YK

ಪರಿಷ್ಕೃತ ಪಠ್ಯ 2024–25

Class Notes New verson 2025–26

ಗಣಿತ

ಹತ್ತನೆಯ ತರಗತಿ

ಭಾಗ–1

Version 1.2

Copyright is preserved

Yakub S Koyyur, GHS Kayarthadka,
Belthangady Taluk, D.K.-574216

ಸಂಭವನೀಯ ನೀಲ ನಕಾಶೆ

ಕ್ರ.ಸಂ.	ವಿಭಾಗ	ಅಧ್ಯಾಯ	ಸಂಭವನೀಯ ಅಂಕಗಳು	ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳು
1	ಬೀಜಗಣಿತ	ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ	6	26
2		ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿ	8	
3		ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು	6	
4		ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು	6	
5	ಇತರ	ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	5	5
6	ಇತರ	ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತ	7	7
7	ರೇಖಾಗಣಿತ	ತ್ರಿಭುಜಗಳು	10	10

ಪರಿವಿಡಿ

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಅಧ್ಯಾಯ	ಪುಟ ಸಂಖ್ಯೆ
1	ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	3 - 7
2	ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು	8 - 13
3	ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿ	14 - 34
4	ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು	35 - 47
5	ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು	48 - 76
6	ತ್ರಿಭುಜಗಳು	77 - 94
7	ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತ	95 - 110

1 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

1.1 ಕಲಿಕಾಂಶಗಳು:

- ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲಪ್ರಮೇಯ
- ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
- ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು
- HCF(a, b) x LCM (a, b) = a x b
- ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ/Irrational Number

1.2 ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ:

ಪ್ರಮೇಯ 1.2 (ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ): ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಈ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯು, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಘಟಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ ಅನನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಒಂದು ಅನನ್ಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ದೊರೆಯುವಿಕೆಯು ವಿಭಿನ್ನ ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ಇದನ್ನು $3 \times 5 \times 7 \times 2$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು ಅಥವಾ ಇನ್ಯಾವುದೇ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1: 4^n ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ n ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. n ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ 4^n ಎಂಬುದು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

n ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ,

4^n ಇದು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ, ಅದು 5 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು.

$\Rightarrow 4^n$ ಇದರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ 5ನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರಬೇಕು.

ಆದರೆ, $4^n = (2)^{2n}$ ಆಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ 4^n ದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ n ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ 4^n ಇದು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: 6 ಮತ್ತು 20 ರ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $6 = 2^1 \times 3^1$

$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$

ಮ.ಸಾ.ಅ. (6, 20) = 2 ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. (6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಮತ್ತು b ಗಳಿಗೆ, ಮ.ಸಾ.ಅ. (a, b) x ಲ.ಸಾ.ಅ (a, b) = a x b

ಉದಾಹರಣೆ 3: 96 ಮತ್ತು 404 ರ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: 96 ಮತ್ತು 404ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$96 = 2^5 \times 3$;

$404 = 2^2 \times 101$

$\therefore$ ಮ.ಸಾ.ಅ. $= 2^2 = 4$ ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. (96, 404) $= \frac{96 \times 404}{4} = 9696$

ಉದಾಹರಣೆ 4: 6, 72 ಮತ್ತು 120 ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ.ಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$6 = 2 \times 3$; $72 = 2^3 \times 3^2$; $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

∴ ಮ.ಸಾ.ಅ. (6, 72, 120) $= 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

∴ ಲ.ಸಾ.ಅ. (6, 72, 120) $= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 8 \times 9 \times 5 = 360$

ಮ.ಸಾ.ಅ. – ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆ ಘಾತವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರತಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ
ಲ.ಸಾ.ಅ. – ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನನ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚು ಘಾತವನ್ನು ಹೊಂದೊರುವ ಪ್ರತಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ದ

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

ಪರಿಹಾರ:

(i) $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 5 \times 7$

(ii) $156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 13$

(iii) $3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17 = 3^2 \times 5^2 \times 17$

(iv) $5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $7429 = 17 \times 19 \times 23$

2. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಜೋಡಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಅ. ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಲ.ಸಾ.ಅ. x ಮ.ಸಾ.ಅ. = ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

(i) 26 ಮತ್ತು 91 (ii) 510 ಮತ್ತು 92 (iii) 336 ಮತ್ತು 54.

ಪರಿಹಾರ:

(i) $26 = 2 \times 13$; $91 = 7 \times 13$

ಮ.ಸಾ.ಅ. = 13

ಲ.ಸಾ.ಅ. $= 2 \times 7 \times 13 = 182$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 26 \times 91 = 2366$

ಲ.ಸಾ.ಅ. x ಮ.ಸಾ.ಅ. $= 13 \times 182 = 2366$

∴ ಲ.ಸಾ.ಅ. x ಮ.ಸಾ.ಅ. = ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

(ii) $510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$

$92 = 2 \times 2 \times 23$

ಮ.ಸಾ.ಅ. = 2

ಲ.ಸಾ.ಅ. $= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23 = 23460$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 510 \times 92 = 46920$

ಲ.ಸಾ.ಅ. x ಮ.ಸಾ.ಅ. $= 2 \times 23460 = 46920$

∴ಲ.ಸಾ.ಅ. x ಮ.ಸಾ.ಅ. = ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

(iii) $336 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$

$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$

ಮ.ಸಾ.ಅ. $= 2 \times 3 = 6$

ಲ.ಸಾ.ಅ. $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 = 3024$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 336 \times 54 = 18144$

ಲ.ಸಾ.ಅ. x ಮ.ಸಾ.ಅ. $= 6 \times 3024 = 18144$

∴ಲ.ಸಾ.ಅ. x ಮ.ಸಾ.ಅ. = ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

3. ಕೆಳಗಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಅ.ಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 12, 15 ಮತ್ತು 21 (ii) 17, 23 ಮತ್ತು 29 (iii) 8, 9 ಮತ್ತು 25

ಪರಿಹಾರ:

(i) $12 = 2 \times 2 \times 3$

$15 = 3 \times 5$

$21 = 3 \times 7$

ಮ.ಸಾ.ಅ. = 3;

ಲ.ಸಾ.ಅ. $= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

(ii) $17 = 1 \times 17$

$23 = 1 \times 23$

$29 = 1 \times 29$

ಮ.ಸಾ.ಅ. = 1

ಲ.ಸಾ.ಅ. $= 1 \times 17 \times 19 \times 23 = 11339$

(iii) $8 = 1 \times 2 \times 2 \times 2$

$9 = 1 \times 3 \times 3$

$25 = 1 \times 5 \times 5$

ಮ.ಸಾ.ಅ. = 1

ಲ.ಸಾ.ಅ. $= 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 1800$

4. (306, 657)ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. = 9 ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಲ.ಸಾ.ಅ x ಮ.ಸಾ.ಅ. = ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

∴ ಲ.ಸಾ.ಅ. (306×657)

$= \frac{306 \times 657}{9} = 22338$

5. n ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ 6^n ಇದು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳಬಹುದೇ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ n ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಪರಿಹಾರ:

ಇಲ್ಲಿ, n ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ.

