm d) $\sqrt{119}$ cm



ಉತ್ತರ: ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರ

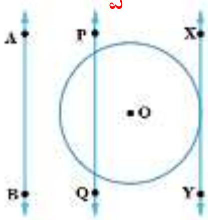
$\Rightarrow OP \perp PQ$

ΔOPQ ನಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ, $OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

$\Rightarrow (12)^2 = 5^2 + PQ^2 \Rightarrow PQ^2 = 144 - 25 \Rightarrow PQ^2 = 119 \Rightarrow PQ = \sqrt{119}$ cm

(d) $\sqrt{119}$ cm

4. **ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತೊಂದು ರೇಖೆಯು ಛೇದಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.**



AB – ಒಂದು ರೇಖೆ

PQ – ಒಂದು ಛೇದಕ

XY – ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ

4.3 ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ:

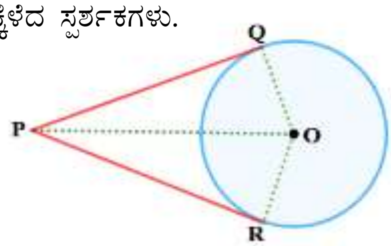
ಪ್ರಕರಣ 1: ವೃತ್ತದ ಒಳಗಿನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಪ್ರಕರಣ 2: ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮಾತ್ರ ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಕರಣ 3: ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದು ವಿನಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 4.2 ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ: O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ P ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು. PQ ಮತ್ತು PR ಗಳು ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು P ನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು.



OP, OQ, OR ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದೆ.

ಸಾಧನೀಯ: PQ = PR

ಸಾಧನೆ: ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ OQP ಮತ್ತು ORP ಗಳಲ್ಲಿ,

OQ = OR (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

OP = OP (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

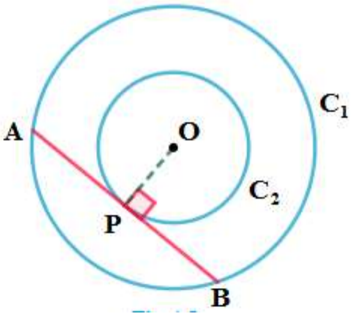
ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta OQP \cong \Delta ORP$ (ಲಂ.ವಿ.ಬಾ)

ಇದರಿಂದ, PQ = PR (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ.)

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ, ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾವು ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, ಜ್ಯಾವು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ದತ್ತ: `O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ C_1 ಮತ್ತು C_2 ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು.

ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತ C_1 ದ ಜ್ಯಾ AB ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತ C_2 ವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.



ಸಾಧನೀಯ: AP = BP

ರಚನೆ: OP ಯನ್ನು *ಸೇರಿಸಿ.* AB ಯು C_2 ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು OP ಯು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $OP \perp AB$ [ಪ್ರಮೇಯ 4.1 ರಿಂದ,]

ಈಗ AB ಯು C_1 ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು $OP \perp AB$

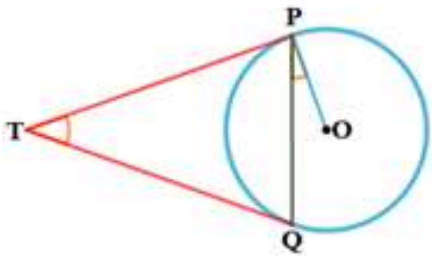
ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಜ್ಯಾ ವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ OP ಯು ಜ್ಯಾ AB ಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, AP = BP

ಉದಾಹರಣೆ 2: `O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು T ಯಿಂದ TP ಮತ್ತು TQ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ದತ್ತ: O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ. T ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದು. TP ಮತ್ತು TQ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು P ಮತ್ತು Q ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು.



ಸಾಧನೀಯ: $\angle PTQ = 2\angle OPQ$

$\angle PTQ = \theta$ ಆಗಿರಲಿ.-----------------(1)

TP = TQ [∵ಪ್ರಮೇಯ 4.2 ರಿಂದ]

ಆದ್ದರಿಂದ TPQ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

$\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}[180 - \theta]$

$\Rightarrow \angle TPQ = \angle TQP = 90^0 - \frac{1}{2}\theta$ ------(2)

$\angle OPT = 90^0$ ---------------------------(3)

$\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ$

$\Rightarrow \angle OPQ = 90^0 - \left(90^0 - \frac{1}{2}\theta\right)$ [∵ (2)ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ]

$\Rightarrow \angle OPQ = \frac{1}{2}\theta$

$\Rightarrow \angle PTQ = 2\angle OPQ$ [∵ (1) ರಿಂದ]

ಉದಾಹರಣೆ 3: 5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ PQ ಉದ್ದವು 8 cm ಆಗಿದೆ. P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು T ಬಿಂದುವನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. (ಚಿತ್ರ 10.10 ನೋಡಿ). TP ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: OT ಸೇರಿಸಿ. ಅದು PQ ರೇಖೆಯನ್ನು ಬಿಂದು R ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

Δ TPQ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು TO ರೇಖೆಯು $\angle PTQ$ ದ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $OT \perp PQ$ ಮತ್ತು OT ರೇಖೆಯು PQ ಅನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

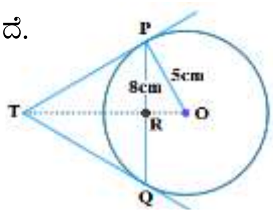


Fig 10.10

ಇದರಿಂದ, PR = RQ = 4 cm.

$\therefore RO = \sqrt{5^2 - 4^2}$

$\Rightarrow RO = \sqrt{25 - 16}$

$\Rightarrow RO = \sqrt{9} \Rightarrow RO = 3cm$

$\angle OPR + \angle TPR = 90^0$--------------- (1) [∵$\Delta PRO$ ನಲ್ಲಿ $\angle PRO = 90^0$]

$\angle PTR + \angle TPR = 90^0$ --------------- (2) [$\because \Delta PTR$ ನಲ್ಲಿ $\angle PRT = 90^0$]

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$\angle OPR = \angle PTR$ --------------- (3)

$\therefore$ ΔPRO ಮತ್ತು ΔPTR ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿವೆ [ಕೋ–ಕೋ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ]

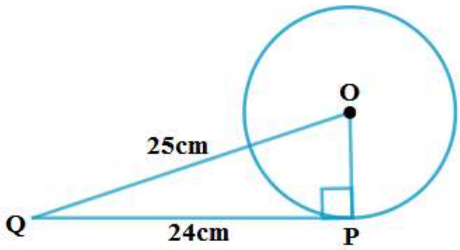
$\Rightarrow \frac{PT}{OP} = \frac{PR}{OR} \Rightarrow \frac{PT}{5} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \mathbf{PT} = \frac{4x5}{3} = \frac{20}{3}$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

ಪ್ರಶ್ನೆ 1 ರಿಂದ 3 ರವರೆಗೆ ಸರಿಯಾದ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿ ಮತ್ತು ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

1. ಒಂದು ಬಿಂದು Q ದಿಂದ, ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವು 24 cm ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಹಾಗೂ Q ಬಿಂದು ನಡುವಿನ ದೂರ 25 cm ಆದರೆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು



$\therefore OP \perp PQ$ ಮತ್ತು ΔOPQ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ.

$OQ = 25$ cm ಮತ್ತು $PQ = 24$ cm

ΔOPQ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

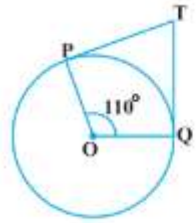
$OQ^2 = OP^2 + PQ^2 \Rightarrow (25)^2 = OP^2 + (24)^2$

$\Rightarrow OP^2 = 625 – 576 \Rightarrow OP^2 = 49 \Rightarrow OP = 7$ cm

ಉತ್ತರ: (A) 7 cm.

A) 7 cm B) 12 cm C) 15 cm D) 24.5 cm

2. ಚಿತ್ರ 4.11 ರಲ್ಲಿ, $\angle POQ$ ಆಗಿರುವಂತೆ, O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ TP ಮತ್ತು TQ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ $\angle PTQ$ ದ ಅಳತೆಯು



OP ಮತ್ತು OQ ಗಳು TP ಮತ್ತು TQ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು

$\therefore OP \perp TP$ ಮತ್ತು, $OQ \perp TQ$

$\Rightarrow \angle OPT = \angle OQT = 90°$

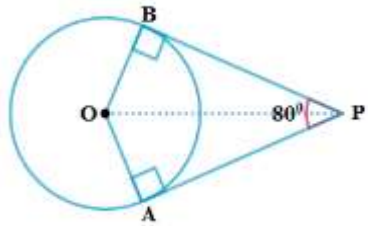
ಚತುರ್ಭುಜ POQTಯಲ್ಲಿ, $\angle PTQ + \angle OPT + \angle POQ + \angle OQT = 360°$

$\Rightarrow \angle PTQ + 90° + 110° + 90° = 360°$

$\Rightarrow \angle PTQ = 70°$ **⇒ಉತ್ತರ (B) 70°.**

A) 60 **B) 70** C) 80 D) 90

3. `O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾದ PA ಮತ್ತು PB ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ 80^0 ಆದರೆ $\angle POA$ ದ ಅಳತೆಯು



OA ಮತ್ತು OB ಗಳು BP ಮತ್ತು BQ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು.

$\therefore OA \perp PA$ ಮತ್ತು $OB \perp PB$

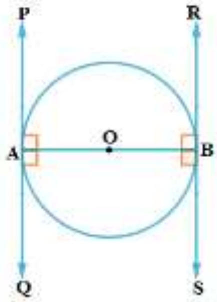
$\angle OBP = \angle OAP = 90°$

ಚತುರ್ಭುಜಗಳ AOBPಯಲ್ಲಿ,

$\angle AOB + \angle OBP + \angle OAP + \angle APB = 360°$

$\Rightarrow \angle AOB + 90° + 90° + 80° = 360°$

$\Rightarrow \angle AOB = 100°$



ಈಗ, ΔOPB ಮತ್ತು ΔOPAಗಳಲ್ಲಿ,

$AP = BP$ ($\because$ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು)

$OA = OB$ ($\because$ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

$OP = OP$ ($\because$ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ)

$\therefore \Delta OPB \cong \Delta OPA$ ($\because$ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ)

$\angle POB = \angle POA$

$\angle AOB = \angle POB + \angle POA \Rightarrow 2\angle POA = \angle AOB \Rightarrow \angle POA = 50°$

$\Rightarrow$ ಉತ್ತರ **(A) 50°**

A) 50^0 B) 60^0 C) 70^0 D) 80^0

4. **ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಸದ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.**

AB ವ್ಯಾಸ. PQ ಮತ್ತು RS ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು.

OA ಮತ್ತು OB ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು

$\therefore OA \perp PQ$ ಮತ್ತು $OB \perp RS$

$\angle OAP = \angle OAQ = \angle OBR = \angle OBS = 90°$

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $\angle OBR = \angle OAQ$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

$\angle OBS = \angle OAP$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

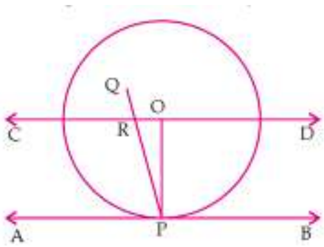
$\Rightarrow PQ \parallel RS$

5. **ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.**

AB ಯು O ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ.

ಸಾಧನೀಯ: P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬವು O ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ.

P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ O ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗದೇ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು Q ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಲಿ.QP ಮತ್ತು OP ಸೇರಿಸಿ.



OP ಯು AB ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು P ಯಿಂದ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯ.

ಆದ್ದರಿಂದ $OP \perp AB$

$\Rightarrow \angle OPA = 90^0$

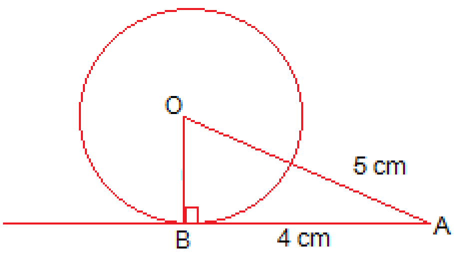
ಆದರೆ $\angle RPA = 90°$ ($PQ \perp AB$)

$\Rightarrow$ ಇದು Pಬಿಂದು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾದರೆ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ

6. **ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 5 cm ದೂರದಲ್ಲಿರುವ A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವು 4 cm ಇದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

AB ಯು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ.



$\therefore OB \perp AB$

OA = 5cm and AB = 4 cm (ದತ್ತ)

ΔABO ನಲ್ಲಿ, $OA^2 = AB^2 + BO^2$ [ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

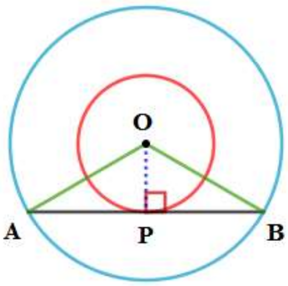
$\Rightarrow 5^2 = 4^2 + BO^2 \Rightarrow BO^2 = 25 - 16$

$\Rightarrow BO^2 = 9 \Rightarrow BO = 3$ $\therefore$ **ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3 cm.**

7. **ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರಿಯ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 5 cm ಮತ್ತು 3 cm ಆಗಿವೆ. ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ 5ಸೆಂ.ಮೀ ಮತ್ತು 3ಸೆಂ.ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ.

AB ಯು 5ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾ 3ಸೆಂ.ಮೀ.ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.



$\therefore$ AB ಯು ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ.

$\Rightarrow OP \perp AB$

ಆದ್ದರಿಂದ AP = PB [ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆಳೆದ ಲಂಬವು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ]

$OA^2 = AP^2 + OP^2$ [ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

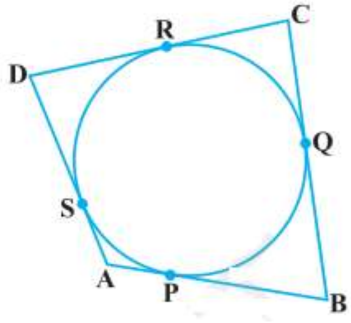
$\Rightarrow 5^2 = AP^2 + 3^2 \Rightarrow AP^2 = 25 - 9 \Rightarrow AP = 4,$

$AB = 2AP = 2 \times 4 = 8$ cm

∴ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು 8 cm.

8. ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವು ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 10.12 ನೋಡಿ). AB + CD = AD + BC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಚಿತ್ರದಿಂದ,



DR = DS (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು D ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು) -------(1)

AP = AS (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು A ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು)-------(2)

BP = BQ (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು B ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು)--------(3)

CR = CQ (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು C ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು)--------(4)

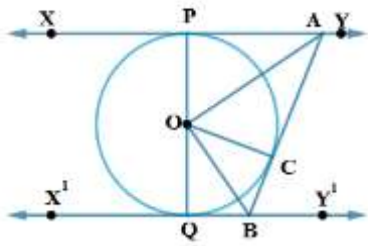
(1) + (2) + (3) + (4)

DR + AP + BP + CR = DS + AS + BQ + CQ

⇒ (BP + AP) + (DR + CR) = (DS + AS) + (CQ + BQ)

⇒AB + CD = AD + BC

9. ಚಿತ್ರ 10.13 ರಲ್ಲಿ, `O' ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ XY ಮತ್ತು X^1Y^1 ಸಮಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು C ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ AB ಯು XY ಅನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು X^1Y^1 ಅನ್ನು B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ $\angle AOB = 90^0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ : 10.13

AB ಸ್ಪರ್ಶಕವು ವೃತ್ತವನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಲಿ. OC ಸೇರಿಸಿದೆ.

ΔOPA ಮತ್ತು ΔOCA ಗಳಲ್ಲಿ,

OP = OC (∵ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

AP = AC (∵A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು)

AO = AO (∵ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ)

∴ ΔOPA ≅ ΔOCA (SSS ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ)

⇒ ∠POA = ∠COA-----------------------(1)

ಇದೇ ರೀತಿ, ΔOQB ≅ ΔOCB

∠QOB = ∠COB--------------------------(2)

POQ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ. ∴ $\angle POQ = 180^0$

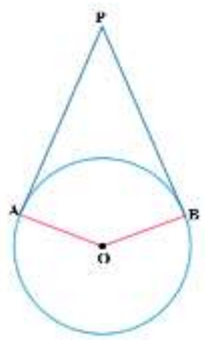
⇒∠POA + ∠COA + ∠COB + ∠QOB = 180 °

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

2∠COA + 2∠COB = 180º

⇒ ∠COA + ∠COB = 90º **⇒ ∠AOB = 90º**

10. ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ದತ್ತ: O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ.. P ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದು. PA ಮತ್ತು PB ಗಳು

P ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು. OAಮತ್ತು OB ಸೇರಿಸಿದೆ

ಸಾಧನೀಯ: ∠APB + ∠BOA = 180º

ಸಾಧನೆ: OA ⊥ PA [ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ]

∴ ∠OAP = 90º

ಇದೇ ರೀತಿ, OB ⊥ PB

∴ ∠OBP = 90º

ಚತುರ್ಭುಜ OAPBಯಲ್ಲಿ, ∠OAP +∠APB +∠PBO +∠BOA = 360º

[ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 360^0]

⇒ 90º + ∠APB + 90º + ∠BOA = 360º

⇒ ∠APB + ∠BOA = 180º

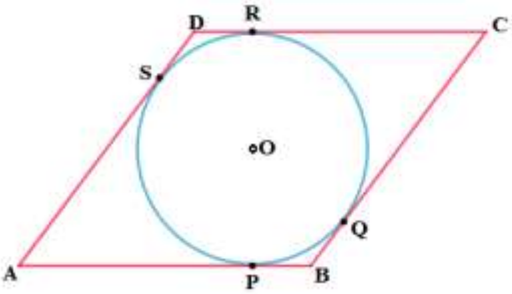
∴ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

11. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವು ಅಂತಸ್ಥವಾದಾಗ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ದತ್ತ: ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. O ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತವು ABCD ಯಲ್ಲಿ ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೀಯ: AB = BC = CD = DA

ಸಾಧನೆ: ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.



∴ AB = CD--------------------------(1)

∴ BC = AD--------------------------(2)

ಚಿತ್ರದಿಂದ,

DR = DS (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು D ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು)

AP = AS (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು A ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು)

BP = BQ (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು B ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು)

CR = CQ (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು C ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು)

ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ,

DR + CR + BP + AP = DS + CQ + BQ + AS

⇒ (BP + AP) + (DR + CR) = (DS + AS) + (CQ + BQ)

⇒ AB + CD = AD + BC --------- (3)

(1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

2AB = 2BC ⇒ AB = BC -----------------------(4)

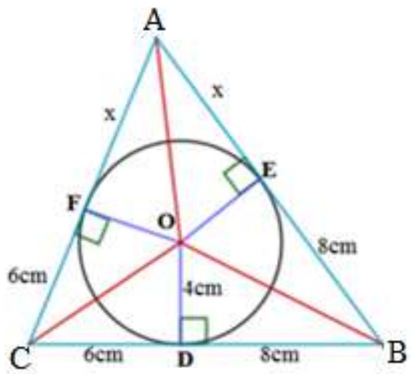
ಸಮೀಕರಣ (1), (2) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ,

AB = BC = CD = DA

∴ ABCD ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ.

12. ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು D ಯು BC ಬಾಹುವನ್ನು BD ಮತ್ತು DC ಯ ಉದ್ದ ಕ್ರಮವಾಗಿ 8 cm ಮತ್ತು 6 cm ಇರುವಂತೆ 4 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವು ΔABC ದಲ್ಲಿ ಆವೃತ್ತಗೊಳಿಸಲು ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. [ಚಿತ್ರ 10.14 ನೋಡಿ]. AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ΔABC ಯಲ್ಲಿ,



ಚಿತ್ರ : 10.14

CF = CD = 6cm (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು C ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು)

BE = BD = 8cm (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು B ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು)

AE = AF = x (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು A ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು)

⇒a = AB = AE + EB = $x + 8$

b = BC = BD + DC = 8 + 6 = 14

c= CA = CF + FA = 6 + x

$S = \frac{AB+BC+CA}{2} = \frac{x+8+14+6+x}{2} = \frac{2x+28}{2}$

⇒ S = 14 + x

ΔABCವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{14+x\,[14+x-(x+8)](14+x-14)[14+x-(6+x)]}$

$= \sqrt{(14+x)\,[14+x-x-8](14+x-14)[14+x-6-x]}$

$= \sqrt{(14+x)\,(6)(x)(8)}$

$= \sqrt{(14+x)\,48x}$ cm^2 --------------------------------(1)

ಹಾಗೆಯೇ, ΔABCಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ΔOCBವಿಸ್ತೀರ್ಣ+ ΔOBAವಿಸ್ತೀರ್ಣ+ ΔOACವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{1}{2}BC.OD + \frac{1}{2}AB.OE + \frac{1}{2}AC.OF$

$= \frac{1}{2}(14x4) + \frac{1}{2}(8+x)4 + \frac{1}{2}(6+x)4$

$= 28 + 16 + 2x + 12 + 2x$

$= (56 + 4x)cm^2$ ---(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$\sqrt{(14 + x)\, 48x} = 56 + 4x$

$48x\,(14 + x) = (56 + 4x)^2$ [ಎರಡು ಬದಿ ವರ್ಗ ಮಾಡಿದಾಗ]

$\Rightarrow 48x = \frac{[4(14+x)]^2}{14 + x} \Rightarrow 48x = 16\,(14 + x) \Rightarrow 48x = 224 + 16x$

$\Rightarrow 32x = 224 \Rightarrow x = 7$ cm

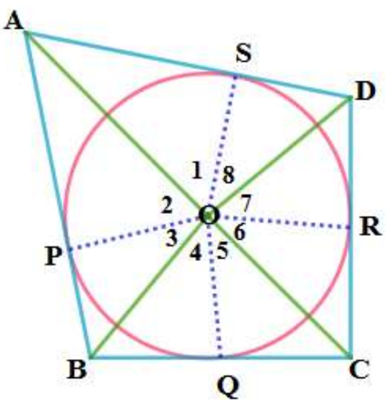
ಆದ್ದರಿಂದ, $AB = x + 8 = 7 + 8 = 15$ cm

CA = 6 + x = 6 + 7 = 13 cm

13. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವು ಅಂತಸ್ಥವಾದಾಗ, ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ದತ್ತ: ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಂತಸ್ಥವಾದ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ O.

ವೃತ್ತವು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು P,Q,R ಮತ್ತು S ಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.



ಸಾಧನೀಯ: $\angle AOB + \angle COD = 180^0$ ಮತ್ತು $\angle AOD + \angle BOC = 180^0$

ರಚನೆ: OP, OQ, OR ಮತ್ತು OS ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದೆ.

ಸಾಧನೆ: ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮವಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2;\ \angle 3 = \angle 4;\ \angle 5 = \angle 6;\ \angle 7 = \angle 8$

ಆದರೆ, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360^o$

$(\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) + (\angle 5 + \angle 6) + (\angle 7 + \angle 8) = 360^o$

$\Rightarrow 2(\angle 2 + \angle 3) + 2(\angle 6 + \angle 7) = 360^o$

$\Rightarrow (\angle 2 + \angle 3) + (\angle 6 + \angle 7) = 180^o \Rightarrow \angle AOB + \angle COD = 180^0$

ಇದೇ ರೀತಿ $\angle AOD + \angle BOC = 180^0$

ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವು ಅಂತಸ್ಥವಾದಾಗ, ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿರುತ್ತದೆ.

11 ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು

ಕಲಿಕಾಂಶಗಳು:

1. ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
2. ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
3. ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕಂಸದ ಉದ್ದ

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಒಂದು ಪುನರಾವಲೋಕನ.

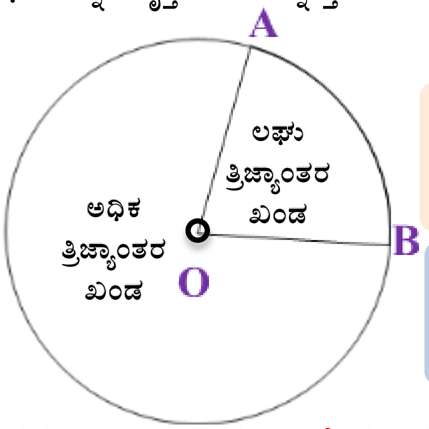
ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಲೂ ಒಂದು ಸುತ್ತು ಹಾಕಲು ಚಲಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಅಥವಾ ಪರಿಧಿ ಎನ್ನುವರು. ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯು ಅದರ ವ್ಯಾಸದೊಂದಿಗೆ ಸ್ಥಿರವಾದ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರ π ನಿಂದ (ಪೈ ಎಂದು ಓದಿ) ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = πr^2

ಪರಿಧಿ = $2\pi r$

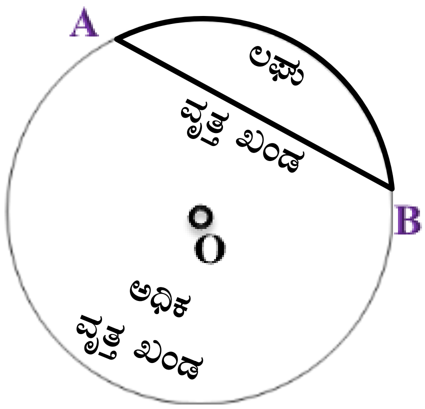
11.3 ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು:

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಅನುರೂಪ ಕಂಸದಿಂದ ಆವೃತ್ತವಾದ ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು 'ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಹಾಗೂ ಅದರ ಅನುರೂಪ ಕಂಸದಿಂದ ಆವೃತ್ತವಾದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಭಾಗವನ್ನು 'ವೃತ್ತಖಂಡ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.



θ ಕೋನವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

θ ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕಂಸದ ಉದ್ದ $= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

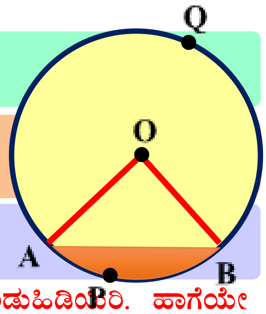


ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಕೆಲವು ಸಂಬಂಧ (ಸೂತ್ರ):

APB ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = OAPB ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ΔOAB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

AQB ಅಧಿಕ ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ πr^2 - APB ಲಘು ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

OAQB ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ= πr^2 - OAPB ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ



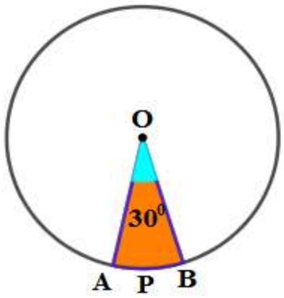
ದಾಹರಣೆ 2: ತ್ರಿಜ್ಯ 4 cm ಮತ್ತು ಕೋನವು 30^0 ಇರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಅನುರೂಪವಾದ ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ಬಳಸಿ).

ಪರಿಹಾರ: OAPB ಯು ದತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡವಾಗಿದೆ.

ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\theta}{360}$ x πr^2

$\Rightarrow \frac{30}{360}$ x 3.14 x 4 x 4 = $\frac{12.56}{3} \approx 4.19\ cm^2$

ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ



= πr^2 - OAPB ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= $(3.14 \times 16 - 4.19)\ cm^2$

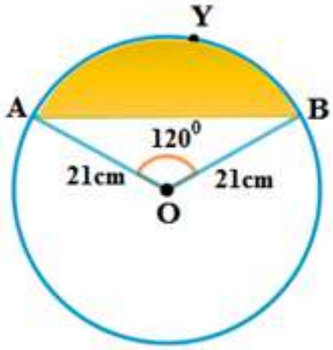
$\approx 46.1\ cm^2$

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:

ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= $\frac{360-\theta}{360}$ x πr^2= $\frac{360-30}{360}$ x 3.14 x 4 x 4= 46.05 $\approx 46.1\ cm^2$

ಉದಾಹರಣೆ 3: ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 21 cm ಮತ್ತು $\angle AOB = 120^0$ ಆದರೆ ಚಿತ್ರ 11.9 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ AYB ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಬಳಸಿ)



ಚಿತ್ರ:

ಪರಿಹಾರ: ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

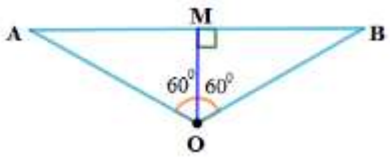
= OAYB ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ΔOAB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (1)

ಈಗ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\theta}{360}$ x πr^2

= $\frac{120}{360}$ x $\frac{22}{7}$ x 21 x 21 = $462cm^2$

ΔOAB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು

ಚಿತ್ರ 5.10 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ $OM \perp AB$ ಎಳೆಯಿರಿ.



OA = OB

ಆದ್ದರಿಂದ, ಲಂ.ವಿ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಪ್ರಕಾರ $\Delta AMO \cong \Delta BMO$

$\therefore$AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಮತ್ತು $\angle AOM = \angle BOM = 60^0$

$\angle$OAM ನಲ್ಲಿ, $\frac{OM}{OA}$ = $Cos60^0$

$\Rightarrow \frac{OM}{21} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ OM = $\frac{21}{2}$ cm

$\angle$OAM ನಲ್ಲಿ, $\frac{AM}{OA}$ = $Sin60^0$

$\Rightarrow \frac{AM}{21} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ AM = $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ cm

$\Rightarrow AB = 2AM \Rightarrow 21\sqrt{3}cm$

$\therefore \Delta$OAB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2}$ x AB x OM

= $\frac{1}{2}$ x $21\sqrt{3}$ x $\frac{21}{2}$ = $\frac{441\sqrt{3}}{4}cm^2$ ------------- (3)

ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 462 - $\frac{441\sqrt{3}}{4}$

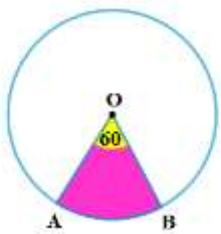
= $\frac{462x4-441\sqrt{3}}{4}$ = $\frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3})cm^2$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

[π ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ]

1. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 6 cm, ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನವು 60^0 ಆದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೋನ θ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

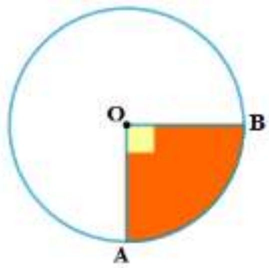


ಕೋನ 60^0 ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{60}{360^\circ} \times \pi r^2\ cm^2$

= $\frac{1}{6} \times 6x6$ x $\frac{22}{7}$

$= \frac{132}{7}$ **cm²**

2. ಪರಿಧಿಯು 22 cm ಇರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ವೃತ್ತದ ಚತುರ್ಥಕ ಭಾಗ = ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನ 90^0

ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ $C = 2\pi r = 22$ cm

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r = \frac{22}{2\pi}$ cm

$= \frac{22 x 7}{2 x 22} = \frac{7}{2}$ cm

ಕೋನ θ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

90° ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{90}{360°} \times \pi r^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} x \frac{7}{2} x \frac{7}{2} = \frac{77}{8}$ cm²

3. ಒಂದು ಗಡಿಯಾರದಲ್ಲಿ ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳಿನ ಉದ್ದವು 14 cm ಆಗಿದೆ. ಐದು ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಅದು ಕ್ರಮಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಡಿಯಾರದ ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

∴ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ (r) = 14 cm

ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳು 1 ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಸುತ್ತುವ ಕೋನ = 360°

∴ ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳು 5ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಸುತ್ತುವ ಕೋನ $= \frac{360°}{60} \times 5 = 30°$

ಕೋನ θ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

∴ಕೋನ 30^0 ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{30}{360°} \times \frac{22}{7} x 14 x 14 = \frac{1}{12} \times \frac{22}{7} x 14 x 14$

$= \frac{1}{3} \times 22 x 7 = \frac{154}{3}$ **cm²**

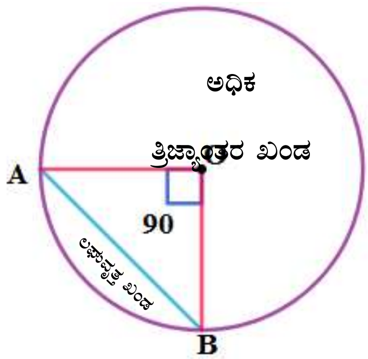
4. 10 cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ 1) ಲಘುವೃತ್ತಖಂಡ 2) ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ಬಳಸಿ).

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 10 cm

ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ = 360° - 90° = 270°

ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{270}{360°} \times \pi r^2$ cm²

$= \frac{3}{4} \times 3.14 x 10 x 10 = 75 x 3.14$ cm² = **235.5 cm²**



ಲಂಬಕೋನ ΔAOB ಯಲ್ಲಿ OA = 10 cm, OB = 10 cm

ΔAOBಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times OA \times OB$

= 1/2 ×10 × 10 = 50 cm² -------------------------- (1)

ಲಘುವೃತ್ತಖಂಡವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ = 90°

ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{90}{360°} \times \pi r^2$ cm²

$= \frac{1}{4} \times 3.14 x 10 x 10 = 25 x 3.14$ cm²

= 25 × 3.14 cm² = 78.5 cm² ---------------- (2)

ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = (2) – (1)

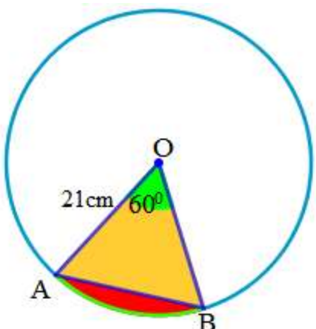
= 78.5 cm² - 50 cm² = 28.5 cm²

5. 21 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಂಸವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 60^0 ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ.

1) ಕಂಸದ ಉದ್ದ

2) ಕಂಸದಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ.

3) ಅನುರೂಪ ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 21 cm

(1) ಕಂಸದ ಉದ್ದ AB = $\frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

$= \frac{60}{360°} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$

$= \frac{1}{6} \times 2 \times 22 \times 3 = 22$ ∴ಕಂಸದ ಉದ್ದ AB 22 cm.

(2) AB ವೃತ್ತ ಕಂಸವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ = 60°

60° ಕೋನವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{60}{360°} \times \pi r^2$ cm^2

$= \frac{60}{360°} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ cm^2

$= \frac{1}{6} \times 22 \times 3 \times 21$ cm^2

$= \frac{1}{2} \times 22 \times 21$ cm^2 = 11x21 cm^2 **= 231 cm^2**

∴ 60° ಕೋನವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 231 cm^2

(3) ಸಮಬಾಹು ΔAOBಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (OA)^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (21)^2 = \frac{441\sqrt{3}}{4}$ cm^2

ಅನುರೂಪ ಜ್ಯಾವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ತಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನ – ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ΔAOBಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\left(\mathbf{231} - \frac{\mathbf{441\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}\right)$**cm^2**

6. 15 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 60^0 ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಲಘು ವೃತ್ತ ಖಂಡ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಹಾಗೂ $\sqrt{3}$ = 1.73 ಎಂದು ಬಳಸಿ).

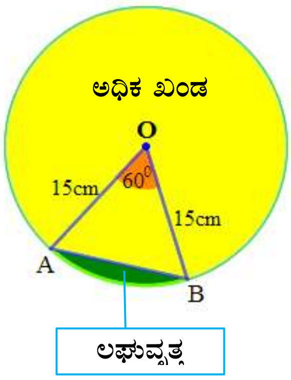
ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 15 cm

ΔAOB ಯಲ್ಲಿ ∠AOB ಮತ್ತು ∠A = ∠B = 60^0 [∵OA = OB = 15cm]

∴ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ AOB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (OA)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (15)^2$

$= \frac{225\sqrt{3}}{4}$ cm^2 = $\frac{225 \times 1.73}{4}$ cm^2 **= 97.3 cm^2**



AB ವೃತ್ತ ಕಂಸವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ = 60°

60° ಕೋನವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{60}{360°} \times \pi r^2$ cm^2

$= \frac{60}{360°} \times (3.14) \times 15 \times 15$ cm^2

$= \frac{1}{2} \times 3.14 \times 5 \times 15$ cm^2

= 1.57 x 75 cm^2**= 117.75 cm^2**

ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ= ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ΔAOBಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= 117.75 - 97.3 **= 20.4 cm^2**

ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= πr^2 - 20.4 cm^2

= 3.14 x 15x15 - 20.4 = 3.14 x 225 – 20.4

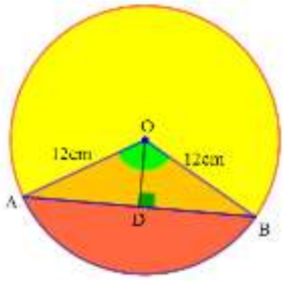
= 706.5 – 20.4 = **686.1cm^2**

7. 12 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 120^0 ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಉಂಟಾದ ಅನುರೂಪ ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಹಾಗೂ $\sqrt{3}$ = 1.73 ಎಂದು ಬಳಸಿ).

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r = 12 cm

AB ⊥ OD ಎಳೆಯಿರಿ.

⇒ OD ಯು AB ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.



$\Rightarrow \angle A = 180° - (90° + 60°) = 30°$

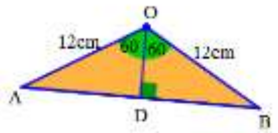
$\cos 30° = \frac{AD}{OA}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AD}{12}$

$\Rightarrow AD = 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow AB = 2 \times AD = 12\sqrt{3}$ cm

$\sin 30° = \frac{OD}{OA}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OD}{12} \Rightarrow OD = 6$ cm



ΔAOBಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times AB \times OD$

$= \frac{1}{2}$ x $12\sqrt{3}$ x 6 cm^2 $= 36\sqrt{3}$ cm $= 36 \times 1.73 =$ **62.28 cm^2**

ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ = 120°

∴ ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ= $\frac{120°}{360°} \times \pi r^2$ cm^2= $\frac{120°}{360°}$ x 3.14 x 12 x 12 cm^2 = $\frac{1}{3}$ x 3.14 x 12 x 12 cm^2

= 3.14 x 4 x 12 cm^2 = 3.14 x 48 cm^2 = **150.72 cm^2**

∴ ಲಘುವೃತ್ತ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ΔAOBಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= 150.72 cm^2 - 62.28 cm^2= **88.44 cm^2**

8. 15 m ಬಾಹುವಿರುವ ಚೌಕಾಕಾರದ ಒಂದು ಹುಲ್ಲಿನ ಮೈದಾನದ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಗೂಟಕ್ಕೆ ಕುದುರೆಯೊಂದನ್ನು 5 m ಉದ್ದದ ಹಗ್ಗದಿಂದ ಕಟ್ಟಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 11.11 ನ್ನು ನೋಡಿ)

(i) ಕುದುರೆಯು ಹುಲ್ಲನ್ನು ಮೇಯಬಹುದಾದ ಮೈದಾನದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

(ii) 5 m ಹಗ್ಗದ ಬದಲಾಗಿ 10 m ಹಗ್ಗ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಮೇಯಬಹುದಾದ ಮೈದಾನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೈದಾನದ ಬಾಹು(ಬದಿ)ಯ ಉದ್ದ = 15 m

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ(ಹಗ್ಗದ ಉದ್ದ) r = 5 m

ಕುದುರೆಯನ್ನು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಿರುವುದರಿಂದ ಅದು ವೃತ್ತದ ಚತುರ್ಥಭಾಗವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಮೇಯುತ್ತದೆ.

ಅದು ಮೇಯುವ ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 5 m.