6^n ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ ಅದು 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗಬೇಕು. ಆಥವಾ 5 ಅದರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಬೇಕು.
ಆದರೆ, 6 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 2 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ 5 ಇದು 6 ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿಲ್ಲ.

$\Rightarrow 6^n = (2 \text{ x } 3)^n \Rightarrow 6^n$ ಇದರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತಗಳಲ್ಲಿ 5 ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ 6^n ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

6. 7 x 11 x 13 + 13 ಮತ್ತು 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 + 5 ಇವು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ ಏಕೆ? ವಿವರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$7 \times 11 \times 13 + 13 = 13\,(7\text{x}11 + 1) = 13(77 + 1) = 13\,(78) = 13\text{x}2\text{x}3\text{x}13$
ಎರಡು ಅಥವಾ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ 7 x 11 x 13 + 13 ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ

$\mathbf{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5} = 5(7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1) = 5(1008 + 1) = 5(1009)$
ಎರಡು ಅಥವಾ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ

7. ಒಂದು ಕ್ರೀಡಾಂಗಣದ ಸುತ್ತಲೂ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಮಾರ್ಗವಿದೆ. ಸೋನಿಯಾಳು ಆ ಕ್ರೀಡಾಂಗಣದ ಒಂದು ಸುತ್ತನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು 18 ನಿಮಿಷಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ರವಿಯು ಅದೇ ಸುತ್ತನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು 12 ನಿಮಿಷಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಒಂದೊಮ್ಮೆ ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಆರಂಭಿಸಿ, ಏಕಮುಖವಾಗಿ ಚಲಿಸಿದರೆ, ಎಷ್ಟು ನಿಮಿಷಗಳ ನಂತರ ಅವರು ಪುನಃ ಆರಂಭಿಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತಾರೆ?

ಪರಿಹಾರ:

ಅವರು ಸಮಯಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ದ ಬೆಳೆಗೆ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತಾರೆ.

$18 = 2 \times 3 \times 3$

$12 = 2 \times 2 \times 3$

ಲ.ಸಾ.ಅ. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

ಆದ್ದರಿಂದ **36 ನಿಮಿಷಗಳ** ನಂತರ ಅವರು ಪುನ: ಆರಂಭಿಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತಾರೆ.

1.3 ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪುನರಾವಲೋಕನ:

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಹಾಗೂ ಇಲ್ಲಿ $p, q \in Z, q \neq 0$

ಪ್ರಮೇಯ 1.2: ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ **p** ಯು a^2 ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಆಗ **p** ಯು **a** ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ **a** ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 1.3: $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ:ಊಹೆ: $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ [p,q∈ Z, $q \neq 0$ ಮತ್ತು (p,q)=1]

ಈಗ, $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}q = p$

$(\sqrt{2}q)^2 = p^2$ [ಎರಡೂ ಬದಿ ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿದಾಗ]

$\Rightarrow 2q^2 = p^2$ **--------- (1)**

$\Rightarrow$ 2, p^2 ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ $\Rightarrow$ 2, p ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. [ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

ಆದ್ದರಿಂದ $p = 2m$ ಆಗಿರಲಿ,

(1) $\Rightarrow 2q^2 = (2m)^2$

$\Rightarrow q^2 = 2m^2$

$\Rightarrow$2, q^2 ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ $\Rightarrow$ 2, q ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. [ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

ಆದ್ದರಿಂದ 2, p ಮತ್ತು q ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ಇದು ನಮ್ಮ ಊಹೆಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ: ಊಹೆ: $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ [p,q∈ Z, $q \neq 0$ ಮತ್ತು (p,q)=1]

ಈಗ, $\sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{3}q = p$

ಎರಡೂ ಬದಿ ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿದಾಗ,

$(\sqrt{3}q)^2 = p^2$

$\Rightarrow 3q^2 = p^2$ **--------------- (1)**

$\Rightarrow$ 3, p^2 ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ $\Rightarrow$ 3, p ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. [ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

ಆದ್ದರಿಂದ $p = 3m$ ಆಗಿರಲಿ,

(1) $\Rightarrow 3q^2 = (3m)^2$

$\Rightarrow q^2 = 3m^2$

$\Rightarrow$3, q^2 ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ $\Rightarrow$ 3, q ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. [ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

ಆದ್ದರಿಂದ 3, p ಮತ್ತು q ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ಇದು ನಮ್ಮ ಊಹೆಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ.

- **ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು**
- **ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ.**

ಉದಾಹರಣೆ 6: $5 - \sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ: ಊಹೆ:$5 - \sqrt{3}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\Rightarrow 5 - \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z$, $q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

$\Rightarrow 5 - \frac{p}{q} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{5q-p}{q} = \sqrt{3}$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{5q-p}{q}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು.

ಆದ್ದರಿಂದ $5 - \sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

ಉದಾಹರಣೆ 7: $3\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು

ಸಾಧನೆ:ಊಹೆ:$3\sqrt{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\Rightarrow 3\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z$, $q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{3q}$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{p}{3q}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು.

ಆದ್ದರಿಂದ $3\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. $\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ:ಊಹೆ: $\sqrt{5}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z$, $q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

ಈಗ, $\sqrt{5} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{5}q = p$

$(\sqrt{5}q)^2 = p^2$ [ಎರಡೂ ಬದಿ ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿದಾಗ]

$\Rightarrow \mathbf{5q^2 = p^2}$ **(1)**

$\Rightarrow 5$, p^2 ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ $\Rightarrow 5$, p ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. [ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

ಆದ್ದರಿಂದ $p = 3m$ ಆಗಿರಲಿ,

(1) $\Rightarrow 5q^2 = (5m)^2$

$\Rightarrow \mathbf{q^2 = 5m^2}$

$\Rightarrow 5$, q^2 ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ $\Rightarrow 5$, q ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. [ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

ಆದ್ದರಿಂದ 5, p ಮತ್ತು q ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಇದು ನಮ್ಮ ಊಹೆಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ.