(i) ಕುದುರೆಯು ಮೇಯುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{\pi r^2}{4} = \frac{3.14 \times 5^2}{4} = \frac{78.5}{4} =$ **19.625 m^2**

(ii) ಹಗ್ಗದ ಉದ್ದವನ್ನು 10m ಮಾಡಿದಾಗ ಕುದುರೆಯು

ಮೇಯುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $= \frac{\pi r^2}{4} = \frac{3.14 \times 10^2}{4} = \frac{314}{4}$ = **78.5 m^2**

ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಮೇಯಬಹುದಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 78.5 m^2 - 19.625 m^2 = **58.875 m^2**

ಚಿತ್ರ: 11.11

9. 35mm ವ್ಯಾಸವಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪದಕವನ್ನು ಬೆಳ್ಳಿ ತಂತಿಯಿಂದ ಮಾಡಿದೆ. ಬೆಳ್ಳಿ ತಂತಿಯ 5 ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಮನಾದ 10 ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳಾಗಿ ಚಿತ್ರ 11.12ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ.

(i) ಬೇಕಾಗುವ ಬೆಳ್ಳಿ ತಂತಿಯ ಉದ್ದ,

(ii) ಪದಕದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವ್ಯಾಸಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 5; ವ್ಯಾಸದ ಉದ್ದ = 35 mm

∴ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅಳತೆ r = 35/2 mm

(i) ಬೇಕಾದ ಬೆಳ್ಳಿ ತಂತಿಯ ಉದ್ದ

= ಪದಕದ ಸುತ್ತಳತೆ (ಪರಿಧಿ) + 5 ವ್ಯಾಸಗಳ ಉದ್ದ $= 2\pi r + (5 \times 35)$ mm

$= (2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{2}) + 175$ mm $= 110 + 175$ mm = **185 mm**

(ii) ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 10

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{\pi r^2}{10}$

Fig 11.12

$= \frac{\frac{22}{7} \times \left(\frac{35}{2}\right)^2}{10} = \frac{\frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2}}{10} = \frac{\frac{3850}{4}}{10} = \mathbf{\frac{385}{4}\ mm^2}$

10. ಒಂದು ಕೊಡೆಯು ಸಮ ಅಂತರದಲ್ಲಿ 8 ಕಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 5.13 ನ್ನು ನೋಡಿ). ಕೊಡೆಯು 45 cmತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಚಪ್ಪಟೆಯಾದ ವೃತ್ತ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಕಡ್ಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೊಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕಡ್ಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 8

ಕೊಡೆಯು ಚಪ್ಪಟೆಯಾದಾಗ ತ್ರಿಜ್ಯ = 45 cm

ಅನುಕ್ರಮ ಕಡ್ಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ= $\frac{\text{ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\text{ಕಡ್ಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$

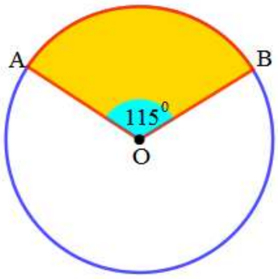
$= \frac{\pi r^2}{8} = \frac{\frac{22}{7} \times 45^2}{8}$

$= \frac{44550}{56} = \frac{22275}{28}\ cm^2$

= 795.5 cm²

Fig 5.13

11. ಒಂದು ಕಾರಿಗೆ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಅತಿಕ್ರಮಿಸದಂತಿರುವ ಎರಡು ಗಾಜೊರೆಸುವ ಉಪಕರಣಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಾಜೊರೆಸುವ ಉಪಕರಣವು 25 cm ಉದ್ದದ ಬ್ಲೇಡನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಇದು 115^0 ಕೋನದಲ್ಲಿ ಒರೆಸುತ್ತದೆ. ಬ್ಲೇಡ್‌ಗಳು ಒಂದು ಬಾರಿ ಜಾರಿದಾಗ ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಗಾಜೊರೆಸುವ ಉಪಕರಣದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನ = 115°

ಗಾಜೊರೆಸುವ ಉಪಕರಣದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 25 cm

ಗಾಜೊರೆಸುವ ಉಪಕರಣದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ

ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{115°}{360°} \times \pi r^2\ cm^2$

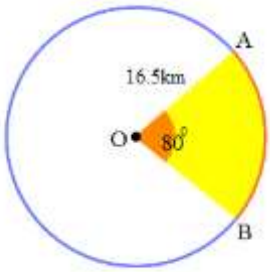
$= \frac{115°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 25 \times 25\ cm^2$

$= \frac{23}{72} \times \frac{22}{7} \times 625\ cm^2 = \frac{23}{36} \times \frac{11}{7} \times 625\ cm^2 = \frac{158125}{252}\ cm^2$

ಎರಡು ಬ್ಲೇಡ್‌ಗಳು ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸುವ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2 \times \frac{158125}{252}\ cm^2$

$= \frac{158125}{126} = \mathbf{1254.96\ cm^2}$

12. ನೀರಿನ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಬಂಡೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಎಚ್ಚರಿಸಲು ಒಂದು ದೀಪಸ್ತಂಭವು 80^0 ಕೋನವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದಲ್ಲಿ 16.5 km ದೂರಕ್ಕೆ ಕೆಂಪು ಬೆಳಕನ್ನು ಹರಡುತ್ತದೆ. ಹಡಗುಗಳನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಸುವ ಈ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ದೀಪಸ್ತಂಭವು O ನಲ್ಲಿರಲಿ.

ದೀಪ ಹರಡುವ ಬೆಳಕಿನ ದೂರವು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ. r = 16.5 km

ಆದ್ದರಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನ = 80°

ದೀಪದ ಬೆಳಕು ಹರಡುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{80°}{360°} \times \pi r^2\ km^2$

$= \frac{2}{9} \times 3.14 \times 16.5 \times 16.5 km^2$

$= \frac{2}{9} \times 3.14 \times 272.25 km^2 = \mathbf{189.97\ km^2}$

13. ಚಿತ್ರ 11.14 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಒಂದು ದುಂಡು ಮೇಜಿನ ಹೊದಿಕೆಯು ಆರು ಸಮವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಹೊದಿಕೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು 28 cm ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ರೂ 0.35 ರ ದರದಂತೆ ವಿನ್ಯಾಸ ಮಾಡಲು ತಗಲುವ ಖರ್ಚೆಷ್ಟು? ($\sqrt{3}$ = 1.7 ಎಂದು ಬಳಸಿ).

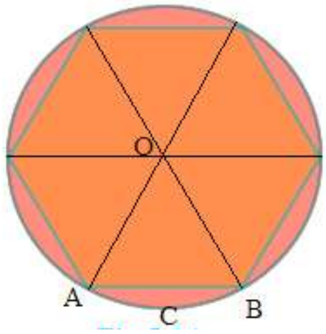
ಸಮ ವಿನ್ಯಾಸಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 6; ಮೇಜಿನ ಹೊದಿಕೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯ = 28 cm

ವಿನ್ಯಾಸದ ದರ = ರೂ 0.35 / cm²

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನದ ಅಳತೆ $= \frac{360°}{6} = 60°$

ΔAOB ಯಲ್ಲಿ OA = OB[ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು

$\therefore \angle A = \angle B = 60^0$



ಚಿತ್ರ: 11.14

∴ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ΔAOB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{\sqrt{3}}{4} x\ (OA)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} x\ (28)^2$

$= 1.7x\ 7\ x\ 28 =$ **333.2 cm^2**

ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ OACBಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{60°}{360°} \times \pi\ r^2\ cm^2$

$= \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} x\ 28^2\ cm^2 = \frac{1}{6} \times 22x\ 4x28\ cm^2$

$= \frac{1}{3} \times 22x\ 2x28\ cm^2 =$ **410.67cm^2**

ವಿನ್ಯಾಸದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ OACBಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - ತ್ರಿಭುಜ ΔAOB ಯ ವಿಸ್ತೀ

$= 410.67\ cm^2 - 333.2\ cm^2 = 77.47\ cm^2$

∴ 6 ವಿನ್ಯಾಸಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 6 \times 77.47\ cm^2 =$ **464.82 cm^2**

∴ ವಿನ್ಯಾಸ ಮಾಡಲು ತಗಲುವ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು $= 464.76\ cm^2 \times$ ರೂ $0.35\ /cm^2$ **= ರೂ 162.68**

14. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಗುರುತು ಹಾಕಿ:

R ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ p (ಡಿಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿ) ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು,

A) $\frac{P}{180} x\ 2\pi r$ B) $\frac{P}{180} x\ 2\pi r^2$ C) $\frac{P}{360} x\ 2\pi R$ D) $\frac{P}{720} x\ 2\pi R^2$

p ಕೋನ ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{p°}{360°} \times \pi\ R^2\ cm^2$

$\frac{p}{360°} \times \pi\ R^2\ x\ \frac{2}{2} = \frac{P}{720} x\ 2\pi R^2$

ಆದ್ದರಿಂದ ಉತ್ತರ **(D) $\frac{P}{720} x\ 2\pi R^2$**

****

12 ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು

ಕಲಿಕಾಂಶಗಳು:

1. ಸಿಲಿಂಡರ್, ಶಂಕು,ಗೋಳ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು
2. ಸಿಲಿಂಡರ್, ಶಂಕು,ಗೋಳ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು
3. ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಜೋಡಣೆಯಿಂದ ಉಂಟಾದ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ನೀರು ಅಥವಾ ತೈಲವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಳದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹೋಗುವ ಲಾರಿಯ ಹಿಂಬದಿಯಲ್ಲಿನ ಸಂಗ್ರಹಕವನ್ನು ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್, ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರವನ್ನು ಅದರ ಎರಡು ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿ ಮಾಡಿದೆ ಎಂದು ನೀವು ಊಹಿಸಬಹುದು.
ವಿಜ್ಞಾನ ಪ್ರಯೋಗಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯು ಸಹ ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಮಾಡಿದೆ.

12.2 ಜೋಡಿಸಿದ ಘನಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಸಂಗ್ರಹಕ, ಪ್ರಣಾಳ ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಅಥವಾ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಇಲ್ಲವೆ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.
ಅಂದರೆ
ಸಂಗ್ರಹಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
ಪ್ರಣಾಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಉದಾಹರಣೆ 1: ರಶೀದನು ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬದ ಉಡುಗೊರೆಯಾಗಿ ಒಂದು ಬುಗುರಿಯನ್ನು ಪಡೆದನು. ಬುಗುರಿಯ ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬಣ್ಣ ಇರಲಿಲ್ಲ. ಅವನ ಬಳಿ ಇರುವ ಬಣ್ಣದ ಕಡ್ಡಿ (crayons) ಗಳಿಂದ ಬಣ್ಣ ಬಳಿಯಲು ಬಯಸಿದ್ದಾನೆ. ಬುಗುರಿಯು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಇರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.6 ನೋಡಿ). ಬುಗುರಿಯ ಸಂಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರವು 5 cm ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು 3.5 cm ಇದ್ದರೆ, ಅವನು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ =ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಪರಿಹಾರ:

ಆಟಿಕೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಶಂಕುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

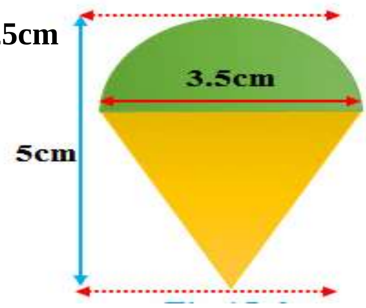
ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $2\pi r^2 = \left(2x\ \frac{22}{7}\ x\ \frac{3.5}{2}\ x\ \frac{3.5}{2}\right) cm^2$

ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ = ಬುಗುರಿಯ ಎತ್ತರ – ಅರ್ಧಗೋಳದ ಎತ್ತರ (ತ್ರಿಜ್ಯ) $= 5 - 1.75 = \mathbf{3.25cm}$

ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ $(l) = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(1.75)^2 + (3.25)^2} \approx \mathbf{3.7cm}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi\ rl$

$= \left(\frac{22}{7}\ x\ \frac{3.5}{2}\ x\ 3.7\right) cm^2$



$\therefore$ ಬುಗುರಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \left(2x\ \frac{22}{7}\ x\ \frac{3.5}{2}\ x\ \frac{3.5}{2}\right) + \left(\frac{22}{7}\ x\ \frac{3.5}{2}\ x\ 3.7\right)$

$= \frac{22}{7}\ x\ \frac{3.5}{2}(3.5 + 3.7) = 11\ x\ 0.5(3.5 + 3.7)$

$= 5.5\ x\ 7.2 = \mathbf{39.6cm^2}$

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಚಿತ್ರ 12.7 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಅಲಂಕಾರಿಕ ವಸ್ತುವು ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳ ಈ ಎರಡು ಘನಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದೆ. ವಸ್ತುವಿನ ಪಾದವು 5 cm ಬಾಹುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲೆ 4.2 cm ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಇರಿಸಿದೆ. ವಸ್ತುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ =ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಪರಿಹಾರ: ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= 6 x (ಬಾಹು)^2 = = $6 \times 5 \times 5 = 150$ cm^2

ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ– ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

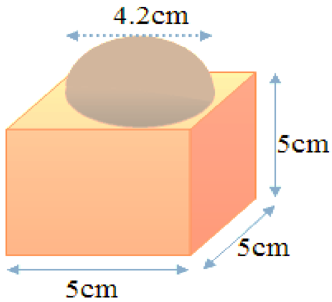
$= (150 - \pi r^2 + 2\pi r^2)\text{cm}^2$

$= (150 + \pi r^2)\text{cm}^2$

$= (150 + \frac{22}{7} \text{ x } 2.1 \text{ x } 2.1)\text{cm}^2$

$= (150 + 13.86)\text{cm}^2$

$= 163.86\text{cm}^2$



ಚಿತ್ರ:12.7

ಉದಾಹರಣೆ 3: . ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಮೇಲೆ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದವನ್ನು ಇರಿಸಿ, ಒಂದು ಮರದ ಆಟಿಕೆಯ ರಾಕೆಟ್‌ಅನ್ನು ಚಿತ್ರ 12.8 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಾಡಿದೆ. ರಾಕೆಟ್‌ನ ಸಂಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರವು 26 cm ಹಾಗೆಯೇ, ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಭಾಗದ ಎತ್ತರವು 6cm ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 5 cm. ಹಾಗೆಯೇ, ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 3 cm ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಭಾಗವನ್ನು ಕಿತ್ತಳೆ ಬಣ್ಣ ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಭಾಗವನ್ನು ಹಳದಿ ಬಣ್ಣವನ್ನು ಹಚ್ಚಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಿದ ರಾಕೆಟ್‌ನಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(π = 3.14 ಎಂದು ಬಳಸಿ).

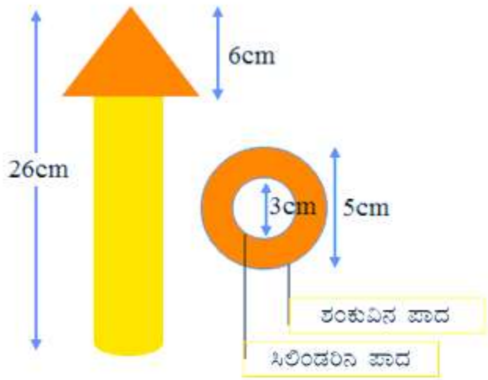
ಪರಿಹಾರ: ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು r ಎಂದು, ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ l ಎಂದು, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ h ಎಂದು, ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ r' ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ h' ಆಗಿರ

ಆಗ $r = 2.5$ cm, $h = 6$ cm, $r^1 = 1.5$ cm, $h^1 = 26 - 6 = 20$ cm

ಮತ್ತು $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= l = \sqrt{2.5^2 + 6^2}$ **= 6.5cm**

ಇಲ್ಲಿ, ಶಂಕುವಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದವು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. ಆದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದವು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಒಂದು ಭಾಗಕ್ಕೆ (ಉಂಗುರ) ಮಾತ್ರ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ:12.8

ಕಿತ್ತಳೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚ ಬೇಕಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \pi r l + \pi r^2 - \pi(r^1)^2$

$= \pi [(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2]$ cm^2

$= \pi [20.25]$ cm^2

$= 3.14 \times 20.25$ cm^2 = **63.585 cm^2**

ಹಳದಿ ಬಣ್ಣ ಬಳೆಯಬೇಕಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಂದು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

$= 2\pi r^1 h^1 + \pi(r^1)^2$

$= \pi r^1 (2h^1 + r^1)$

$= (3.14 \times 1.5)(2 \times 20 + 1.5)$ cm^2

$= 4.71 \times 41.5$ cm^2 = **195.465 cm^2**

ಉ[illegible]
ಮೇಲ್ಭಾಗದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದಲ್ಲಿ ತಗ್ಗಾಗುವಂತೆ, ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಚಿತ್ರ 12.9 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಿರ್ಮಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ 1.45 m ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 30 cm ಇದೆ. ಈ ಸಾಧನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ =ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಪರಿಹಾರ: ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ `h' ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದ್ದು, ಅದು `r' ಎಂದಿರಲಿ. ನಂತರ, ಈ ಸಾಧನದ

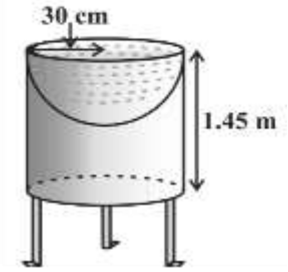
ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\,(h + r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30\,(145 + 30)\ cm^2 = 33000\ cm^2 =$ **$3.3m^2$**



ಚಿತ್ರ:12.

ಅಭ್ಯಾಸ 15.1

(π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

1. $64\ cm^3$ ಘನಫಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 2 ವರ್ಗ ಘನಗಳ ಮುಖಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿ ಮಾಡಿದೆ. ಈ ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಗಳ ಘನಫಲ = 64ಸೆಂ.ಮೀ^{2}

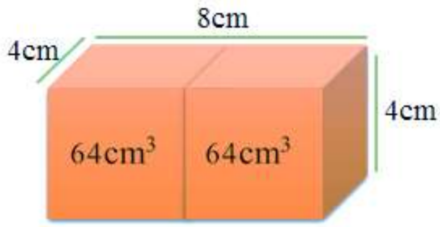
ಆದ್ದರಿಂದ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ = 4ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯತ ಘನದ ಉದ್ದ l = 4+4 = 8 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಗಲ b = 4ಸೆಂ.ಮೀ.ಮತ್ತು ಎತ್ತರ h = 4ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆಯತ ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 2(lb+bh+hl)

= 2(8x4+4x4+4x8)= 2(32+16+32) = 2(80) = **$160\ cm^2$**



2. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯ ಆಕಾರವು ಟೊಳ್ಳಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಂದು ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಟೊಳ್ಳಾದ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮಾಡಿದೆ. ಅರ್ಧಗೋಳದ ವ್ಯಾಸವು 14 cm ಮತ್ತು ಪಾತ್ರೆಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು 13 cm ಇದೆ. ಈ ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =

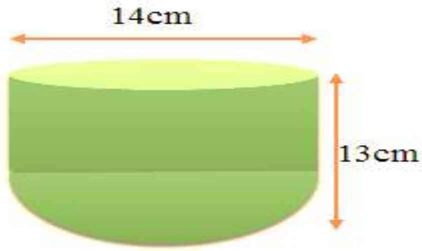
ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ+ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಒಳಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$\pi = \frac{22}{7}$; $r = \frac{14}{2} = 7cm$;

ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ $h = 13 - 7 = 6cm$

$= 2x\,\frac{22}{7}\,x\,7x\,6 + 2x\frac{22}{7}\,x\,7x\,7 = 2x\,22x\,6 + 2x22\,x\,7 = 264 + 308 =$ **$572cm^2$**



3. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲೆ ಅದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಶಂಕುವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಒಂದು ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಅವೆರಡರ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 3.5 cm ಆಗಿದೆ. ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು 15.5 cm ಆದರೆ ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \pi rl + 2\pi r^2$

$\pi = \frac{22}{7}$; $r = 3.5$; $h = 15.5 - 3.5 = 12cm$

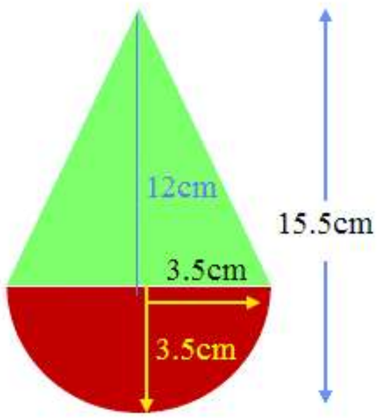
$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 3.5^2} = \sqrt{144 + 12.25}$

$l = \sqrt{156.25} =$ **12.5cm**

ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{22}{7}\,x\,3.5\,x\,12.5 + 2x\,\frac{22}{7}x3.5^2$

$= 22\ x\ 0.5\ x\ 12.5 + 2x\ 22x0.5x3.5$

$= 11\ x\ 12.5 + 11x7 = 11\ x\ 19.5 =$ **$214.5cm^2$**



4. ಪ್ರತಿ ಅಂಚು 7 cm ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲ್ಮುಖದ ಮೇಲೆ ಅರ್ಧಗೋಳವು ಇರಿಸಿದೆ. ಅರ್ಧಗೋಳದ ಗರಿಷ್ಠ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ? ಈ ಪೂರ್ಣ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅರ್ಧಗೋಳದ ಗರಿಷ್ಠ ವ್ಯಾಸ = ವರ್ಗಾಕೃತಿಯ ಬಾಹು = 7ಸೆಂ.ಮೀ.

ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ವರ್ಗಘನದ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

– ಅರ್ಧಗೋಳದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 6a^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2$

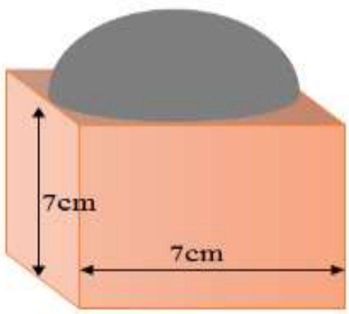
$= 6x7^2 + 2 x \frac{22}{7} x \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{22}{7} x \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$= 6x49 + 11x7 - 11 x \frac{7}{2}$

$= 294 + 77 - 11 x \frac{7}{2}$

$= 371 – 38.5$

$= 332.5cm^2$



5. ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮರದ ವಸ್ತುವಿನ ಒಂದು ಮುಖದ ಒಳಭಾಗವು ತಗ್ಗಾಗುವಂತೆ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಕೊರೆಯಲಾಗಿದೆ. ವರ್ಗ ಘನದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದವು ಅರ್ಧಗೋಳದ ವ್ಯಾಸ *l* ಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ನೂತನವಾಗಿ ಉಂಟಾದ ಘನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ವರ್ಗಾಘನದ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ

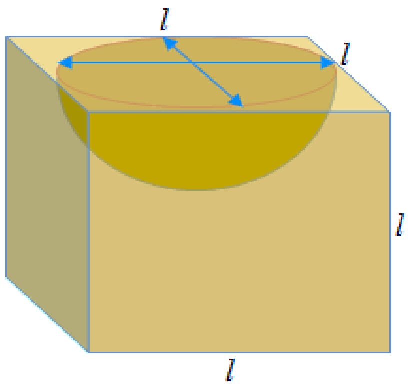
– ಅರ್ಧಗೋಳದ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 6l^2 + 2 \pi r^2 - \pi r^2$

$= 6l^2 + 2 \pi \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{l}{2}\right)^2$

$= 6l^2 + 2 \pi \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{l}{2}\right)^2$

$= 6l^2 + \pi \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4} (24 + \pi)$



6. ಒಂದು ಔಷದದ ಕ್ಯಾಪ್ಸುಲ್‌ನ ಆಕಾರವು ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪ್ರತಿ ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಅಂಟಿಸಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 12.10 ನೋಡಿ). ಕ್ಯಾಪ್ಸುಲ್‌ನ ಸಂಪೂರ್ಣ ಉದ್ದವು 14 mm ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯಾಸವು 5 mm ಇದೆ. ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕ್ಯಾಪ್ಸೂಲ್‌ನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =

2ಅರ್ಧಗೋಳಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ರೀರ್ಣ

$2(2\pi r^2) + 2\pi rh$

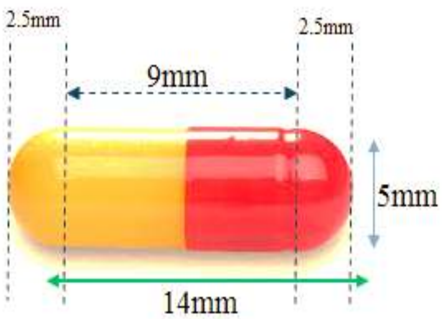
$\pi = \frac{22}{7}$; $r = 2.5mm$; $h = 9mm$

$= 2(2\pi r^2) + 2\pi rh$

$= 2\pi r(2r + h)$

$= 2x \frac{22}{7} x \frac{5}{2}(2x2.5 + 9) = \frac{110}{7}(14) = 110 x 2$

$= 220mm^2$



ಚಿತ್ರ:12.10

7. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದವನ್ನು ಶಂಕುವು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆವರಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಡೇರೆಯು ಇದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು 2.1 m ಮತ್ತು 4 m ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇದೆ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ 2.8 m ಆದರೆ, ಡೇರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬಳಸಿದ ತಾಡಪತ್ರಿ (canvas) ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹಾಗೆಯೇ, ತಾಡಪತ್ರಿಯ ದರವು ರೂ 500 ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ಆದರೆ, ತಾಡಪತ್ರಿಯನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಬೇಕಾಗುವ ಹಣವೆಷ್ಟು? (ಡೇರೆಯ ಪಾದವನ್ನು ತಾಡಪತ್ರಿಯಿಂದ ಹಾಸಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).

ತಾಡಪತ್ರಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi rh + \pi rl = \pi r(2h + l)$

$\pi = \frac{22}{7}$; r = $2m$; h = 2.1m ; l = 2.8m

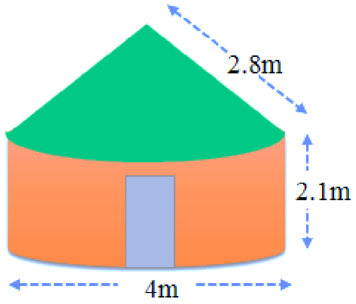
$= \frac{22}{7}$ x 2(2x2.1 + 2.8)

$= \frac{44}{7}$ x 7 (2x0.3 + 0.4)

= 44 (0.6 + 0.4) = 44m^2

ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ರೂ 500 ರಂತೆ 44 ಚದರ ಮೀಟರಿಗೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ

= 44x500 = **22000ರೂಗಳು.**



8. ಒಂದು ಘನ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ 2.4 m ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ 1.4 m ಇದೆ. ಇದರಿಂದ ಒಂದೇ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಹಳ್ಳವನ್ನು ಕೊರೆದು ಟೊಳ್ಳಗಿಸಿದೆ. ನೂತನ ಘನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದ ಬೆಲೆಗೆ cm^2 ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಶಂಕುವಿನ ಒಳಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ

– ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi r(r + h) + \pi rl - \pi r^2$

$\pi = \frac{22}{7}$; r = 0.7m ; h = 2.4m

$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{2.4^2 + 0.7^2} = \sqrt{5.76 + 0.49} = \sqrt{6.25}$ = **2.5m**

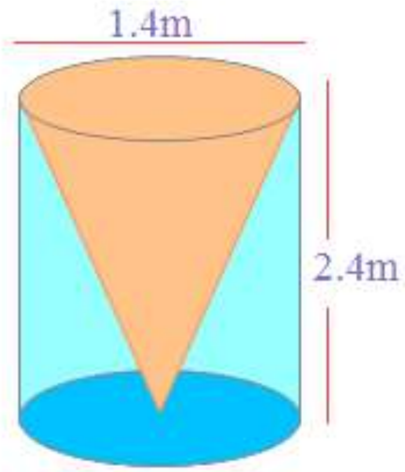
$= 2x\frac{22}{7}x0.7(0.7 + 2.4) + \frac{22}{7}x\ 0.7x2.5 - \frac{22}{7}x0.7x0.7$

= 2x22x0.1(3.1) + 22x 0.1x2.5 − 22x0.1x0.7

= 4.4(3.1) + 2.2x2.5 − 2.2x0.7

= 13.64 + 5.5 − 1.54 = 13.64 + 5.5 − 1.54

= 17.6m^2 ≈ **18m^2**



9. ಮರದಿಂದ ಮಾಡಿದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎರಡು ವೃತ್ತಕಾರದ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಚಿತ್ರ 12.11 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕೊರೆದು ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ 10 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 cm ಆದರೆ, ವಸ್ತುವಿನ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಸ್ತುವಿನ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸಿಲಿಂಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + 2ಅರ್ಧಗೋಳಗಳ ಒಳ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi rh + 2x2\pi r^2$

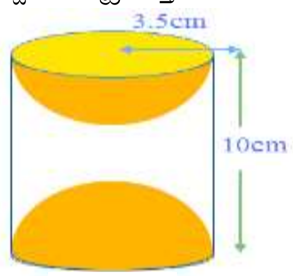
$\pi = \frac{22}{7}$; r = 3.5cm ; h = 10m

$= 2\pi r(h + 2r)$

$= 2x\ \frac{22}{7}$ x 3.5 (10 + 2x3.5)= 2x 22 x 0.5 (10 + 7)

= 22 (17)= 22 (17)

= **374cm^2**



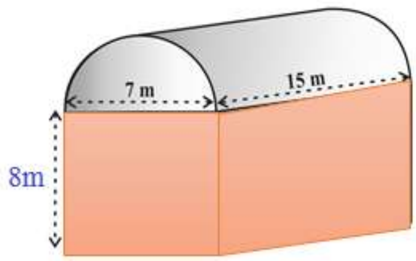
ಚಿತ:12.

15.3 ಜೋಡಿಸಿದ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲ

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಶಾಂತ ಅವರು ಜೋಪಡಿ (shed)ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೈಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ನೆಡೆಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಜೋಪಡಿಯ ಆಕಾರವು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಯು ಅರ್ಧ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಿಂದ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆವರಿಸಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 12.12 ನೋಡಿ). ಜೋಪಾಡಿಯ ಪಾದದ ಅಳತೆಯು 7 m × 15 m ಮತ್ತು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ 8 m ಆದರೆ ಜೋಪಾಡಿಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮುಂದುವರೆದು, ಜೋಪಾಡಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ಯಂತ್ರಗಳ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲವು 300

m^3 ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿನ 20 ಕೆಲಸಗಾರರು, ಪ್ರತಿ ಕೆಲಸಗಾರರು ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ 0.08 m^3 ಅವಕಾಶವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, ನಂತರ ಜೋಪಡಿಯಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ ಗಾಳಿ ಎಷ್ಟು? ($\pi = \frac{22}{7}$ =ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಪರಿಹಾರ: ಜೋಪಡಿನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲವು (ಜೋಪಡಿಯಲ್ಲಿನ ಯಂತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಕೆಲಸಗಾರರು ಇರದೇ ಇದ್ದಾಗ) ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ ಮತ್ತು ಅರ್ಧ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಳಭಾಗದ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ, ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 15 m, 7 m ಮತ್ತು 8 m ಆಗಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಅರ್ಧ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವ್ಯಾಸವು 7 m ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರ 15 m ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ;12.12

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆಪೇಕ್ಷಿತ ಘನಫಲ

= ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಘನಫಲ+ $\frac{1}{2}$ x ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ

$= \left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15\right] m^3$ = **1128.75 m^3**

ನಂತರ, ಯಂತ್ರಗಳಿಂದ ಆವರಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲ = 300 m^3

ಕೆಲಸಗಾರರಿಂದ ಆವರಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಅವಕಾಶ = $20 \times 0.08\ m^3$ = **$1.6 m^3$**

ಆದ್ದರಿಂದ, ಯಂತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಕೆಲಸಗಾರರು ಇದ್ದಾಗ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲ

= 1128.86 - (300.00 + 1.60) = **827.15 m^3**

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಚಿತ್ರ 15.13 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಹಣ್ಣಿನ ರಸದ ವ್ಯಾಪಾರಿಯುಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ ಗಾಜಿನ ಲೋಟದಲ್ಲಿ ಹಣ್ಣಿನ ರಸವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಒಳ ವ್ಯಾಸವು 5 cm ಇದೆ. ಆದರೆ ಲೋಟದ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿಅರ್ಧಗೋಳದಷ್ಟು ಎತ್ತರಿಸಿದ ಭಾಗವು ಇದ್ದು, ಇದು ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಎತ್ತರವು 10 cm ಆದರೆ ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಾಣುವ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಮತ್ತು ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ :

ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಒಳ ವ್ಯಾಸ = 5 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ = 10 cm

ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಾಣುವ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ = $\pi r^2 h$

$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10\ cm^3$= **196.25 cm^3**

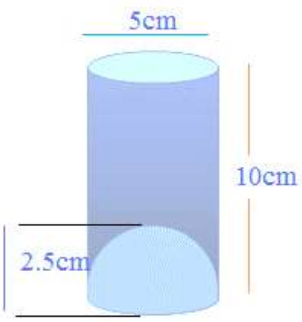


Fig 12.13

ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವು ಲೋಟದ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲದಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, ಕಡಿಮೆಯಾಗುವ ಗಾತ್ರ = $\frac{2}{3}\pi r^3$

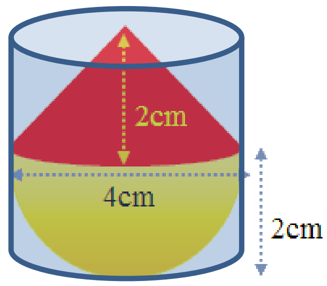
$= \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5$ = **32.71 cm^3**

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ

= ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಾಣುವ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ – ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ = (196.25 - 32.71)=**163.54 cm^3**

ಉದಾಹರಣೆ 7:ಒಂದು ಘನ ಆಟಿಕೆಯ ಅರ್ಧಗೋಳದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ನೇರ ಶಂಕುವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಇರಿಸಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 2 cm ಮತ್ತು ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 4 cm ಇದೆ. ಆಟಿಕೆಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಆವೃತಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಘನಫಲದ ನಡುವಿನವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಪರಿಹಾರ :



ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ = $\pi r^2 h$

ದತ್ತಾಂಶಗಳು:

ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ h = ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ + ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ = 2+2 = 4ಸೆಂ.ಮೀ.

$\pi = 3.14$; ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ = ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ = ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ = 2ಸೆಂ.ಮೀ.

$= 3.14 \times 2 \times 2 \times 4 = 3.14 \times 16 = 50.24 cm^3$

ಆಟಿಕೆಯ ಘನಫಲ = $\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi r^2[2r + h] = \frac{1}{3}$x 3.14x $2^2[4 + 2]$

$= \frac{1}{3}$x 3.14x 4[6]= $\frac{1}{3}$x 3.14x 4[6] = **25.12cm³**

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾದ ಘನಫಲದಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = 50.24 - 25.12 cm^3 = **25.12cm³**

ಅಭ್ಯಾಸ 15.2

1. ಒಂದು ಘನದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆವರಿಸುವಂತೆ ಶಂಕುವು ನಿಂತಿದೆ. ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 1 cm ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಈ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು π ಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ.

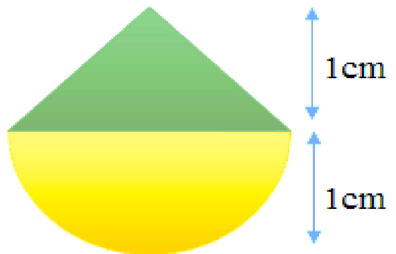
ಘನಫಲ = ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ

ಘನಫಲ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$

ಇಲ್ಲಿ, π = $\frac{22}{7}$; h = 1cm; r = 1cm

ಘನಫಲ = $\frac{1}{3}\pi$ x 1 x 1 + $\frac{2}{3}\pi$ x 1 x1 x1

$= \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{3}{3}\pi$ = **π cm³**



2. ರೇಚಲ್ ಒಬ್ಬ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿ. ಅವರು ತೆಳುವಾದ ಅಲ್ಯುಮಿನಿಯಂ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎರಡು ವೃತ್ತ ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಶಂಕುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಮಾದರಿಯನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಮಾದರಿಯ ವ್ಯಾಸವು 3 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಒಟ್ಟಾರೆ ಉದ್ದವು 12 cm ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವು 2 cm ಆದರೆ ರೆಚೇಲ್ ಮಾಡಿದ ಈ ಮಾದರಿಯೊಳಗಿನ ಗಾಳಿಯಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಮಾದರಿಯ ಹೊರ ಹಾಗೂ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ಅಳತೆಗಳು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ)

ಯಂತ್ರದೊಳಗಿನ ಗಾಳಿಯ ಗಾತ್ರ = 2ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ + ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ

$= 2\text{x}\frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2$

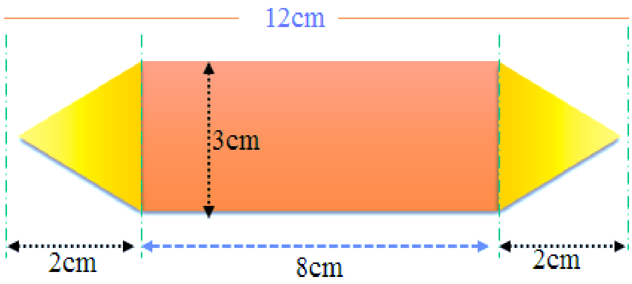
ಇಲ್ಲಿ, ಇಲ್ಲಿ, π = $\frac{22}{7}$; r = 1.5cm; h_1 = 2cm; h_2 = 8cm

$= 2\text{x}\frac{1}{3}\text{x}\frac{22}{7}\text{x}(1.5)^2\text{x}\,2 + \frac{22}{7}\text{x}(1.5)^2 8$

$= \frac{44}{21}$ x 2.25x2 + $\frac{22}{7}$x 2.25x8

$= \frac{44}{21}$ x 4.5 + $\frac{22}{7}$x 18

$= \frac{198}{21} + \frac{396}{7} = \frac{198}{21} + \frac{1188}{21} = \frac{1386}{21}$ = **66cm³**



3. ಒಂದು ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮೂನ್‌ನಲ್ಲಿ ಅದರ ಘನಫಲದ ಶೇ 30 ರಷ್ಟು ಸಕ್ಕರೆಯ ಪಾಕವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮುನು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದ್ದು, ಅದರ ಎರಡು ಅಂತ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳಗಳಿವೆ. ಗುಲಾಬ್ ಜಾಮುನಿನ ಒಟ್ಟಾರೆ ಉದ್ದ 5cm ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು 2.8cm ಆದರೆ, 45 ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮುನ್‌ನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಕ್ಕರೆ ಪಾಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 12.15 ನೋಡಿ).