2. $3 + 2\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ:ಊಹೆ: $3 + 2\sqrt{5}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\Rightarrow 3 + 2\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z$, $q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

$\Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{p}{q} - 3$

$\Rightarrow\sqrt{5} = \frac{p-2q}{2q}$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{p-2q}{2q}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.
ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು.

ಆದ್ದರಿಂದ $3 + 2\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

ಪರಿಹಾರ:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ಊಹೆ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z$, $q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

$\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2p}{q}$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{2p}{q}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.
ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು.

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

(ii) $7\sqrt{5}$

ಊಹೆ: $7\sqrt{5}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$7\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z$, $q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

$\Rightarrow\sqrt{5} = \frac{p}{7q}$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{p}{7q}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.
ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು.

ಆದ್ದರಿಂದ $7\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

(iii) $6 + \sqrt{2}$

ಊಹೆ: $6 + \sqrt{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\Rightarrow 6 + \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z$, $q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} - 6 \quad \Rightarrow\sqrt{2} = \frac{p-6q}{2}$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{p-6q}{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು.

ಆದ್ದರಿಂದ $6 + \sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

****

2 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು

ಕಲಿಕಾಂಶಗಳು:

- ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು
- ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಆದರ್ಶರೂಪ
- ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಡಿಗ್ರಿ (ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ)
- ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ
- ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ ಕೊಟ್ಟಾಗ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ

ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ ಅಥವಾ ಡಿಗ್ರಿ

p(x) ಎಂಬುದು **x** ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾದರೆ, **p(x)** ದಲ್ಲಿನ **x** ದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಸೂಚಿಯನ್ನು ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ **p(x)**ನ ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ ಅಥವಾ ಡಿಗ್ರಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

ಡಿಗ್ರಿ **1** ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$4x + 2$ ಎಂಬುದು x ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 1 ಆಗಿದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ: $ax + b$ ಇಲ್ಲಿ a, b ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಆಗಿದೆ

ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಯನ್ನು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$2y^2 - 3y + 4$ ಎಂಬುದು y ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ: $ax^2 + bx + c$ ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $a \neq 0$ ಆಗಿದೆ.

ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

ಡಿಗ್ರಿ 3 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಯನ್ನು ಘನಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$5x^3 – 4x^2 + 2 - \sqrt{2}$ ಎಂಬುದು x ಚರಾಕ್ಷರುವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಯಾಗಿದ್ದು ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 3 ಆಗಿದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ: $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ಇಲ್ಲಿ a, b, c, d ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಆಗಿದೆ.

ನೆನಪಿಡಿ: ಚರಾಕ್ಷರವು ಋಣಾತ್ಮಕ ಘಾತ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅಥವಾ ಅದರ ಘಾತಾಂಕವು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ: $\sqrt{x} + 1$, $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{x^3+x^2-1}$

p(x) ಎಂಬುದು x ನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು k ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, p(x) ನಲ್ಲಿ x ಗೆ k ಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಬೆಲೆಯನ್ನು x = k ಆದಾಗ p(x) ನ ಬೆಲೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು p(k) ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: $x = -1$ ಆದಾಗ $p(x) = x^2 – 3x – 4$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

$p(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 4 = 0$

$p(-1) = 0 = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, –1 ಎಂಬುವುದು $x^2 – 3x – 4$ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯಾಗಿದೆ.

k ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು, $p(k) = 0$ ಆದರೆ k ಯನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ p(x) ನ ಶೂನ್ಯತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

k ಎಂಬುದು $p(x) = ax + b$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಯಾದರೆ, ಆಗ $p(k) = ak + b = 0$ ಅಂದರೆ $k = -\frac{b}{a}$

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax + b$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಯು $-\frac{b}{a}$

2.2 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಅರ್ಥ:

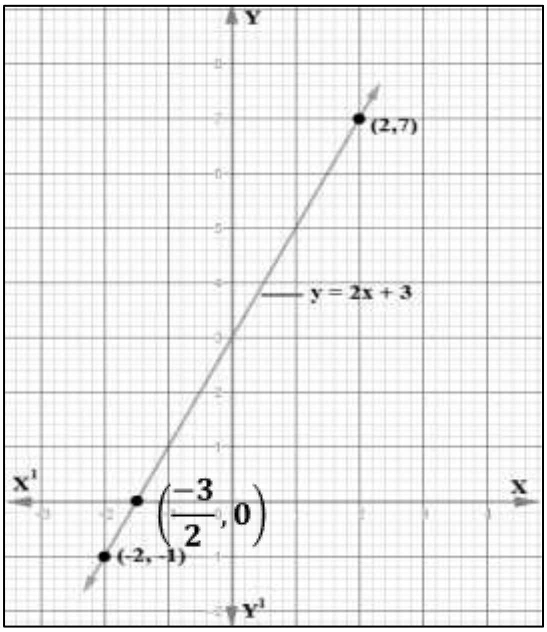
ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

ಉದಾಹರಣೆ: $y = 2x + 3$

x	-2	2
y	-1	7

$y = 2x + 3$ರ ನಕ್ಷೆಯು $(-2, -1)$ ಮತ್ತು $(2, 7)$ ಈ ಬಿಂದುಗಳಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

ಆ ರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು $\left(\frac{-3}{2},\ 0\right)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.



$\therefore$ **$\frac{-3}{2}$ ಎಂಬುವುದು $y = 2x + 3$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಯಾಗಿದೆ.**

$\therefore$ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax + b$ $(a \neq 0)$ ಎಂಬುದು ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು,

ಇದು $y = ax + b$ ನಕ್ಷೆಯು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ x ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

ಉದಾಹರಣೆ: $y = x^2 - 3x - 4$

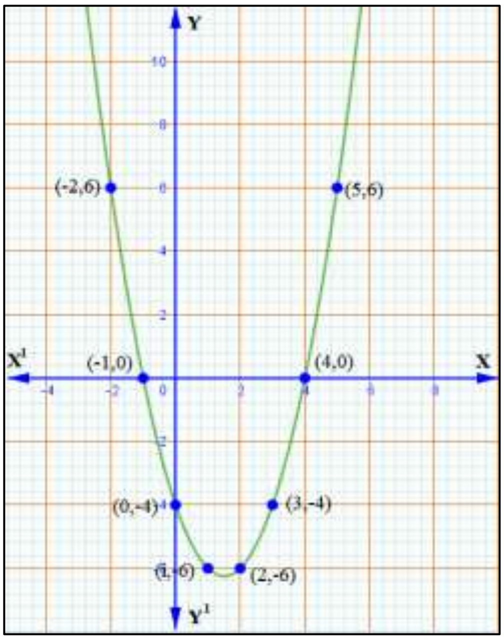
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿದಾಗ ನಾವು ವಕ್ರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿರಬಹುದು ಇಲ್ಲವೇ ಕೆಳಮುಖ ವಾಗಿರಬಹುದು. ಅಂತಹ ರೇಖೆಯನ್ನು **ಪರವಲಯ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$y = x^2 - 3x - 4$ರ ನಕ್ಷೆಯು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಛೇದಿಸುವ x ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು –1 ಮತ್ತು 4 ಆಗಿವೆ.

ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^2 - 3x - 4$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $y = x^2 - 3x - 4$ ರ ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು –1 ಮತ್ತು 4 ಆಗಿವೆ.



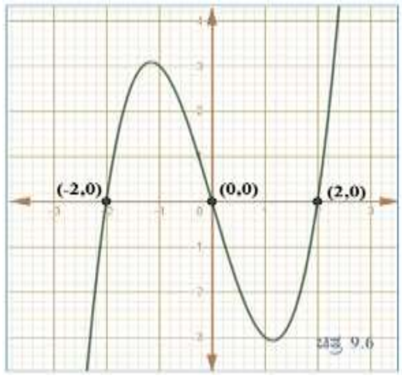
ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಎರಡು ಸಮನಾದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು (ಅಂದರೆ ಒಂದೇ ಶೂನ್ಯತೆ) ಹೊಂದಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದೇ ಇರಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಗರಿಷ್ಠ 2 ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು.

ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

ಉದಾಹರಣೆ: $y = x^3 - 4x$

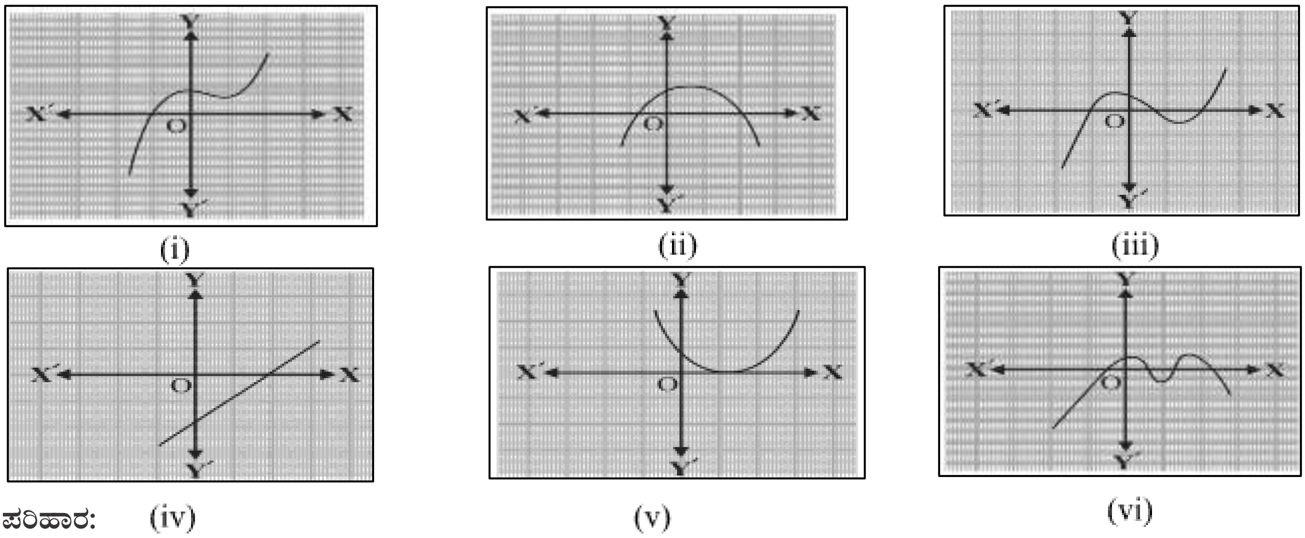
x	-2	-1	0	1	2
y	0	3	0	-3	0

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ –2, 0 ಮತ್ತು 2 ಇವು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^3 - 4x$ ದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ. –2, 0 ಮತ್ತು 2 ಇವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ $y= x^3 - 4x$ ದ ನಕ್ಷೆಯು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ X – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ. ವಕ್ರರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಛೇದಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ x –ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಮಾತ್ರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.



ಯಾವುದೇ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಗರಿಷ್ಠ 3 ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಡಿಗ್ರಿ 3 ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಗರಿಷ್ಠ 3 ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಚಿತ್ರ 9.9ರಲ್ಲಿನ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಸಹ y = p(x) ದ ನಕ್ಷೆಯಾಗಿದ್ದು, ಇಲ್ಲಿ p(x) ಎಂಬುದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಕ್ಷೆಗೂ p(x) ದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



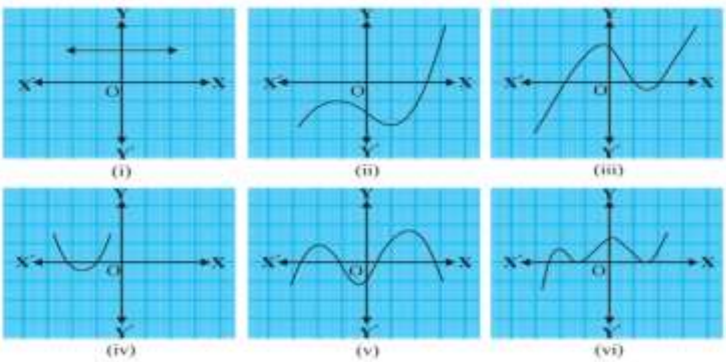
ಪರಿಹಾರ:

ನಕ್ಷೆ (i) ಶೂನ್ಯತೆ 1 ,ನಕ್ಷೆ (ii) ಶೂನ್ಯತೆಗಳು 2. ನಕ್ಷೆ (iii) ಶೂನ್ಯತೆಗಳು 3

ನಕ್ಷೆ (iv) ಶೂನ್ಯತೆ 1. ನಕ್ಷೆ (v) ಶೂನ್ಯತೆ 1. ನಕ್ಷೆ (vi) ಶೂನ್ಯತೆಗಳು 4

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. y = p(x) ದ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಚಿತ್ರ 2.10ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ್ದು, ಇಲ್ಲಿ p(x) ಎಂಬುದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ p(x) ದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(i) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 0 ಆಗಿದೆ.
(ii) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 1 ಆಗಿದೆ.
(iii) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 3 ಆಗಿದೆ.
(iv) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 2 ಆಗಿದೆ.
(v) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 4 ಆಗಿದೆ.
(vi) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 3 ಆಗಿದೆ.

2.3. ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಹಾಗೂ ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ

α ಮತ್ತು β ಗಳು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $(x - \alpha)$ ಮತ್ತು $(x - \beta)$ ಗಳು $p(x)$ದ

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

ಉದಾಹರಣೆ 2: $x^2 + 7x + 10$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: $x^2 + 7x + 10 = x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x(x + 5) + 2(x + 5)$

$= (x + 2)(x + 5)$

$\therefore x = -2$ ಅಥವಾ $x = -5$ ಆದಾಗ $x^2 + 7x + 10$ ರ ಬೆಲೆಯು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore -2$ ಮತ್ತು -5 ಇವು $x^2 + 7x + 10$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= (-2) + (-5) = -7$

$= \frac{-7}{1} = \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= (-2) \times (-5)$

$= 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಉದಾಹರಣೆ 3: $x^2 - 3$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$\therefore x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

$\therefore \sqrt{3}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{3}$ ಇವು $x^2 - 3$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \sqrt{3} + -\sqrt{3} = 0 = \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ$= (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಹಾಗೂ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ -3 ಮತ್ತು 2 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $ax^2 + bx + c$ ಯು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ α ಮತ್ತು βಗಳು ಅದರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

$\therefore \alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a}$ ಮತ್ತು $\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 1$ ಆದರೆ, ಆಗ $b = 3$ ಮತ್ತು $c = 2$

ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $= x^2 + 3x + 2$

ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವೆ ಸಂಬಂಧ:

α, β, γ ಗಳು $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ಎಂಬ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ, ಆಗ,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s - 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$ (iv) $4u^2 - 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

ಪರಿಹಾರ:

(i) $x^2 - 2x - 8$

$= x^2 - 4x + 2x - 8$

$= (x - 4) + 2(x - 4)$

$= (x - 4)(x + 2)$

$\Rightarrow x = 4$ ಮತ್ತು $x = -2$ ಗಳು $x^2 - 2x - 8$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ = 4 + (-2) = 2 = $\frac{-(-2)}{1}$ = $\frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = (4)(−2) = −8 = $\frac{-8}{1}$ = $\frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(ii) $4s^2 - 4s + 1$

$= 4s^2 - 2s - 2s + 1$

$= 2s(s - 1) - 1(2s - 1)$

$= (2s - 1)(2s - 1)$

$\Rightarrow s = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $s = \frac{1}{2}$ಗಳು $4s^2 - 4s + 1$ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \frac{-(-4)}{4}$ = $\frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{4}$ = $\frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(iii) $6x^2 - 3 - 7x$

$= 6x^2 - 7x - 3$

$= 6x^2 - 9x + 2x - 3$

$= 3x(2x - 3) + 1(2x - 3)$

$= (3x + 1)(2x - 3)$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು $x = \frac{3}{2}$ಗಳು $6x^2 - 3 - 7x$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ = $-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} = 1 = \frac{-2+9}{6} = \frac{7}{6} = \frac{-(-7)}{6}$ $\frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$;

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $-\frac{1}{3}$ x $\frac{3}{2}$ = $\frac{-3}{6}$ = $\frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(iv) $4u^2 + 8u$

$= 4u^2 + 8u + 0$

$= 4u(u + 2)$

$\Rightarrow u = 0$ ಮತ್ತು $u = -2$ ಗಳು $4u^2 + 8u$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ = 0 + (-2) = -2 = $\frac{-(8)}{4}$ = $\frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = 0 x −2 = 0 = $\frac{0}{4}$ = $\frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(v) $t^2 - 15$

$= t^2 - 0.t - 15$

$= (t - \sqrt{15})(t + \sqrt{15})$

$\Rightarrow t = \sqrt{15}$ ಮತ್ತು $t = -\sqrt{15}$ ಗಳು $t^2 - 15$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ = $\sqrt{15} + (-\sqrt{15}) = 0 = \frac{0}{1}$ = $\frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $\sqrt{15}$ x $(-\sqrt{15})$= -15 = $\frac{-15}{1}$ = $\frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(vi) $3x^2 - x - 4$

$= 3x^2 - 4x + 3x - 4$

$= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$

$= (3x - 4)(x + 1)$

$\Rightarrow x = \frac{4}{3}$ ಮತ್ತು $x = -1$ ಗಳು $3x^2 - x - 4$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ = $\frac{4}{3} + (-1) = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3} = \frac{-(-1)}{3}$ $\frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $\frac{4}{3} + (-1) = -\frac{4}{3} = \frac{-4}{1}$ = $\frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಹಾಗೂ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\frac{1}{4}$, -1 (ii) $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ (iii) 0, $\sqrt{5}$ (iv) 1, 1 (v) $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ (vi) 4, 1

ಪರಿಹಾರ:

(i) $\frac{1}{4}$, -1

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು ß ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + ß = \frac{1}{4} = \frac{-(-1)}{4} = \frac{-b}{a}$

$\alpha ß = -1 = \frac{-4}{4} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow$ a = 4, b = -1 ಮತ್ತು c = -4

∴ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $4x^2 - x - 4$

(ii) $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು ß ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + ß = \sqrt{2} = \frac{-(3\sqrt{2})}{3} = \frac{-b}{a}$

$\alpha ß = \frac{1}{3} = \frac{c}{a}$ $\Rightarrow$ a = 3, b = $-3\sqrt{2}$ ಮತ್ತು c = 1

∴ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $\mathbf{3x^2 - 3\sqrt{2} + 1}$

(iii) 0, $\sqrt{5}$

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು ß ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + ß = 0 = \frac{0}{4} = \frac{-b}{a}$

$\alpha ß = \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{c}{a}$ $\Rightarrow$ a = 1, b = 0 ಮತ್ತು c = $\sqrt{5}$

∴ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $\mathbf{x^2 + \sqrt{5}}$

(iv) 1, 1

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು ß ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + ß = 1 = \frac{-(-1)}{1} = \frac{-b}{a}$

$\alpha ß = 1 = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$ $\Rightarrow$ a = 1, b = -1 ಮತ್ತು c = 1