ಜಾಮೂನಿನ ಘನಫಲ = 2ಅರ್ಧಗೋಳಗಳ ಘನಫಲ + ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ

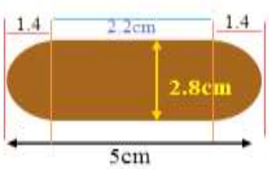
$= 2\text{x}\,\frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$

ಇಲ್ಲಿ, ಇಲ್ಲಿ, π = $\frac{22}{7}$; r = 1.4cm; h = 2.2cm;

$= 2\text{x}\,\frac{2}{3}\text{x}\frac{22}{7}$x 1.4 x 1.4 x 1.4 + $\frac{22}{7}$ x 1.4 x1.4 x 2.2

$= 4\text{x}\frac{22}{3}$x 0.2 x 1.4x1.4 + 22 x 0.2 x1.4 x 2.2

$= \frac{34.496}{3}$ + 13.552 = 11.5 + 13.552 = **25.05 cm³**



ಚಿತ್ರ:12.15

ಆದ್ದರಿಂದ ಜಮೂನಿನಲ್ಲಿರು ಸಕ್ಕರೆಯ ಪ್ರಮಾಣ =25.05 x $\frac{30}{100}$ = **6.53cm³**

ಆದ್ದರಿಂದ 45 ಜಾಮೂನಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಕ್ಕರೆಯ ಪ್ರಮಾಣ = 7.515x 45 = 338.175cm^3 ≈ **338cm³**

4. ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದ ಮರದ ಲೇಖನಿಧಾರಕ (Pen stand)ದಲ್ಲಿ ಲೇಖನಿಗಳನ್ನು ಇಡಲು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ನಾಲ್ಕು ತಗ್ಗುಗಳನ್ನು ಕೊರೆದಿದೆ. ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಅಳತೆಯು 15cm × 10 cm × 3.5 cm ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಹಳ್ಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 0.5cm ಮತ್ತು ಆಳವು 1.4cm ಇದೆ. ಲೇಖನಿಧಾರಕದಲ್ಲಿನ ಮರದ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 15.16 ನೋಡಿ).

ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ತಗ್ಗುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯ r = 0.5cm, ಆಳ h_1 = 1.4 cm

ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ದ l = 15cm ಅಗಲ b = 10cm ಎತ್ತರ h = 3.5cm

4 (ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ತಗ್ಗಿನ ಘನಫಲ) = $4\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h_1\right)$

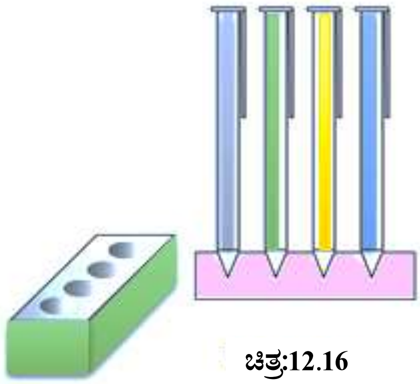
$= 4\left(\frac{1}{3} \text{x} \frac{22}{7} \text{x } 0.5 \text{ x}0.5 \text{ x}1.4\right) = 4\left(\frac{1}{3}\text{x}22\text{x } 0.5 \text{ x}0.5 \text{ x } 0.2\right)$

$= 4\left(\frac{1}{3}\text{x}22\text{x } 0.5 \text{ x}0.5 \text{ x } 0.2\right) =$ **1.47cm^3**

ಲೇಖನಿಧಾರಕ ಮರದ ಗಾತ್ರ

= ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಗಾತ್ರ – 4 (ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ತಗ್ಗಿನ ಘನಫಲ)

= 15x10x3.5 – 1.47= 525 – 1.47 = **523.53cm^3**



ಚಿತ್ರ:12.16

5. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯು ತಲೆಕೆಳಗಾದ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಎತ್ತರ 8 cm ಮತ್ತು ತೆರೆದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 5cm ಇದೆ. ಅದರ ಅಂಚಿನವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ 0.5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಸೀಸದ ಗೋಳಗಳನ್ನು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದಾಗ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಒಂದು ಭಾಗದಷ್ಟು ನೀರು ಹೊರ ಚಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದ ಸೀಸದ ಗೋಳಗಳೆಷ್ಟು?

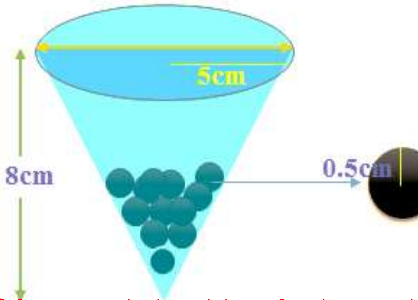
ಸೀಸದ ಗೋಲಿಯ ಗಾತ್ರ = $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \text{ x } \frac{22}{7} \text{ x } \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{2} = \frac{11}{21}\text{ cm}^3$

ಶಂಕುವಿನಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಗಾತ್ರ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \text{x} \frac{22}{7} \text{x } 5^2 \text{x } 8 = \frac{4400}{21}\text{ cm}^3$

ಹೊರಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣ = $\frac{4400}{21} \text{x } \frac{1}{4} = \frac{1100}{21}\text{cm}^3$

∴ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $\frac{\text{ಹೊರಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣ}}{\text{ಗೋಲಿಯ ಗಾತ್ರ}} = \frac{\frac{1100}{21}}{\frac{11}{21}} =$ **100**



6. ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣದ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವು 220cm ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 24cm ಆಗಿರುವ ಘನ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಇದರ ಮೇಲೆ 60cm ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 8cm ಇರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. 1cm^3 ಕಬ್ಬಿಣದ ಸರಿಸುಮಾರು ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು 8g ಆದರೆ ಕಂಬದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

r_1 = 8cm; $r_2 = \frac{24}{2}$ = 12cm; h_1 = 60cm; h_2 = 220cm

ಕಂಬದ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲ = ದೊಡ್ಡ ಕಂಬದ ಗಾತ್ರ + ಚಿಕ್ಕ ಕಂಬದ ಗಾತ್ರ

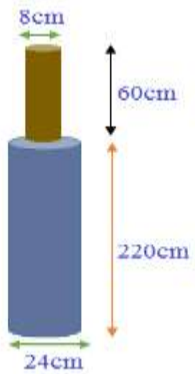
$= \pi r_2^2 h_2 + \pi r_1^2 h_1$

= 3.14 x 12 x 12 x 220 + 3.14 x 8 x 8 x 60

= 99475.2 + 12057.6= 111532.8cm^3

1cm^3 ಕಬ್ಬಿಣದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ = 8g

∴ ಕಂಬದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ = 111532.8 x 8 = 892262.4 g= 892.26kg



7. 60cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ 120 cm ಎತ್ತರ ಮತ್ತು 60cm ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಶಂಕುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೀರಿನಿಂದ ತುಂಬಿದ ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿ ತಳವನ್ನು ಮುಟ್ಟುವಂತೆ ನೇರವಾಗಿ ಈ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಮುಳುಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವು 60 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 180cm ಆದರೆ ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿದಿರುವ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

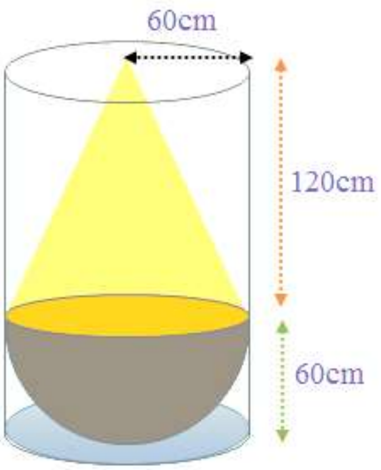
ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ r = 60cm; ಎತ್ತರ h = 180cm

ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎತ್ತರ $h_1 = 120cm$

ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ = $\pi r^2 h$ = $\frac{22}{7}$x 60 x 60 x 180 = **2036571.43cm^3**

ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h_1$ = $\frac{22}{7}$ x 20 x 60 x 120 = **452571. 43cm^3**

ಅರ್ಧಗೋಲದ ಘನಫಲ = $\frac{2}{3}\pi r^3$= $\frac{2}{3}$ x $\frac{22}{7}$ x 60 x60 x60 = **4525571.43cm^3**



∴ ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿದಿರುವ ನೀರು

= 2036571.43 – (452571.43 + 452571.43)
= 2036571.43 – 905142.86
= 1131428.57cm^3 = **1.131m^3**

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ

ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿದಿರುವ ನೀರು = $\left[\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{2}{3}\pi r^3\right]$

= $\pi r^2 \left[h - \frac{1}{3}h_1 + \frac{2}{3}r\right]$

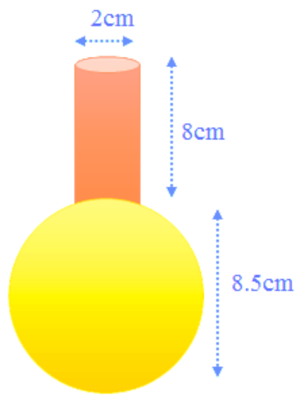
= $\frac{22}{7}$x 60x60 $\left[180 - \frac{1}{3}\text{x}120 + \frac{2}{3}\text{x}60\right]$

= $\frac{22}{7}$x 60x60$[180 - (40 + 40)]$

=$\frac{22}{7}$x 60x60x 100 = 1131428.57cm^3 = **1.131m^3**

8. **8.5cm ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಗಾಜಿನ ಪಾತ್ರೆಯು 8cm ಉದ್ದ ಮತ್ತು 2cm ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಆಕಾರದ ಕೊರಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಒಂದು ಮಗುವು ಅದರಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ನೀರಿನ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಅದರ ಘನಫಲವು 345 cm^3 ಇದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾಳೆ. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳು ಅದರ ಒಳಭಾಗದ ಅಳತೆಗಳು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಅವಳ ಉತ್ತರವು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)**

ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ h = 8cm; ತ್ರಿಜ್ಯ $r_1 = \frac{2}{2} = 1$cm



ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r_2 = \frac{8.5}{2}$ cm

ಪಾತ್ರೆಯ ಘನಫಲ = ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ + ಗೋಳದ ಘನಫಲ

= $\pi r_1{}^2 h + \frac{4}{3}\pi r_2^3$

= 3.14x1^2x 8 + $\frac{4}{3}$x3.14x $\left(\frac{8.5}{2}\right)^3$

= 25.12 + $\frac{11}{21}$x 8.5x8.5x8.5

= 25.12 + 321.39 = **346.51cm^3**

ಅವಳ ಉತ್ತರವು ಸ್ವಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

****

13 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

ಕಲಿಕಾಂಶಗಳು:

1. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನೇರವಿಧಾನ, ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಹಂತವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
2. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಬಹುಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು
3. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

13.2 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿ

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ [$i = 1$ to n]

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10ನೇ ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 100 ಅಂಕಗಳ ಗಣಿತ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x_i	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
f_i	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

ಪರಿಹಾರ:

x_i	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95	
f_i	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1	$\sum f_i = 30$
$x_i f_i$	10	20	108	160	150	112	240	280	72	80	176	276	96	$\sum x_i f_i = 1779$

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.53$

ವರ್ಗಾಂತರ	10–25	25–40	40–55	55–70	70–85	85–100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	7	6	6	6

ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ "ನೇರ ವಿಧಾನ"

ವರ್ಗಾಂತರ	f_i	x_i	$f_i x_i$
10–25	2	17.5	35.0
25–40	3	32.5	97.5
40–55	7	47.5	332.5
55–70	6	62.5	375.0
70–85	6	77.5	465.0
85–100	6	92.5	555.0
$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860$	

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30} = 62$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ

ವರ್ಗಾಂತರ	f_i	x_i	d_i	$f_i d_i$
10–25	2	17.5	–30	–60
25–40	3	32.5	–15	–45
40–55	7	47.5	0	0
55–70	6	62.5	15	90
70–85	6	77.5	30	182
85–100	6	92.5	45	270
$\sum f_i = 30$		$\sum f_i d_i = 435$		

$d_i = x_i - a$ [ಇಲ್ಲಿ $a = 47.5$

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$= 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ

ವರ್ಗಾಂತರ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	ಮಧ್ಯಬಿಂದು (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 47.5}{15}$	$f_i u_i$
10-25	2	17.5	-2	-4
25-40	3	32.5	-1	-3
40-55	7	47.5	0	0
55-70	6	62.5	1	6
70-85	6	77.5	2	12
85-100	6	92.5	3	18
	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i u_i = 29$

$\overline{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h = 47.5 + \frac{29}{30} \times 15 = 47.5 + \frac{29}{2} = 47.5 + 14.5 = 62$

$d_i = x_i - a$ [ಇಲ್ಲಿ $a = 47.5$] ಮತ್ತು $h = 15$

ನೆನಪಿಡಿ:

ಎಲ್ಲಾ *di* ಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಿದ್ದರೆ ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನವು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ.
ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಪಡೆದ ಸರಾಸರಿಯು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.
ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನಗಳು ನೇರ ವಿಧಾನದ ಸರಳೀಕೃತ ರೂಪಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು, ಭಾರತದ ವಿವಿಧ ರಾಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರಾಡಳಿತ ಪ್ರದೇಶಗಳ ಗ್ರಾಮೀಣ ಭಾಗದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಶೇಕಡಾವಾರು ಹಂಚಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರೂ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಸರಾಸರಿ ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಶೇಕಡಾವಾರು	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
ರಾಜ್ಯಗಳು/ಕೇಂದ್ರಾಡಳಿತ ಪ್ರದೇಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	11	7	4	4	2	1

a = 50, h = 10

C.I.	f_i	x_i	d_i	$u_i = \frac{x_i - 20}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15-25	6	20	-30	-3	120	-180	-18
25-35	11	30	-20	-2	330	-220	-22
35-45	7	40	-10	-1	280	-70	-7
45-55	4	50	0	0	200	0	0
55-65	4	60	10	1	240	40	4
65-75	2	70	20	2	140	40	4
75-85	1	80	30	3	80	30	3
$\sum f_i = 35$					1390	−360	−36

$\sum f_i = 35,\ \sum f_i x_i = 1390,\ \sum f_i d_i = -360,\ \sum f_i u_i = -36$

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ,

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = $ **39.71**

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ

$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$= 50 - \frac{360}{35} = 50 - 10.29 = $ **39.71**

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ

$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= 50 - \frac{36}{35} \times 10 = 50 - 10.29$

= 39.71

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಏಕದಿನ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಬೌಲರ್‌ಗಳು ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯು ಏನನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ?

ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	20 - 60	60 -100	100-150	150 - 250	250 - 350	350 - 450
ಬೌಲರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	5	16	12	2	3

C.I.	f_i	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{x_i - 200}{10}$	$f_i u_i$
20 -60	7	40	-160	-8	-56
60 -100	5	80	-120	-6	-30
100 -150	16	125	-75	-3.75	-60
150 -250	12	200	0	0	0
250 -350	2	300	100	5	10
350 -450	3	400	200	10	30
	45				**-106**

ಸರಾಸರಿ:

$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= 200 - \frac{106}{45} \times 20$

$= 200 - 47.11$

= **152.89**

ಅಭ್ಯಾಸ 13.1

1. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಂದು ತಂಡವು ತಮ್ಮ 'ಪರಿಸರ ಅರಿವು ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ'ದ ಭಾಗವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿ ಒಂದು ಜನವಸತಿ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ 20 ಮನೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿತು. ಪ್ರತಿ ಮನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14
ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1	2	1	5	6	2	3

ನೀವು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಯಾವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೀರಿ ಮತ್ತು ಏಕೆ?

C.I.	f_i	x_i	$f_i x_i$
0-2	1	1	1
2-4	2	3	6
4-6	1	5	5
6-8	5	7	35
8-10	6	9	54
10-12	2	11	22
12-14	3	13	39
	$\sum f_i$ =20	$\sum x_i f_i$	162

a = 7 ,h = 2

$\sum f_i = 35, \sum f_i x_i = 162$

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$= \frac{1620}{20} = 8.1$

ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಜಾಸ್ತಿ ಇಲ್ಲದ ಕಾರಣ ನೇರ ವಿಧಾನ ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ

2. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ 50 ನೌಕರರ ದಿನಗೂಲಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

ದಿನಗೂಲಿ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200
ನೌಕರರ ಸಂಖ್ಯೆ	12	14	8	6	10

ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ನೌಕರರ ಸರಾಸರಿ ದಿನಗೂಲಿಯನ್ನು ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

C.I.	f_i	$u_i = \frac{x_i - 150}{20}$	$f_i u_i$
00-120	12	-2	-24
120-140	14	-1	-14
140-160	8	0	0
160-180	6	1	6
180-200	10	2	20
	$\sum f_i$ =50	$\sum x_i f_i$	-12

a = 75.5, h = 3

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ

$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$ x h =150+ $\frac{-12}{50}$ x 20

= 150 – 4.8 = **145.2**

ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ ಉತ್ತಮ ವಾಗಿದೆ.

2. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಮಕ್ಕಳ ದಿನನಿತ್ಯದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣವನ್ನು (Pocket allowance) ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಸರಾಸರಿ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣವು ರೂ 18 ಆದರೆ ಬಿಟ್ಟು ಹೋಗಿರುವ ಆವೃತ್ತಿ f ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದಿನ ನಿತ್ಯದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣ(ರೂ)	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	6	9	13	f	5	4

C.I.	f_i	x_i	$f_i x_i$
11-13	7	12	84
13-15	6	14	84
15-17	9	16	144
17-19	13	18	234
19-21	f	20	20f
21-23	5	22	110
23-25	4	24	96
	$\sum f_i$ =44+ f		752+20f

a = 18 , h = 2

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$18 = \frac{752 + 20f}{44 + f}$

$\Rightarrow 18(44 + f) = 752 + 20f$

$\Rightarrow 792 + 18f = 752 + 20f$

$\Rightarrow 40 = 2f \Rightarrow f = 20$

[ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು]

3. ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವೈದ್ಯರ ಬಳಿ 30 ಮಹಿಳೆಯರು ತಪಾಸಣೆಗೊಳಗಾದರು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಅವರ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಲಾಯಿತು. ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಈ ಮಹಿಳೆಯರ ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷದ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	65–68	68–71	71–74	74–77	77–80	80–83	83–86
ಮಹಿಳೆಯರ ಸಂಖ್ಯೆ	2	4	3	8	7	4	2

C.I.	f_i	x_i	d_i	$f_i d_i$
65-68	2	66.5	-9	-18
68-71	4	69.5	-6	-24
71-74	3	72.5	-3	-9
74-77	**8**	**75.5**	**0**	**0**
77-80	7	78.5	3	21
80-83	4	81.5	6	24
83-86	2	84.5	9	18
	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 12$

a = 75.5 , h = 3
ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ

$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

$= 75.5 + \frac{12}{30} = 75.5 + 0.4 = 75.9$

[ಇಲ್ಲಿ ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದೆ. ಇದನ್ನು ಯಾವುದೇ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಬಹುದು]

4. ಒಂದು ಚಿಲ್ಲರೆ ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಹಣ್ಣು ಮಾರಾಟಗಾರರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮಾರುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದವು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ವಿತರಣೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	50–52	53–55	56–58	59–61	62–64
ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	15	110	135	115	25

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನೀವು ಯಾವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ?

$C.I.$	f_i	x_i	$u_i = \frac{x_i - 75.5}{3}$	$f_i u_i$
50-52	15	51	-2	-30
53-55	110	54	-1	-110
56-58	135	57	0	0
59-61	115	60	1	115
62-64	25	63	2	50
	$\sum f_i = 400$			$\sum f_i u_i = 25$

a = 57 , h = 3
ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ

$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= 57 + \frac{25}{400} \times 3$

$= 57 + 0.1875 =$ **57.1875 ≈ 57.19**

5. ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 25 ಕುಟುಂಬಗಳ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯದ ಆಹಾರದ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ದಿನ ನಿತ್ಯದ ವೆಚ್ಚ(ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	5	12	2	2

ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯದ ಆಹಾರದ ವೆಚ್ಚದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

C.I.	f_i	x_i	$u_i = \frac{d-225}{50}$	$f_i u_i$
100-150	4	125	-2	-8
150-200	5	175	-1	-5
200-250	12	225	0	0
250-300	2	275	1	2
300-350	2	325	2	4
	$\sum f_i = 25$			$\sum f_i u_i = -7$

a = 225 , h = 50

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ

$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= 225 + \frac{-7}{25} \times 50$

$= 225 - 14 = 211$

ಇಲ್ಲಿ ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ.

6. ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ SO_2 ನ ಸಾರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು (ಮಿಲಿಯನ್‌ಗಳ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ ppm ಗಳಲ್ಲಿ) ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಗರದ 30 ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿದೆ. ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ SO_2 ನ ಸಾರತೆಯ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

SO_2 ನ ಸಾರತೆ	ಆವೃತಿ
0.00 – 0.04	4
0.04 – 0.08	9
0.08 – 0.12	9
0.12 – 0.16	2
0.16 – 0.20	4
0.20 – 0.24	2

C.I.	f_i	x_i	f_ix_i
0.00 – 0.04	4	0.02	0.08
0.04 – 0.08	9	0.06	0.54
0.08 – 0.12	9	0.10	0.90
0.12 – 0.16	2	0.14	0.28
0.16 – 0.20	4	0.18	0.72
0.20 – 0.24	2	0.22	0.44
	$\sum f_i$ =30		$\sum f_ix_i$ =2.96

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ

$\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

$= \frac{2.96}{30} = 0.099$

ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ SO_2 ನ ಸಾರತೆಯ ಸರಾಸರಿ

= 0.099ppm

7. ಒಬ್ಬ ತರಗತಿ ಶಿಕ್ಷಕನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ವಾರ್ಷಿಕ ಗೈರು ಹಾಜರಾತಿಯ ದಾಖಲೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಗೈರು ಹಾಜರಾತಿಯ ದಿನಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0 – 6	6 – 10	10 – 14	14 – 20	20 – 28	28 – 38	38 – 40
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	11	10	7	4	4	3	1

C.I.	f_i	x_i	f_ix_i
0-6	11	3	33
6-10	10	8	80
10-14	7	12	84
14-20	4	17	68
20-28	4	24	96
28-38	3	33	99
38-40	1	39	39
	$\sum f_i$ =40		$\sum f_ix_i$ = 499

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ

$\sum f_i = 40$,

$\sum f_i x_i = 499$,

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸರಾಸರಿ

$\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

$= \frac{499}{40}$

$= 12.475$

8. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 35 ನಗರಗಳ ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು (ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ) ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣ %	45–55	55–65	65–75	75–85	85–95
ನಗರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	3	10	11	8	3

C.I.	f_i	x_i	$d_i = x_i - 70$	f_id_i
45-55	3	50	-20	-60
55-65	10	60	-10	-100
65-75	11	70	0	0
75-85	8	80	10	80
85-95	3	90	20	60
	$\sum f_i$ =35			$\sum f_id_i$ =–20

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ

$\sum f_i = 35$,

$\sum f_id_i = -20$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ

$\bar{x} = a + \frac{\sum f_id_i}{\sum f_i} = 70 + \frac{-20}{35} = 60.43$

13.3 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕ (ರೂಢಿಬೆಲೆ)

ಬಹುಲಕ ಅಥವಾ ರೂಢಿಬೆಲೆಯು ದತ್ತ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಇರುವ ಮೌಲ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: 10 ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಬೌಲರನು ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3 ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0	1	2	3	4	5	6
ಪಂದ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1	1	3	2	1	1	1

ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಬೌಲರನು ಗರಿಷ್ಟ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 2

$$\text{ಬಹುಲಕ} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

f_0 = ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ, ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

l = ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ

h = ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ

f_1 = ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

f_2 = ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ, ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಒಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತಂಡವು ಒಂದು ಜನವಸತಿ ಪ್ರದೇಶದ 20 ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಮೀಕ್ಷೆ ನಡೆಸಿತು. ಇದರಂತೆ ಒಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿರುವ ಸದಸ್ಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಕುಟುಂಬದ ಗಾತ್ರ	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
ಕುಟುಂಬದ ಸಂಖ್ಯೆ	7	8	2	2	1

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಟ ಆವೃತ್ತಿಯು 8 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವು 3 – 5

$l = 3$; $h = 2$; $f_1 = 8$; $f_0 = 7$; $f_2 = 2$

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$= 3 + \left[\frac{8-7}{2(8)-7-2}\right] \times 2$

$= 3 + \left[\frac{1}{16-9}\right] \times 2 = 3 + \frac{2}{7}$

$= 3.286$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 3.286 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಉದಾಹರಣೆ 1 ರ ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ರಲ್ಲಿ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕ ಹಂಚಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದಲ್ಲದೆ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	10–25	25–40	40–55	55–70	70–85	85–100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	7	6	6	6

ಪರಿಹಾರ: 40 – 45 ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

$l = 40$; $h = 15$; $f_1 = 7$; $f_0 = 3$; $f_2 = 6$

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$= 40 + \left[\frac{7-3}{2(7)-3-6}\right] \times 15$

$= 40 + \left[\frac{4}{14-9}\right] \times 15$

$= 40 + \frac{4}{5} \times 15 = 40 + 12 = \mathbf{52}$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 52 ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 13.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ರೋಗಿಗಳ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	5 – 15	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65
ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	11	21	23	14	5

ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಈ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: 35 – 45 ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

$l = 35$; $h = 10$; $f_1 = 23$; $f_0 = 21$; $f_2 = 14$

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$= 35 + \left[\frac{23-21}{2(23)-21-14}\right] \times 10$

$= 35 + \left[\frac{2}{46-35}\right] \times 10$

$= 35 + \frac{2}{11} \times 10$

$= 35 + 1.81 = 36.81$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 36.81 ಆಗಿದೆ.

C.I.	f_i	x_i	$d_i = x_i - 70$	$u_i = \frac{x_i - 30}{10}$	$f_i u_i$
5–15	6	10	–20	–2	–12
15–25	11	20	–10	–1	–11
25–35	21	30	0	0	0
35–45	23	40	10	1	23
45–55	14	50	20	2	28
55–65	5	60	30	3	15
$\sum f_i = 80$				$\sum f_i u_i = 43$	

$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= 30 + \frac{43}{80} \times 10$

$= 30 + 5.375 = 35.375$

ಆದ್ದರಿಂದ 36.8 ವರ್ಷ ವಯಸ್ಸಿನವರು ಅತೀ ಹೆಚ್ಚು ಮಂದಿ ಆಸ್ಪತ್ರೆಗೆ ದಾಖಲಾಗಿರುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗೂ ಆಸ್ಪತ್ರೆಗೆ ದಾಖಲಾದ ರೋಗಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು 35.37 ವರ್ಷಗಳಾಗಿವೆ.

2. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು 225 ವಿದ್ಯುತ್ ಉಪಕರಣಗಳ ಬಿಡಿಭಾಗಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ) ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಬಾಳಿಕೆ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ)	0 – 20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
ಆವೃತ್ತಿ	10	35	52	61	38	29

ಉಪಕರಣಗಳ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳ ಬಾಳಿಕೆಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

ಗರಿಷ್ಟ ಆವೃತ್ತಿ =61 ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 60 – 80 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

$l = 60$; $h = 20$; $f_1 = 61$; $f_0 = 52$; $f_2 = 38$

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$= 60 + \left[\frac{61-52}{2(61)-52-38}\right] \times 20$

$= 60 + \left[\frac{9}{122-90}\right] \times 20$

$= 60 + \frac{9}{32} \times 20$

ಬಹುಲಕ = 60 + 5.625

= 65.625 ∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 65.625 ಆಗಿದೆ.

3. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ 200 ಕುಟುಂಬಗಳ ಒಟ್ಟು ಮಾಸಿಕ ಗೃಹೋಪಯೋಗಿ ವೆಚ್ಚದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಕುಟುಂಬಗಳ ಮಾಸಿಕ ವೆಚ್ಚದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅಲ್ಲದೆ, ಮಾಸಿಕ ವೆಚ್ಚದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೆಚ್ಚ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1000 - 1500	24
1500 - 2000	40
2000 - 2500	33
2500 - 3000	28
3000 - 3500	30
3500 - 4000	22
4000 - 4500	16
4500 - 5000	7

C.I.	f_i	x_i	$d_i = x_i - 2750$	$u_i = \frac{x_i - 2750}{500}$	$f_i u_i$
1000 - 1500	24	1250	-1500	-3	-72
1500 - 2000	40	1750	-1000	-2	-80
2000 - 2500	33	2250	-500	-1	-33
2500 - 3000	28	2750	0	0	0
3000 - 3500	30	3250	500	1	30
3500 - 4000	22	3750	1000	2	44
4000 - 4500	16	4250	1500	3	48
4500 - 5000	7	4750	2000	4	28
$\sum f_i$ =200				$\sum f_i u_i$ =-35	

1500 - 2000 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

l = 1500; h = 500; f_1 = 40; ಆವೃತ್ತಿ f_0 = 24; f_2 = 33 **ಬಹುಲಕ** = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$= 1500 + \left[\frac{40-24}{2(40)-24-33}\right] \times 500 = 1500 + \left[\frac{16}{80-57}\right] \times 500 = 1500 + \frac{16}{23} \times 500 = 1500 + 347.83 = 1847.83$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 1847.83 ಆಗಿದೆ.

4. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಭಾರತದ ರಾಜ್ಯಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶಿಕ್ಷಕ – ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಎರಡೂ ಅಳತೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

ಪ್ರತಿ ಶಿಕ್ಷಕನಿಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ರಾಜ್ಯಗಳು/ ಕೇಂ.ಪ್ರ.ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
15 - 20	3
20 - 25	8
25 - 30	9
30 - 35	10
35 - 40	3
40 - 45	0
45 - 50	0
50 - 55	2

C.I.	f_i	x_i	$d_i = x_i - 32.5$	$u_i = \frac{x_i - 32.5}{5}$	$f_i u_i$
15 - 20	3	17.5	-15	-3	-9
20 - 25	8	22.5	-10	-2	-16
25 - 30	9	27.5	-5	-1	-9
30 - 35	10	32.5	0	0	0
35 - 40	3	37.5	5	1	3
40 - 45	0	42.5	10	2	0
45 - 50	0	47.5	15	3	0
50 - 55	2	52.5	20	4	8
$\sum f_i$ =35				$\sum f_i u_i$ = −23	

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x}$ = a + $\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= 32.5 + \frac{-23}{35} \times 5$

= 32.5 – 3.29 = **29.21**

ಶಿಕ್ಷಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅನುಪಾತವು 30.625 ಆಗಿ ರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು 29.21 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

30 – 35 ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

l = 30; h = 5; f_1 = 10; f_0 = 9; f_2 = 3

$= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h = 30 + \left[\frac{10-9}{2(10)-9-3}\right] \times 5$

$= 30 + \left[\frac{1}{20-12}\right] \times 5 = 30 + \frac{1}{8} \times 5$

= 30 + 0.625 = 30.625

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 30.625 ಆಗಿದೆ.

ದತ್ತ ವಿತರಣೆಯು ಏಕದಿನ ಅಂತರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವದ ಕೆಲವು ಉತ್ತಮ ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ಮನ್‌ಗಳು ಗಳಿಸಿದ ರನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಳಿಸಿದ ರನ್ನುಗಳು	ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ಮನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
3000 - 4000	4
4000 - 5000	18
5000 - 6000	9
6000 - 7000	7
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3
9000 - 10000	1
10000 - 11000	1

4000 – 5000 ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

$l = 4000$; $h = 1000$; $f_1 = 18$; $f_0 = 4$; $f_2 = 9$

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \text{x } h$

$= 4000 + \left[\frac{18-4}{2(18)-4-9}\right] \text{x } 1000 = 4000 + \left[\frac{14}{36-13}\right] \text{x } 1000$

$= 4000 + \frac{14}{23} \text{ x } 1000 = 4000 + 608.7 = 4608.7$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 4608.7 ಆಗಿದೆ.

ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪ್ರತಿ 3 ನಿಮಿಷದ 100 ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋದ ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿದ್ದಾನೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0 – 10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
ಆವೃತ್ತಿ	7	14	13	12	20	11	15	8

40 – 50 ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

$l = 40$; $h = 10$; $f_1 = 20$; $f_0 = 12$; $f_2 = 11$

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \text{x } h$

$= 40 + \left[\frac{20-12}{2(20)-12-11}\right] \text{x } 10$

$= 40 + \left[\frac{8}{40-23}\right] \text{x } 10$

$= 40 + \frac{8}{17} \text{ x } 10$

ಬಹುಲಕ $= 40 + 4.71 = 44.71$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 44.71 ಆಗಿದೆ.

13.4 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ (ಮಧ್ಯಮ ಬೆಲೆ)

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \text{x h}$

l = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ.

n = ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

cf = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

f = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

ಮಧ್ಯಾಂಕವು ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗಿದೆ. ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಗಳನ್ನು ಮೊದಲಾಗಿ ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ `n' ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು `n' ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು $\left(\frac{n}{2}\right)$ ನೇ ಮತ್ತು $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10ನೇ ತರಗತಿಯ 51 ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರಗಳಿಗೆ (cm ಗಳಲ್ಲಿ) ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಲಾಯಿತು ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಯಿತು. ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಎತ್ತರಗಳು(ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಳಲ್ಲಿ)	ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
140ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	4	4
140 – 145	7	11
145 – 150	18	29
150 – 155	11	40

140ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	4
145ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	11
150ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	29
155ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	40
160ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	46
165ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	51

n = 51, ∴ $\frac{n}{2} = 25.5$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 145 – 150 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 145 . cf (145 - 150ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 11

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 145 – 150 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 18, h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 5

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

$= 145 + \left[\frac{25.5 - 11}{18}\right] \times 5$

$= 145 + \left[\frac{72.5}{18}\right] = 149.03$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 149.03 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 525. ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಯು 100 ಆಗಿದ್ದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವೃತ್ತಿ
0 -100	2
100-200	5
200-300	x
300-400	12
400-500	17
500-600	20
600-700	y
700-800	9
800-900	7
900-1000	4

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
0 -100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	7+x
300-400	12	19+x
400-500	17	36+x
500-600	20	56+x
600-700	y	56+x+y
700-800	9	65+x+y
800-900	7	72+x+y
900-1000	4	76+x+y

ಪರಿಹಾರ :

ಇಲ್ಲಿ, n = 100 ∴ 76 + x + y = 100 ಅಂದರೆ,

x + y = 24 .... (1)

ಮಧ್ಯಾಂಕವು 525, ಇದು 500 – 600 ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ

∴ $l = 500$, f = 20, cf = 36 + x, h = 100

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

$525 = 500 + \left[\frac{50 - 36 - x}{20}\right] \times 100$

$\Rightarrow 525 = 500 + [14 - x] \times 5$

$\Rightarrow 25 = 70 - 5x$

$\Rightarrow 5x = 70 - 25$

$\Rightarrow 5x = 45 \Rightarrow \therefore x = 9$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ 9 + y = 24 ⇒ y = 15

ಗಮನಿಸಿ:1. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಗಳ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳ ನಡುವೆ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಬಂಧವಿದೆ

3 ಮಧ್ಯಾಂಕ = ಬಹುಲಕ + 2 ಸರಾಸರಿ

ಅಭ್ಯಾಸ 13.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 68 ಗ್ರಾಹಕರ ಮಾಸಿಕ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ.

ಮಾಸಿಕ ಬಳಕೆ (ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	ಗ್ರಾಹಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
65 - 85	4	4
85 - 105	5	9
105 - 125	13	22
125 - 145	20	42
145 - 165	14	56
165 - 185	8	64
185 - 205	4	68

ಮಾಸಿಕ ಬಳಕೆ (ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	ಗ್ರಾಹಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
65 - 85	4	4
85 - 105	5	9
105 - 125	13	22
125 - 145	20	42
145 - 165	14	56
165 - 185	8	64
185 - 205	4	68

ಈಗ n = 68, $\therefore \frac{n}{2} = 34$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 125 – 145 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 125; cf (125 - 145ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 22

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 145 – 150 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 20, h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 20

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

$= 125 + \left[\frac{34 - 22}{20}\right] \times 20$

$= 125 + \left[\frac{12}{20}\right] \times 20$

= 125 + 12 = 137units

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 137units ಆಗಿದೆ.

ಸರಾಸರಿ:

C.I.	f_i	x_i	$d_i = x_i - 135$	$u_i = \frac{x_i - 135}{20}$	$f_i d_i$
65 - 85	4	75	-60	-3	-12
85 - 105	5	95	-40	-2	-10
105 - 125	13	115	-20	-1	-13
125 - 145	20	135	0	0	0
145 - 165	14	155	20	1	14
165 - 185	8	175	40	2	16
185 - 205	4	195	60	3	12
	$\sum f_i = 68$				$\sum f_i d_i = 7$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= 135 + \frac{7}{68} \times 20$

= 135 + 2.1 = 137.05

ಬಹುಲಕ:

125 – 145 ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

$l = 125; h = 20; f_1 = 20; f_0 = 13; f_2 = 14$

ಬಹುಲಕ = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$= 125 + \left[\frac{20 - 13}{2(20) - 13 - 14}\right] \times 20$

$= 125 + \left[\frac{7}{40-27}\right] \times 20 = 125 + \frac{7}{13} \times 20$

ಬಹುಲಕ = 125 + 10.77 = 135.77

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 135.77 ಆಗಿದೆ.

ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.

2. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 28.5 ಆಗಿದ್ದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
0 - 10	5	5
10 - 20	x	5+x
20 - 30	20	25+x
30 - 40	15	40+x
40 - 50	y	40+x+y
50 - 60	5	45+x+y
ಒಟ್ಟು	60	

ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಗಳು = 45 + x + y ⇒ 60 = 45 + x + y

⇒ x + y = 15 -------------------------(1)

n = 60, ∴ $\frac{n}{2} = 30$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 20 – 30 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, $l = 20$, cf = 5 + x $f = 20$, h = 10

ಮಧ್ಯಾಂಕ= $l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h \Rightarrow 28.5 = 20 + \left[\frac{30 - (5+x)}{20}\right] \times 10$

$8.5 \times 20 = (30 - 5 - x)10 \Rightarrow 170 = 250 - 10x$

⇒ 10x = 80 ⇒ x = 8; x = 8 ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

⇒ 8 + y = 15 ⇒ y = 7 ಆದ್ದರಿಂದ x = 8 ಮತ್ತು y = 7

3. ಒಬ್ಬ ಜೀವ ವಿಮಾ ಏಜೆಂಟನು ಪಡೆದ 100 ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ವಿತರಣೆಯ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇವೆ. ಪಾಲಿಸಿಗಳನ್ನು 18 ವರ್ಷ ದಾಟಿದ ಮತ್ತು 60 ವರ್ಷಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ವಯಸ್ಸಿರುವ ಜನರಿಗೆ ಮಾತ್ರ ನೀಡಿದ್ದರೆ, ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ
20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	2
25 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	6
30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	24
35 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	45
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	78
45 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	89
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	92
55 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	98
60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	100

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ
15-20	2	2
20-25	4	6
25-30	18	24
30-35	21	45
35-40	33	78
40-45	11	89
45-50	3	92
50-55	6	98
55-60	2	100

n = 100, ∴ $\frac{n}{2} = 50$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 35 – 40 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, $l = 35$; cf = 45; $f = 33$; h = 5

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h = 35 + \left[\frac{50 - 45}{33}\right] \times 5$

$= 35 + \left[\frac{5}{33}\right] \times 5 = 35 + \frac{25}{33} = 35 + 0.76 = 35.76$

3. ಒಂದು ಗಿಡದ 40 ಎಲೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸಮೀಪದ ಮಿಲಿಮೀಟರ್‌ಗೆ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಅಳತೆ ಮಾಡಿದೆ ಮತ್ತು ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದೆ. ಎಲೆಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [ಸುಳುಹು: ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಿರಂತರ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಯಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ ಏಕೆಂದರೆ ಸೂತ್ರವು ನಿರಂತರ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು 117.5 – 126.5, 126.5 – 135.5, ..., 171.5 – 180.5 ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ.]