∴ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $\mathbf{x^2 - x + 1}$

(v) $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು ß ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + ß = -\frac{1}{4} = \frac{-1}{4} = \frac{-b}{a}$

$\alpha ß = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{c}{a}$ $\Rightarrow$ a = 4, b = 1 ಮತ್ತು c = 1

∴ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $\mathbf{4x^2 + x + 1}$

(vi) 4,1

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು ß ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + ß = 4 = \frac{-(-4)}{1} = \frac{-b}{a}$

$\alpha ß = 1 = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$ $\Rightarrow$ a = 1, b = -4 ಮತ್ತು c = 1

∴ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $\mathbf{x^2 - 4x + 1}$

****

3 ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು

ಕಲಿಕಾಂಶಗಳು

- ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ
- ಸಹಗುಣಕಗಳ ಅನುಪಾತಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧ
- ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರ
- ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸುವುದು
- ಆದೇಶ ವಿಧಾನ
- ವರ್ಜ್ಯ ವಿಧಾನ

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಅಖಿಲಾ ರೂ 20ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಜಾತ್ರಗೆ ಹೋಗುತ್ತಾಳೆ. ಅಲ್ಲಿ ಅವಳು ದೈತ್ಯಚಕ್ರದಲ್ಲಿ ಸವಾರಿ ಮಾಡಲು ಮತ್ತು ಹೂಪ್ಲಾ ಆಟವಾಡಲು ಬಯಸುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳು ಹೂಪ್ಲಾ ಆಟವಾಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯು, ದೈತ್ಯ ಚಕ್ರದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಸವಾರಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟು. ದೈತ್ಯ ಚಕ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸವಾರಿಗೆ ರೂ 3 ಮತ್ತು ಒಮ್ಮೆ ಹೂಪ್ಲಾ ಆಡಲು ರೂ 4 ಖರ್ಚಾಗುವುದಾದರೆ ಹಾಗೂ ಅವಳು ಒಟ್ಟು ರೂ 20 ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದ್ದರೆ, ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ರಚಿತವಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು,

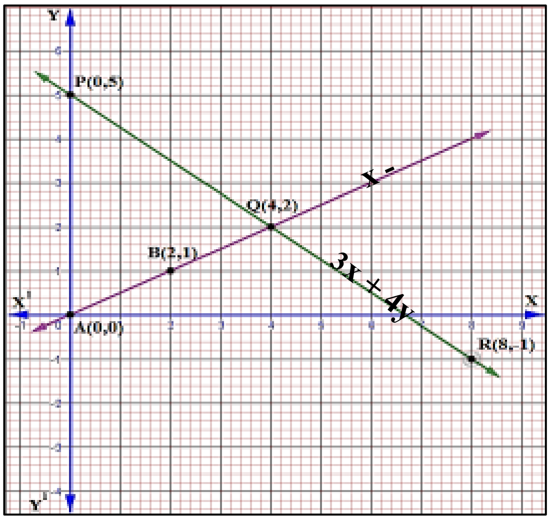
$y = \frac{1}{2}x \Rightarrow y = \frac{x}{2}$ --------- (1)

$3x + 4y = 20 \Rightarrow 4y = 20 - 3x \Rightarrow y = \frac{20-3x}{4}$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಕ್ಷಾರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಕನಿಷ್ಠ 2 ಪರಿಹಾರಗಳು ಬೇಕು.

x	0	2
$y = \frac{x}{2}$	2	1

x	0	4	8
$y=\frac{20-3x}{4}$	5	2	-1



ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ನಿಖರವಾದ ಅನನ್ಯವಾದ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಿದೆ. ಈ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು(4,2)

$\therefore x = 4, \quad y = 2$

ದೈತ್ಯಚಕ್ರ ಸವಾರಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4, ಹೂಪ್ಲಾ ಆಟಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 2 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$;

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ,

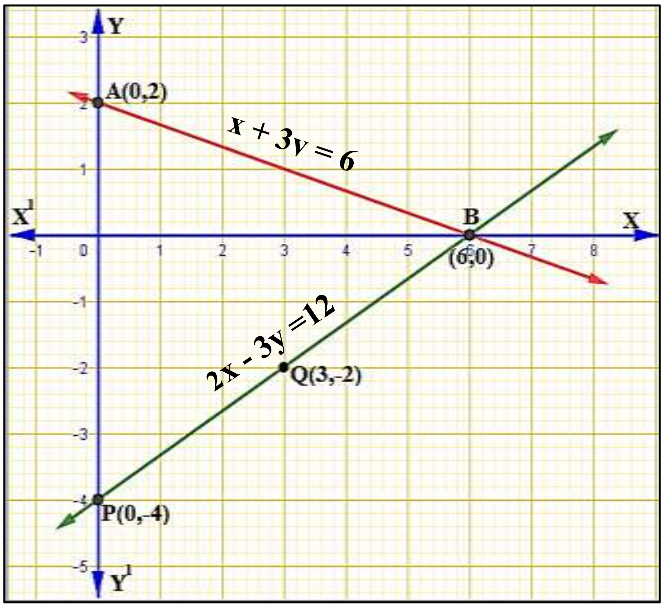
ಅನುಪಾತಗಳ ಹೋಲಿಕೆ	ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದಾಗ	ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಪರಿಹಾರ	ಸ್ಥಿರತೆ
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ	ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿದೆ	ಸ್ಥಿರ ಜೋಡಿ
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ	ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರವಿದೆ	ಅವಲಂಬಿತ ಸ್ಥಿರ ಜೋಡಿ
$\frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು	ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ	ಅಸ್ಥಿರ ಜೋಡಿ

ನಕ್ಷೆಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಪರಿಹಾರ:

ಉದಾಹರಣೆ 1: $x + 3y = 6$ (1)

$2x - 3y = 12$ (2)

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸ್ಥಿರವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ ನಕ್ಷಾ ಕ್ರಮದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.



$x + 3y = 6 \Longrightarrow 3y = 6 - x$

$\Longrightarrow y = \frac{6-x}{3}$

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

$2x - 3y = 12 \Longrightarrow 3y = 2x - 12$

$\Longrightarrow y = \frac{2x-12}{3}$

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	-4	-2

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ $x = 6$ ಮತ್ತು $y = 0$ ಎಂಬುದು ಪರಿಹಾರ. **ಅಂದರೆ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ.**

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲವೆ? ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವಿದೆಯೆ? ಅಥವಾ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆಯೆ? ಎಂಬುದನ್ನು ನಕ್ಷಾ ಕ್ರಮದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\mathbf{5x - 8y + 1 = 0}$ --------------------(1)

$\mathbf{3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0}$ --------------------(2)

ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು $\frac{5}{3}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$3\left(\frac{5}{3}\right)x - \frac{24}{5}\left(\frac{5}{3}\right)y + \frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}\right) = 0$

$\mathbf{5x - 8x + 1 = 0}$ -------------------- (3)

ಸಮೀಕರಣ (3) ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ (1) ಮತ್ತು (2) ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ (1) ಮತ್ತು (2) ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.

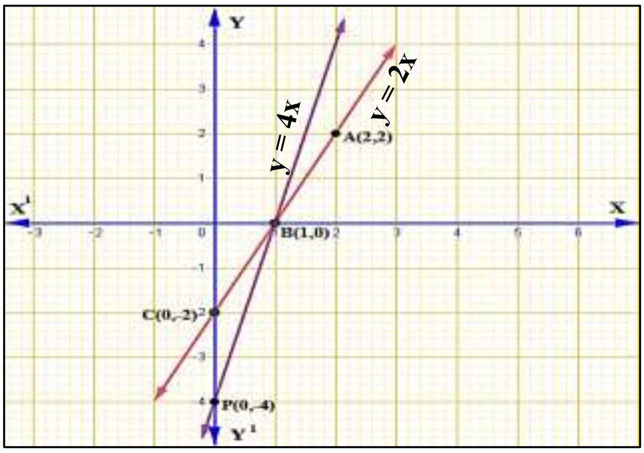
ಉದಾಹರಣೆ 3: ಚಂಪಾಳು ಕೆಲವು ಪ್ಯಾಂಟ್ ಮತ್ತು ಲಂಗಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಒಂದು ಮಾರಾಟ ಮಳಿಗೆಗೆ ಹೋದಳು. ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಖರೀದಿಸಿದಳೆಂದು ಅವಳ ಗೆಳತಿಯರು ಕೇಳಿದಾಗ ಅವಳು ಹೀಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿದಳು. 'ಖರೀದಿಸಿದಂತಹ ಲಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪ್ಯಾಂಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ಎರಡು ಕಡಿಮೆ. ಅಲ್ಲದೆ, ಖರೀದಿಸಿದಂತಹ ಲಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪ್ಯಾಂಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ನಾಲ್ಕು ಕಡಿಮೆ. ಚಂಪಾ ಎಷ್ಟು ಪ್ಯಾಂಟ್ ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಲಂಗಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅವಳ ಗೆಳತಿಯರಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡಿ.

ಪ್ಯಾಂಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ – x, ಲಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ – y ಆಗಿರಲಿ

ಮೇಲಿನ ನಿಬಂಧನೆಯಂತೆ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$y = 2x - 2$ (1)

$y = 4x - 4$ (2)



$y = 2x - 2$

x	2	1	0
$y = 2x - 2$	2	0	-2

$y = 4x - 4$

x	0	1
$y = 4x - 4$	-4	0

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು (1, 0) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ
ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಪರಿಹಾರ $x = 1,\ y = 0$
ಅಂದರೆ ಅವಳು ಒಂದು ಪ್ಯಾಂಟ್‌ನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಳು ಮತ್ತು ಅವಳು ಲಂಗವನ್ನು ಖರೀದಿಸಲಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1) ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ನಕ್ಷಾಕ್ರಮದಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) **X ತರಗತಿಯ 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ರಸಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿದರು. ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ, ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯು 4 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ರಸಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿದ ಹುಡುಗರ ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ $= x$, ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆ $= y$ ಆಗಿರಲಿ.

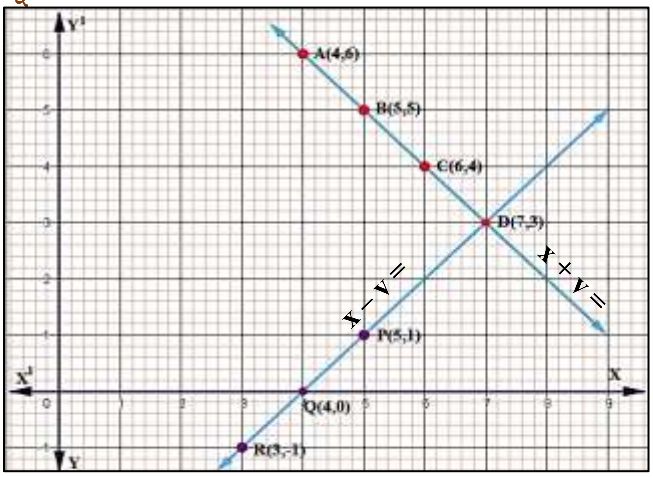
$x + y = 10$----------(1); $x - y = 4$ ---------(2)

$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$

x	5	4	6
$y = 10 - x$	5	6	4

$x - y = 4 \Rightarrow y = x - 4$

x	5	4	3
$y = x - 4$	1	0	−1



ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು (7, 3) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.
∴ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಪರಿಹಾರ $x = 7, y = 3$
ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ= 7, ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆ= 3

(ii) 5 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 7 ಪೆನ್ನುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ರೂ 50. ಹಾಗೆಯೇ 7 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 5 ಪೆನ್ನುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ರೂ 46. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಹಾಗೂ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1 ಪೆನ್ಸಿಲು ಬೆಲೆ $= x$, ರೂ, 1 ಪೆನ್ನು ಬೆಲೆ $= y$ ರೂ ಆಗಿರಲಿ.
ಮೇಲಿನ ನಿಬಂಧನೆಯಂತೆ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$5x + 7y = 50$------(1) $7x + 5y = 46$ -------(2)