ಉದ್ದ(ಮಿ.ಮೀ.ಗಳಲ್ಲಿ)	ಎಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
118 - 126	3

ಉದ್ದ(ಮಿ.ಮೀ.ಗಳಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
117.5 – 126.5	3	3
126.5 – 135.5	5	8
135.5 – 144.5	9	17
144.5 – 153.5	12	29
153.5 – 162.5	5	34
162.5 – 171.5	4	38
171.5 – 180.5	2	40

127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

n = 40, $\therefore \frac{n}{2} = 20$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 144.5 – 153.5 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, $l = 144.5$; cf = 17; f = 12; h = 9

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

$= 144.5 + \left[\frac{20 - 17}{12}\right] \times 9$

$= 144.5 + \left[\frac{3}{12}\right] \times 9 = 144.5 + \frac{27}{12}$

$= 144.5 + 2.25$

⇒ **ಮಧ್ಯಾಂಕ = 146.75mm**

5. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 400 ನಿಯಾನ್ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಬಲ್ಬ್‌ನ ಬಾಳಿಕೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
1500-2000	14
2000-2500	56
2500-3000	60
3000-3500	86
3500-4000	74
4000-4500	62
4500-5000	48

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
1500-2000	14	14
2000-2500	56	70
2500-3000	60	130
3000-3500	86	216
3500-4000	74	290
4000-4500	62	352
4500-5000	48	400

n = 400, $\therefore \frac{n}{2} = 200$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 3000 – 3500 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 3000; cf = 130; f = 86; h = 500

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

$= 3000 + \left[\frac{200 - 130}{86}\right] \times 500$

$= 3000 + \left[\frac{70}{86}\right] \times 500 = 3000 + 406.98$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = 3406.98

6. ಒಂದು ಸ್ಥಳೀಯ ದೂರವಾಣಿ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಿ (Telephone directory) ಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ 100 ಉಪನಾಮಗಳನ್ನು (surname) ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಆಂಗ್ಲಭಾಷಾ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19
ಉಪನಾಮಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	30	40	16	4	4

ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ. ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಅಲ್ಲದೆ, ಉಪನಾಮಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
1-4	6	6
4-7	30	36
7-10	40	76
10-13	16	92
13-16	4	96
16-19	4	100

ಮಧ್ಯಾಂಕ: n = 100, $\therefore \frac{n}{2} = 50$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 7 – 10 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, $l = 7$; cf = 36; f = 40; h = 3

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h = 7 + \left[\frac{50 - 36}{40}\right] \times 3$

$= 7 + \left[\frac{14}{40}\right] \times 3 = 7 + 1.05 = 8.05$

C.I.	f_i	x_i	$d_i = x_i - 135$	$u_i = \frac{x_i - 135}{20}$	$f_i u_i$
1-4	6	2.5	−6	−2	−12
4-7	30	5.5	−3	−1	−30
7-10	40	8.5	0	0	0
10-13	16	11.5	3	1	16
13-16	4	14.5	6	2	8
16-19	4	17.5	9	3	12
	$\sum f_i$ =100			$\sum f_i u_i$ =	-6

ಸರಾಸರಿ

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ

a = 8.5, h = 3

$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= 8.5 + \frac{-6}{100} \times 3$

= 8.5 - 0.18

= **8.32**

ಬಹುಲಕ:

7 – 10 ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ. $l = 7$; h = 3; $f_1 = 30$; $f_0 = 30$; $f_2 = 16$

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$= 7 + \left[\frac{40 - 30}{2(40) - 30 - 16}\right] \times 3$

$= 7 + \left[\frac{10}{80 - 46}\right] \times 3$

$= 7 + \frac{10}{34} \times 3$

= 7 + 0.88

= 7.88

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು **7.88** ಆಗಿದೆ.

4. ಒಂದು ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತೂಕ(ಕೆ.ಜಿ.ಗಳಲ್ಲಿ)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	8	6	6	3	2

n = 30, ∴ $\frac{n}{2} = 15$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 55 – 60 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

$l = 55$; cf = 13; $f = 6$; h = 5

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

$= 55 + \left[\frac{15 - 13}{6}\right] \times 5 = 7 + \left[\frac{2}{6}\right] \times 5$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = 55 + 1.67 = 56.67kg

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
40-45	2	2
45-50	3	5
50-55	8	13
55-60	6	19
60-65	6	25
65-70	3	28
70-75	2	30

****

14 ಸಂಭವನೀಯತೆ

ಕಲಿಕಾಂಶಗಳು:

1. ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮತ್ತು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ
2. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ
3. ಘಟನೆಗಳು ಹಾಗೂ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಂಭವನೀಯತೆ
4. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು
5. ಪೂರಕ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ
6. ಖಚಿತ ಮತ್ತು ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆ

14.2 ಸಂಭವನೀಯತೆ : ಒಂದು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ವಿಧಾನ

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಚಿಮ್ಮಲಾಗಿದೆ.
ನಾಣ್ಯವು ನೆಲಕ್ಕೆ ಬೀಳುವ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶಿರ ಅಥವಾ ಪುಚ್ಛ ಮಾತ್ರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು.
ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದರೆ,
ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳು 1,2,3,4,5 ಮತ್ತು 6 ಆಗಿವೆ.

ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ E ಯನ್ನು P(E) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

$$P(E) = \frac{\text{ಘಟನೆ E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ನಾವು ನಾಣ್ಯದ ಬಗ್ಗೆ ಹೇಳುವಾಗ ಇದು ಕುಂದಿಲ್ಲದ (fair) ನಾಣ್ಯವೆಂದು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿ ಅದು ಕೆಳಕ್ಕೆ ಬಂದಾಗ ಒಂದೇ ಬದಿಯು ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಬೀಳಲು ಯಾವುದೇ ಕಾರಣ ಇರದಂತೆ ಅದು ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ನಾಣ್ಯದ ಈ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ನಾವು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತ (unbiased) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. 'ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆ' ಈ ಪದವನ್ನು, ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಪಕ್ಷಪಾತ (bias) ಅಥವಾ ಹಸ್ತಕ್ಷೇಪ (interference) ಇಲ್ಲದೆ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಬೀಳಲು ಬಿಡಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಅರ್ಥೈಯಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ, ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಒಂದು ಪುಚ್ಛವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಯದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ: ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಚಿಮ್ಮುವುದು.

S - {H, T} $\Rightarrow$ n(S) = 2
A - { ಶಿರವು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವುದು }
$\Rightarrow n(A) = 1;\quad \mathbf{P(A)} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$

S - {H, T} $\Rightarrow$ n(S) = 2
B - { ಪುಚ್ಛವು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವುದು }
$\Rightarrow n(B) = 1;\quad \mathbf{P(B)} = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರದ ಒಂದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡು, ಒಂದು ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಮತ್ತು ಒಂದು ಹಳದಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಕೃತಿಕಾಳು ಚೀಲದೊಳಗೆ ನೋಡದೆಯೇ, ಅದರಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತಾಳೆ ಅವಳು ತೆಗೆಯುವ ಚೆಂಡು ಒಂದು (i) ಹಳದಿ ಚೆಂಡು (ii) ಕೆಂಪುಚೆಂಡು (iii) ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡಿಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೆಂಪು, ಒಂದು ನೀಲಿ ಮತ್ತು ಒಂದು ಹಳದಿ ಚೆಂಡುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು.

S - { ಕೆಂಪು, ನೀಲಿ, ಹಳದಿ }	**S - { ಕೆಂಪು, ನೀಲಿ, ಹಳದಿ }**	**S - { ಕೆಂಪು, ನೀಲಿ, ಹಳದಿ }**
$\Rightarrow$ n(S) = 3	$\Rightarrow$ n(S) = 3	$\Rightarrow$ n(S) = 3
A - {ಹಳದಿ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು}	B - {ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು}	B - {ನೀಲಿ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು}
$\Rightarrow n(A) = 1;\ \mathbf{P(A)} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{3}$	$\Rightarrow n(B) = 1;\ \mathbf{P(B)} = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{3}$	$\Rightarrow n(B) = 1;\ \mathbf{P(B)} = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{3}$

ಗಮನಿಸಿ: ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: ನಾವು ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಿದ್ದೇವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. (i) 4 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? (ii) 4 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 4 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ: ಯದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ: ಒಂದಲು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆಯುವುದು.

S –{ 1,2,3,4,5,6 } $\Rightarrow$ n(S) = 6

A – { 4ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು } – {5,6} $\Rightarrow$ n(A) = 2

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

B – { 4ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ/4ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು } – {1,2,3,4} - n(B) = 4

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$: ಇಲ್ಲಿ A ಯು ಒಂದು ಘಟನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, $\bar{A}$ ಅದರ ಪೂರಕ ಘಟನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$0 \le P(E) \le 1$

ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ

ಸಂಭವಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು '0'. ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು(ಮುಖಗಳ ಮೇಲೆ 1ರಿಂದ 6ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರುವ) ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವುದು.

ಖಚಿತ ಘಟನೆ

ಖಚಿತವಾಗಿ (ಅಥವಾ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ) ಸಂಭವಿಸುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು ಖಚಿತ ಘಟನೆ ಅಥವಾ ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ 7 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆ ಕಾರ್ಡ್

(i) ಒಂದು ಏಸ್ ಆಗಿರುವ,

(ii) ಒಂದು ಏಸ್ ಆಗಿಲ್ಲದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) S – ಇಸ್ಪೀಟ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು

n(S) = 52

E – ತೆಗೆದ ಕಾರ್ಡ್ ಒಂದು ಏಸ್ ಆಗಿರುವುದು.$\Rightarrow$n(E) = 4

$P(A) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

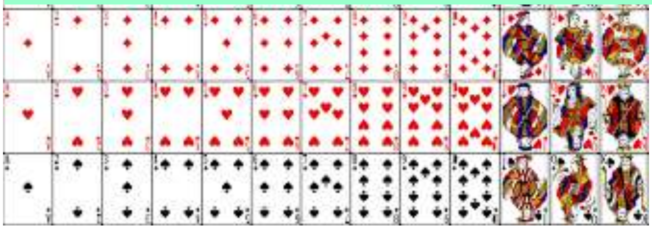
(ii) F - ತೆಗೆದ ಕಾರ್ಡ್ ಒಂದು ಏಸ್ ಆಗಿರದಿರುವುದು.

$\Rightarrow$n(F) = 48

$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{48}{52} = \frac{11}{13}$ ಅಥವಾ

$P(F) = P(\bar{E}) = 1 - p(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{11}{13}$

ಆಟದ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಕಟ್ಟು 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ 13 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಂತೆ 4 ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ (suits) ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ. ಸ್ಪೇಡ್ (♠), ಹಾರ್ಟ್(♥), ಡೈಮಂಡ್ (♦) ಮತ್ತು ಕ್ಲಬ್ (♣). ಕ್ಲಬ್ಸ್ ಮತ್ತು ಸ್ಪೇಡ್ಸ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದವುಗಳಾಗಿದ್ದು ಹಾರ್ಟ್ಸ್ ಮತ್ತು ಡೈಮಂಡ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ್ದಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳೆಂದರೆ, ಏಸ್, ರಾಜ, ರಾಣಿ, ಜ್ಯಾಕ್, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 ಮತ್ತು 2. ರಾಜ, ರಾಣಿ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಕ್ ಈ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು (ಗೌರವಾನ್ವಿತ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ



ಉದಾಹರಣೆ 5: ಸಂಗೀತಾ ಮತ್ತು ರೇಷ್ಮಾ ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ಆಟಗಾರ್ತಿಯರು ಒಂದು ಟೆನ್ನಿಸ್ ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಆಡುತ್ತಾರೆ. ಸಂಗೀತಾಳು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.62 ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ರೇಶ್ಮಾಳು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಸಂಗೀತಾ ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = P(A) = 0.62

ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಷ್ಮಾ ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.62 = 0.38$

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಸವಿತಾ ಮತ್ತು ಹಮೀದಾ ಗೆಳತಿಯರು ಇವರಿಬ್ಬರ ಜನ್ಮದಿನವು
(i) ಪ್ರತ್ಯೇಕ ದಿನಗಳಾಗಿರುವ (ii) ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? (ಅಧಿಕ ವರ್ಷವನ್ನು ನಿರ್ಲಕ್ಷಿಸಿ)

ಪರಿಹಾರ: (i) ಸವಿತಾ ಮತ್ತು ಹಮೀದಾರ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬವು ಪ್ರತೇಕ ದಿನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅನುಕೂಲಿಸುವ ದಿನಗಳು 365–1 = 364

ಜನ್ಮದಿನ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ದಿನಗಳಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{364}{365}$; ಜನ್ಮದಿನ ಒಂದೇ ದಿನವಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{1}{365}$

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10 ನೇ ತರಗತಿಯ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 25 ಬಾಲಕಿಯರು ಮತ್ತು 15 ಬಾಲಕರಿದ್ದಾರೆ. ತರಗತಿ ಶಿಕ್ಷಕರು ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ತರಗತಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಯಾಗಿ ಆರಿಸಬೇಕಿದೆ. ಶಿಕ್ಷಕರು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಹೆಸರನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. ನಂತರ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಕಲಕುತ್ತಾರೆ. ನಂತರ ಅವರು ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಚೀಲದಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಕಾರ್ಡ್‌ನಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಹೆಸರು (i) ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕಿಯ (ii) ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕನದ್ದಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ: n(S) = 40

ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ – n(A) = 25

ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ – n(B) = 15

ಬಾಲಕಿಯ ಹೆಸರಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

ಬಾಲಕನ ಹೆಸರಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

ಅಥವಾ $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 3 ನೀಲಿ, 2 ಬಿಳಿ ಮತ್ತು 4 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಅದು (i) ಬಿಳಿ (ii) ನೀಲಿ (iii) ಕೆಂಪು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಗೋಲಿಗಳು = n(S) = 9

ಗೋಲಿಯು ಬಿಳಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(W) = \frac{2}{9}$

ಗೋಲಿಯು ನೀಲಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(B) = \frac{3}{9}$

ಗೋಲಿಯು ಕೆಂಪಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(B) = \frac{4}{9}$

ಉದಾಹರಣೆ 9: ಹರ್ಪ್ರೀತಳು ಎರಡು ಭಿನ್ನ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸುತ್ತಾಳೆ. (ರೂ 1 ರ ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಮತ್ತು ರೂ 2 ರ ಒಂದು ನಾಣ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ) ಅವಳು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಎರಡು ಭಿನ್ನ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಫಲಿತ ಗಣ

S = { HH, HT, TH, TT }⇒ n(S) = 4

ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು – {HT, TH, TT}; ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ – $\frac{3}{4}$

[ಉದಾಹರಣೆ 10 ಮತ್ತು 11 ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅಲ್ಲವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೈ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.]

ಉದಾಹರಣೆ 12: ಒಂದು ರಟ್ಟಿನ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 100 ಶರ್ಟ್‌ಗಳಿವೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 88 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಉತ್ತಮವಾಗಿವೆ. 8 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಅಲ್ಪದೋಷಗಳಿಂದ ಕೂಡಿವೆ ಮತ್ತು 4 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಹೆಚ್ಚು ದೋಷಗಳಿಂದ ಕೂಡಿವೆ. ಜಿಮ್ಮಿ ಎಂಬ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಉತ್ತಮ ಶರ್ಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸ್ವೀಕರಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಸುಜಾತ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಹೆಚ್ಚು ದೋಷವಿರುವ ಶರ್ಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತಿರಸ್ಕರಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಶರ್ಟ್‌ನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ.

(i) ಇದನ್ನು ಜಿಮ್ಮಿಯು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ (ii) ಇದನ್ನು ಸುಜಾತಳು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಒಟ್ಟು ಶರ್ಟ್‌ಗಳು = n(S) = 100; ಉತ್ತಮವಾದ ಶರ್ಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 88

(i) ಜಿಮ್ಮಿಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 88

⇒ಜಿಮ್ಮಿ ಶರ್ಟ್ ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{88}{100}$ = 0.88

(ii) ಸುಜಾತಳಿಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 88 + 8 = 96

⇒ಸುಜಾತಳು ಶರ್ತ್ ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{96}{100}$ = 0.96

ಉದಾಹರಣೆ 13: ಒಂದು ನೀಲಿ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬೂದು ಬಣ್ಣದ ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆದಿದೆ. ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ದಾಳಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

(i) 8 (ii) 13 (iii) 12 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 12 ಕ್ಕೆ ಸಮ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು:S –{(a,b)/a,b=1,2,3,4,5,6}⇒ n(S) = 6x6 = 36

(i) A - ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 8 ಆಗಿರುವುದು

A – { (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)} ⇒ n(A) = 5

∴ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 8 ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{5}{36}$

(ii) B - ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 13 ಆಗಿರುವುದು ⇒ n(B) = 0

∴ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 13 ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{0}{36}$ = 0

(iii) C - ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 12ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಅಥವಾ 12ಕ್ಕೆ ಸಮ ಆಗಿರುವುದು ⇒ n(C) = 36

∴ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 12ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಅಥವಾ 12ಕ್ಕೆ ಸಮ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{36}{36}$ = 1

ಅಭ್ಯಾಸ 14.1

1. **ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ.**

(i) ಒಂದು ಘಟನೆ E ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ + E ಅಲ್ಲದ' ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ = ____________ [**1**]

(ii) ಸಂಭವಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ____ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು_____ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. [**0 , ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ**]

(iii) ಖಚಿತವಾಗಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು _____ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು_____ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.[**0, ಖಚಿತ ಘಟನೆ**]

(iv) ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು __________ [**1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ**]

(v) ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ______ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಅಥವಾ ಸಮ ಮತ್ತು ______ ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. [**0, 1**]

2. **ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಸಮಾನ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ? ವಿವರಿಸಿ.**

(i) ಒಬ್ಬ ಚಾಲಕನು ಕಾರನ್ನು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕಾರು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಆಗುವುದು ಅಥವಾ ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಆಗದಿರುವುದು.

(ii) ಒಬ್ಬ ಆಟಗಾರ ಬಾಸ್ಕೆಟ್‌ಬಾಲ್‌ನ್ನು ಗುರಿಯತ್ತ ಎಸೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾನೆ ಅವನ/ಅವಳ ಗುರಿ ಮುಟ್ಟುವುದು ಅಥವಾ ಗುರಿಮುಟ್ಟದೇ ಇರುವುದು.

(iii) ಸರಿ – ತಪ್ಪು ಉತ್ತರವಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲಾಗಿದೆ ಉತ್ತರವು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ಆಗಿರುವುದು.

(iv) ಒಂದು ಮಗುವು ಜನಿಸಿದೆ ಇದು ಒಂದು ಗಂಡು ಅಥವಾ ಒಂದು ಹೆಣ್ಣು ಆಗಿರುವುದು.

(i) ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಕಾರು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಆಗದಿರಲು ಅದರ ಮೆಕಾನಿಸಂ ನಲ್ಲಿ ತೊಂದರೆ ಉಂಟಾದರೆ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ.

(ii) ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಇದರಲ್ಲಿ ಗುರಿಗಾರನ ತೀಕ್ಷ್ಣತೆ, ಅವನಿಗೆ ಲಭಿಸಿದ ತರಬೇತಿ ಮುಂತಾದ ಅನೇಕ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಅವನಿಗೆ ಸರಿ ಇಲ್ಲವೆ ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಿಸುವ ಅವಕಾಶ ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ.

(iv) ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಹುಟ್ಟುವ ಮಗು ಗಂಡು ಇಲ್ಲವೇ ಹೆಣ್ಣು ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

3. **ಒಂದು ಫುಟ್‌ಬಾಲ್ ಆಟದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ, ಯಾವ ತಂಡವು ಮೊದಲು ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು ಒಂದು ಉತ್ತಮ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಏಕೆ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ?**

ನಾಣ್ಯ ಚಿಮ್ಮುಗೆಯು ಎರಡೇ ಫಲಿತವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಶಿರ ಅಥವಾ ಪುಚ್ಛ. ಮತ್ತು ಇದರ ಫಲಿತಾಂಶವು ಪೂರ್ವ ನಿರ್ಧರಿತವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

4. **ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.**

A) $\frac{2}{3}$ B) -1.5 C) 15% D) 0.7 3

B) -1.5 ಇದು ಯಾವುದೇ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಯಾವತ್ತೂ $0 \leq$ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ≤ 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

5. **P(E) = 0.05 ಆದರೆ, 'E ಅಲ್ಲದ' ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

'E ಅಲ್ಲದ' ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= 1 - P(E) = 1 - 0.05 = 0.95$

6. **ಒಂದು ಚೀಲವು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಮಾಲಿನಿಯು ಚೀಲದೊಳಗೆ ನೋಡದೆ ಒಂದು ಕ್ಯಾಂಡಿಯನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳು ಹೊರತೆಗೆಯುವ ಕ್ಯಾಂಡಿಯು**

(i) ಒಂದು ಕಿತ್ತಳೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

(ii) ಒಂದು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

(i) ಒಂದು ಕಿತ್ತಳೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು = 0
ಏಕೆಂದರೆ ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಕಿತ್ತಾಳೆ ಪರಿಮಳದ ಯಾವುದೇ ಕ್ಯಾಂಡಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) ಒಂದು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು = 1
ಏಕೆಂದರೆ ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ಯಾಂಡಿಗಳು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

7. **3 ಮಕ್ಕಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ, 2 ಮಕ್ಕಳ ಜನ್ಮದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.992 ಎಂದು ನೀಡಿದೆ. 2 ಮಕ್ಕಳ ಜನ್ಮದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

ಜನ್ಮ ದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = 1 – ಜನ್ಮ ದಿನ ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ

$= 1 - 0.992 = 0.008$

8. **ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 3 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು 5 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಚೀಲದಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ತೆಗೆದ ಚೆಂಡು (i) ಕೆಂಪು (ii) ಕೆಂಪು ಅಲ್ಲದ ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಚೆಂಡುಗಳು = $n(S) = 3 + 5 = 8$

(i) ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $n(A) = 3 \Rightarrow$ ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

(ii) ಕೆಂಪು ಅಲ್ಲದ ಚೆಂಡು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

9. **ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 5 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳು, 8 ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಗಳು ಮತ್ತು 4 ಹಸುರು ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೊರತೆಗೆದ ಗೋಲಿಯು (i) ಕೆಂಪು (ii) ಬಿಳಿ (iii) ಹಸುರು ಅಲ್ಲದ ಗೋಲಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಚೆಂಡುಗಳು = $n(S) = 5 + 8 + 4 = 17$

(i) ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $n(A) = 5$

ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{17}$

(ii) ಬಿಳಿ ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $n(B) = 8$

ಬಿಳಿ ಚೆಂಡು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{8}{17}$

(iii) ಹಸುರು ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $n(C) = 4$

ಬಿಳಿ ಚೆಂಡು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{17}$

10. **ಒಂದು ಗೋಲಕವು (ಹಣದ ಹುಂಡಿ) 50 ಪೈಸೆಯ 100 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, ರೂ 1 ರ 50 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, ರೂ 2 ರ 20 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ರೂ 5 ರ 10 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಅದನ್ನು ಬೋರಲು ಹಾಕಿದಾಗ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಹೊರ ಬೀಳುವ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ. ಆ ನಾಣ್ಯವು (i) ಒಂದು 50 ಪೈಸೆ ನಾಣ್ಯವಾಗಿರುವ (ii) ಒಂದು ರೂ 5 ರ ನಾಣ್ಯ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

ಗೋಲಕದಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ನಾಣ್ಯಗಳು = $100 + 50 + 20 + 10 = 180$

ಗೋಲಕದಲ್ಲಿರುವ 50 ಪೈಸೆಯ ನಾಣ್ಯಗಳು = $n(A) = 100$

ಗೋಲಕದಲ್ಲಿರುವ 5ರೂ ನಾಣ್ಯಗಳು = $n(B) = 10$

(i) ಒಂದು 50 ಪೈಸೆ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$

(ii)ಒಂದು 5ರೂ ನಾಣ್ಯವಾಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ 1 – $P(B)$ =1 - $\frac{n(B)}{n(S)}$ = 1 - $\frac{10}{180} = \frac{17}{18}$

11. ಗೋಪಿಯು ತನ್ನ ಅಕ್ವೇರಿಯಂ ಗೆ ಒಂದು ಅಂಗಡಿಯಿಂದ ಒಂದು ಮೀನನ್ನು ಖರೀದಿಸುತ್ತಾನೆ. ಅಂಗಡಿಯವನು ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನಲ್ಲಿರುವ 5 ಗಂಡು ಮೀನುಗಳು ಮತ್ತು 8 ಹೆಣ್ಣು ಮೀನುಗಳಿಂದ (ಚಿತ್ರ 14.4 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಮೀನನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾನೆ. ಹೊರ ತೆಗೆಯುವ ಮೀನು ಗಂಡು ಮೀನು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಚಿತ್ರ: 14.4

ಟ್ಯಾಂಕ್ ನಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಮೀನುಗಳು = n(S) = 5+8 = 13

ಗಂಡು ಮೀನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = n(A) = 5

ಆದ್ದರಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆದ ಮೀನು ಗಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ

= $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{13}$

12. ಒಂದು ಅವಕಾಶದ ಆಟದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸೂಚಕವು (ಬಾಣವು) ಚಕ್ರಾಕಾರವಾಗಿ ತಿರುಗಿ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ಈ ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅಂಕಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ನಿಶ್ಚಲವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ (ಚಿತ್ರ 14.5 ನ್ನು ನೋಡಿ). ಸೂಚಕವು (i) 8 (ii) ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ (iii) 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (iv) 9 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

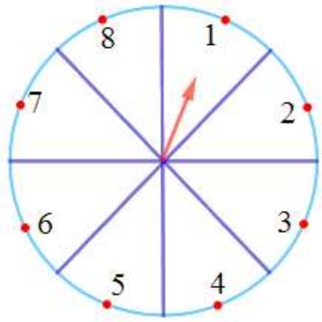


Fig 14.5

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 8

(i) ಸೂಚಕವು 8 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 1 ⇒ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{1}{8}$

(ii) ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 4 ⇒ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(iii) 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 3, 4, 5, 6, 7 ಮತ್ತು 8

2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6 ⇒ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{6}{8} = \frac{4}{4}$

(iv) 9 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 1,2,3,4,5,6,7,8

9 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 8 ⇒ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{8}{8}$ = 1

13. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ.(i) ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ (ii) 2 ಮತ್ತು 6 ರ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (iii) ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6 ; ದಾಳದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 1,2,3,4,5 ಮತ್ತು 6

(i) ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 2, 3 ಮತ್ತು 5⇒ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 3 ⇒ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) 2 ಮತ್ತು 6ರ ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 3, 4 ಮತ್ತು 5⇒ 2ರಿಂದ6ರ ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 3

2 ರಿಂದ 6ರ ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(iii) ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 1, 3 ಮತ್ತು 5⇒ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 3⇒ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

14. ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. (i) ಒಂದು ಕೆಂಪು ರಾಜ (ii) ಒಂದು ಮುಖ (ಗೌರವಾನ್ವಿತ) ಕಾರ್ಡ್(iii) ಒಂದು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಮುಖ (ಗೌರವಾನ್ವಿತ) ಕಾರ್ಡ್ (iv) ಹಾರ್ಟ್‌ನ ಜ್ಯಾಕ್ (v) ಒಂದು ಸ್ಪೇಡ್ (vi) ಡೈಮಂಡ್‌ನ ರಾಣಿ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 52

(i) ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ರಾಜರ ಸಂಖ್ಯೆ = 2⇒ ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ರಾಜನನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

(ii) ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಸಮಖ್ಯೆ = 12⇒ ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

(iii) ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು = 6⇒ ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

(iv) ಹಾರ್ಟ್ ಜಾಕ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $=1 \Rightarrow$ ಹಾರ್ಟ್ ಜಾಕ್ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{1}{52}$

(v) ಸ್ಪೇಡ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 13 \Rightarrow$ ಸ್ಪೇಡ್ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

(vi) ಡೈಮಂಡಿನ ರಾಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 1 \Rightarrow$ ಡೈಮಂಡಿನ ರಾಣಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{1}{52}$

15. ಡೈಮಂಡ್‌ನ 5 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಾದ, 10, ಜ್ಯಾಕ್, ರಾಣಿ, ರಾಜ ಮತ್ತು ಏಸ್‌ಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಮುಖ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಇರುವಂತೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಲಾಗಿದೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(i) ಆ ಕಾರ್ಡ್ ರಾಣಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) ರಾಣಿ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದು ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರಿಸಿ, ಎರಡನೇ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಅದು a) ಒಂದು ಏಸ್ b) ಒಂದು ರಾಣಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಟ್ಟು ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 5

(i) ಒಟ್ಟು ರಾಣಿ $= 1 \Rightarrow$ ರಾಣಿಯನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{1}{5}$

(ii) ರಾಣಿ ಕಾರ್ಡ್ ತೆಗೆದು ಪಕ್ಕಕ್ಕಿರಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು = 4

(a) ಏಸ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 1 \Rightarrow$ ಏಸ್‌ನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{1}{4}$

(b) ಒಟ್ಟು ರಾಣಿ $= 0 \Rightarrow$ ರಾಣಿಯನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{0}{4} = 0$

16. 12 ದೋಷಪೂರಿತ ಪೆನ್‌ಗಳು ಆಕಸ್ಮಿಕವಾಗಿ 132 ಉತ್ತಮ ಪೆನ್‌ಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಕೊಂಡಿವೆ. ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ನೋಡಿದ ಕೂಡಲೇ ಅದು ದೋಷಪೂರಿತವೇ? ಅಲ್ಲವೇ? ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ಗುಂಪಿನಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೊರತೆಗೆದ ಪೆನ್ ಉತ್ತಮವಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೋಷಪೂರಿತ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 12 ; ಉತ್ತಮ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 132 \Rightarrow$ ಒಟ್ಟು ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 132 + 12 = 144$

ಹೊರ ತೆಗೆದ ಪೆನ್ನು ಉತ್ತಮ ಪೆನ್ನು ಆಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 132

ಹೊರ ತೆಗೆದ ಪೆನ್ನು ಉತ್ತಮ ಪೆನ್ನು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{132}{144} = \frac{11}{12}$

17. (i) 20 ಬಲ್ಬ್‌ಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 4 ಬಲ್ಬ್‌ಗಳು ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿವೆ. ಗುಂಪಿನಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಬಲ್ಬನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದು ದೋಷಪೂರಿತ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) (i) ರಲ್ಲಿ ಹೊರ ತೆಗೆದ ಬಲ್ಬ್ ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿರದಿದ್ದರೂ ಸಹ ಅದನ್ನು ಬಲ್ಬ್ ಗಳ ಗುಂಪಿನಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿದೆ. ಈಗ ಉಳಿದ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳಿಂದ ಒಂದು ಬಲ್ಬ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಹೊರ ತೆಗೆದರೆ ಈ ಬಲ್ಬ್ ದೋಷಪೂರಿತ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(i) ಒಟ್ಟು ಬಲ್ಬುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 20; ದೋಷಪೂರಿತ ಬಲ್ಬುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4

ದೋಷಪೂರಿತ ಬಲ್ಬು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

(ii) (i) ರಲ್ಲಿ ದೋಷಪೂರಿತ ಬಲ್ಬು ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಅದನ್ನು ಹೊಗಿಟ್ಟಾಗ ಉಳಿದ ಬಲ್ಬುಗಳು = 19

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು $= 19 \Rightarrow$ ದೋಷಪುರಿತವಲ್ಲದ ಬಲ್ಬು ಪಡೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 19 - 4 = 15

ದೋಷಪೂರಿತವಲ್ಲದ ಬಲ್ಬು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{15}{19}$

18. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ 90 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮೂದಾಗಿರುವ 90 ಬಿಲ್ಲೆಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದರೆ ಅದು (i) 2 ಅಂಕಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (ii) ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ (iii) 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಬವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಟ್ಟು ಬಿಲ್ಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 50

(i) ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆ $= 81 \Rightarrow$ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{81}{90} = \frac{9}{10}$

(ii) ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 ಮತ್ತು 81

ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು $= 9 \Rightarrow$ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$

(iii) 5ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85ಮತ್ತು 90

5ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು $= 18 \Rightarrow$ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$

19. ಒಂದು ಮಗುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಾಳವಿದೆ. ಅದರ ಮುಖಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತಿವೆ. ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಿದೆ. i) A ii) D ಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6

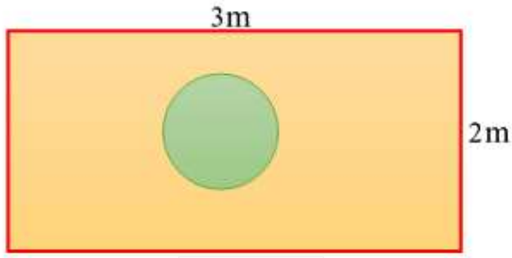
(i) A ಅಕ್ಷರವಿರುವ ಮುಖಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 2

A ಅಕ್ಷರವಿರುವ ಮುಖವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(ii) D ಅಕ್ಷರವಿರುವ ಮುಖಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 1

D ಅಕ್ಷರವಿರುವ ಮುಖವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $=\frac{1}{6}$

20. ಚಿತ್ರ 14.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನೀವು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಆಯತಾಕಾರದ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಬೀಳಿಸಿದ್ದೀರಿ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದು 1m ವ್ಯಾಸದ ವೃತ್ತಾಕಾರದೊಳಗೆ ನಿಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ: 14.6

(ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅಲ್ಲ)

ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= (3 \times 2)\ m^2 = 6m^2$

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\ m^2$

ದಾಳವು ವ್ಯಾಸದ ವೃತ್ತಾಕಾರದೊಳಗೆ ನಿಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $=\frac{\frac{\pi}{4}}{6}=\frac{\pi}{24}$

21. ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ 144 ಬಾಲ್‌ಪೆನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ 20 ಪೆನ್ನುಗಳು ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದವು ಉತ್ತಮವಾಗಿವೆ. ನೂರಿಯು ಪೆನ್ನು ಉತ್ತಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಖರೀದಿಸುತ್ತಾನೆ, ಆದರೆ ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಖರೀದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂಗಡಿಯವನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಕೆಗೆ ನೀಡುತ್ತಾನೆ.(i) ಅವಳು ಇದನ್ನು ಖರೀದಿಸುವ (ii) ಅವಳು ಇದನ್ನು ಖರೀದಿಸದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

ದೋಷಪೂರಿತ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 20

ಉತ್ತಮವಾಗಿರುವ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 144 - 20 = 124

(i) ಖರೀದಿಸುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 124 ⇒ ಸಮಬವನೀಯತೆ $=\frac{124}{144}=\frac{31}{36}$

(ii) ಖರೀದಿಸದಿರುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 20 ⇒ ಸಂಭವನೀಯತೆ $=\frac{20}{144}=\frac{5}{36}$

22. ಉದಾಹರಣೆ 13 ನ್ನು ನೋಡಿ (i) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ

ಘಟನೆ ಎರಡು ದಾಳಗಳ ಮೊತ್ತ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ಸಂಭವನೀಯತೆ	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು 'ಇಲ್ಲಿ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ಮತ್ತು 12 ಎಂಬ 11 ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{1}{11}$ ಎಂದು ವಾದಿಸುತ್ತಾನೆ. ನೀವು ಈ ವಾದವನ್ನು ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಾ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),(1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

n(S) = 6x6 = 36

(i) ಮೊತ್ತ 2 ಆಗಿರುವುದು = (1,1)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,2) ಮತ್ತು (2,1)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,3); (3,1); ಮತ್ತು (2,2)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,4); (4,1); (2,3); ಮತ್ತು (3,2)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,5); (5,1); (2,4); (4,2); ಮತ್ತು (3,3)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,6); (6,1); (5,2); (2,5); (4,3); ಮತ್ತು (3,4)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (2,6); (6,2); (3,5); (5,3); ಮತ್ತು (4,4)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (3,6); (6,3); (4,5); ಮತ್ತು (5,4)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (4,6); (6,4) ಮತ್ತು (5,5)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (5,6) ಮತ್ತು (6,5)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (6,6)

ಘಟನೆ ಎರಡು ದಾಳಗಳ ಮೊತ್ತ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ಸಂಭವನೀಯತೆ	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) ಒಪ್ಪಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಅವು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

23. ಒಂದು ಆಟದಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೂಪಾಯಿಯ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಸಲದ ಫಲಿತವನ್ನು ದಾಖಲಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹನೀಫನು, ಪ್ರತಿ ಸಲವೂ ಒಂದೇ ಫಲಿತಾಂಶ ಅಂದರೆ, 3 ಶಿರಗಳು ಅಥವಾ 3 ಪುಚ್ಛಗಳು ಬಂದರೆ, ಆಟದಲ್ಲಿ ಗೆಲ್ಲುತ್ತಾನೆ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಸೋಲುತ್ತಾನೆ. ಹನೀಫನು ಆಟದಲ್ಲಿ ಸೋಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಫಲಿತಗಳು = HHH, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, TTT

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 8

ಹನೀಫನು ಸೋಲುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು – HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT

ಹನೀಫನು ಸೋಲುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6

ಹನೀಫನು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಸೋಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

24. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು 2 ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ. (I) ಎರಡೂ ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬರದಿರುವ (ii) ಕನಿಷ್ಟ ಒಂದು ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

[ಸುಳುಹು: ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಎಸೆಯುವುದು ಮತ್ತು ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆಯುವುದು, ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು]

(i) ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6 x 6 = 36

ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),(1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4),(4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,6)

ಎರಡೂ ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬಾರದಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 25

ಎರಡೂ ಸಲ ಮೇಲೆ 5 ಬಾರದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{25}{36}$

(ii) 5 ಕನಿಷ್ಟ ಒಂದು ಬಾರಿ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = 1 – ಎರಡೂ ಸಲ ಮೇಲೆ 5 ಬಾರದಿರುವ

ಸಂಭವನೀಯತೆ $= 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

25. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಾದಗಳು ಸರಿಯಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಯಾವುವು ತಪ್ಪಾಗಿವೆ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ.

(i) ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ. ಮೂರು ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಇರುತ್ತವೆ – ಎರಡು ಶಿರಗಳು, ಎರಡು ಪುಚ್ಛಗಳು ಅಥವಾ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಒಂದರಂತೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{1}{3}$

(ii) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ, ಎರಡು ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು ಇರುತ್ತವೆ – ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು–$\frac{1}{2}$

(i) ತಪ್ಪು

ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯುಳ್ಳ ಘಟನೆಗಳಲ್ಲ. ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಘಟನೆಗಳು: (H,H); (H,T); (T,H) ಮತ್ತು (T,T)

ಎರಡು ಶಿರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{1}{4}$, ಒಂದು ಶಿರ ಮತ್ತು ಒಂದು ಪುಚ್ಛ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(ii)ಸರಿ – ಈ ಎರಡೂ ಘಟನೆಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯುಳ್ಳ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

****