$5x + 7y = 50 \Rightarrow 7y = 50 - 5x$

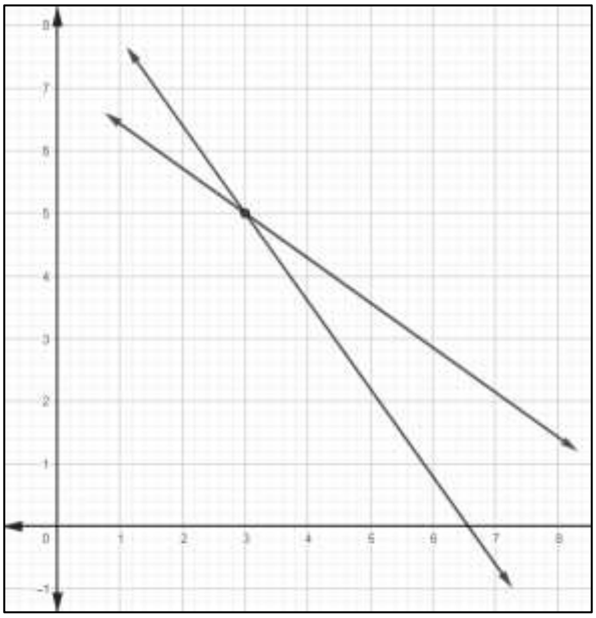
$\Rightarrow y = \frac{50-5x}{7}$

x	3	10	−4
$y = \frac{50-5x}{7}$	5	0	10

$7x + 5y = 46 \Rightarrow 5y = 46 - 7x$

$\Rightarrow y = \frac{46-7x}{5}$

x	8	3	−2
$y = \frac{46-7x}{5}$	−2	5	12



ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು(3,5)ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.
∴ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಪರಿಹಾರ **$x = 3, y = 5$**
∴ ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನ ಬೆಲೆ = ರೂ 3　　ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ = ರೂ 5

2) $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$, $\frac{c_1}{c_2}$ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವ ಮೂಲಕ, ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೆ? ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆಯೆ? ಅಥವಾ ಐಕ್ಯಗೊಂಡಿವೆಯೆ? ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $5x - 4y + 8 = 0$; $7x + 6y - 9 = 0$ **(ii)** $9x + 3y + 12 = 0$; $18x + 6y + 24 = 0$ **(iii)** $6x - 3y + 10 = 0$; $2x - y + 9 = 0$

(i) $5x - 4y + 8 = 0, 7x + 6y - 9 = 0$

ಇವುಗಳನ್ನು $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$a_1 = 5, b_1 = -4, \quad c_1 = 8$ ಮತ್ತು

$a_2 = 7, \; b_2 = 6, \quad c_2 = -9$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{7}, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

∴ ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿದೆ.

(ii) $9x + 3y + 12 = 0, 18x + 6y + 24 = 0$

ಇವುಗಳನ್ನು $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$a_1 = 9, \; b_1 = 3, \quad c_1 = 12$ ಮತ್ತು

$a_2 = 18, \; b_2 = 6, \quad c_2 = 24$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

∴ ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಇವುಗಳಿಗೆ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.

(iii) $6x - 3y + 10 = 0, 2x - y + 9 = 0$

ಇವುಗಳನ್ನು $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$a_1 = 6, \; b_1 = -3, \quad c_1 = 10$ ಮತ್ತು

$a_2 = 2, \; b_2 = -1, \quad c_2 = 9$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{6}{2} = 3, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-1} = 3, \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{10}{9}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

∴ ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಇವುಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ

3) $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ ಮತ್ತು $\frac{c_1}{c_2}$ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವ ಮೂಲಕ, ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆಯೆ? ಅಥವಾ ಅಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆಯೆ? ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $3x + 2y = 5 ; 2x - 3y = 7$ **(ii)** $2x - 3y = 8 ; 4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7 ; \; 9x - 10y = 14$ **(iv)** $5x - 3y = 11 ; -10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8 ; \; 2x + 3y = 12$

(i) $3x + 2y = 5 ;$

$2x - 3y = 7$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-3}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ. ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿದೆ.

(ii) $\mathbf{2x - 3y = 8}$;

$\mathbf{4x - 6y = 9}$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{8}{9}$

$\therefore \frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

∴ ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಇವುಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರಗಳಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ ಅಸ್ಥಿರ ಜೋಡಿಯಾಗಿವೆ.

(iii) $\mathbf{\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7}$;

$\mathbf{9x - 10y = 14}$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{3}{2}}{9} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{6}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{\frac{5}{3}}{-10} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{-10} = -\frac{1}{6}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

∴ ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ. ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿದೆ.

(iv) $\mathbf{5x - 3y = 11}$,

$\mathbf{-10x + 6y = -22}$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$,

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{11}{-22} = -\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

∴ ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಇವುಗಳಿಗೆ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಈ ಜೋಡಿ ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ.

(v) $\mathbf{\frac{4}{3}x + 2y = 8}$;

$\mathbf{2x + 3y = 12}$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{3}$,

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

∴ ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಇವುಗಳಿಗೆ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಈ ಜೋಡಿ ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ.

4) ಮುಂದೆ ನೀಡಿದವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ/ಅಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ? ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದರೆ, ನಕ್ಷಾಕ್ರಮದಿಂದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

(i) $x + y = 5,\ 2x + 2y = 10$ **(ii)** $x - y = 8,\ 3x - 3y = 16$

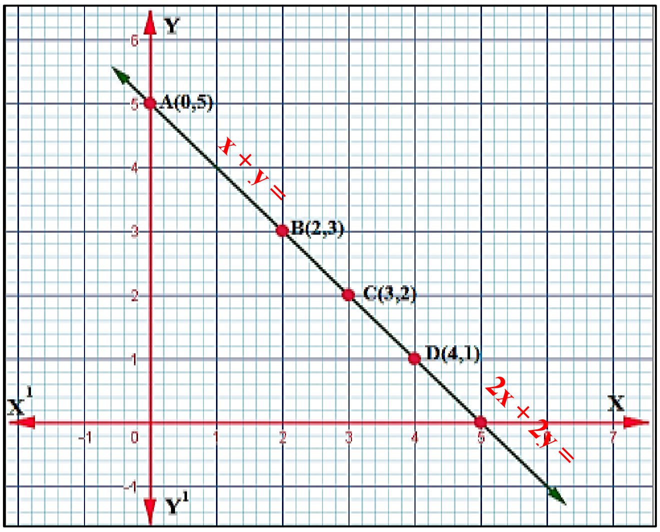
(iii) $2x + y - 6 = 0, 4x - 2y - 4 = 0$ **(iv)** $2x - 2y - 2 = 0,\ 4x - 3y - 5 = 0$

(i) $x + y = 5,\ 2x + 2y = 10$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

∴ ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಇವುಗಳಿಗೆ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಈ ಜೋಡಿ ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ.



$x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x$

x	2	3	4
$y = 5 - x$	3	2	1

$2x + 2y = 10 \Rightarrow 2y = 10 - 2x$

$\Rightarrow y = \frac{10-2x}{2}$

x	2	3	4
$y = \frac{10-2x}{2}$	3	2	1

(ii) $x - y = 8\ ; 3x - 3y = 16$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

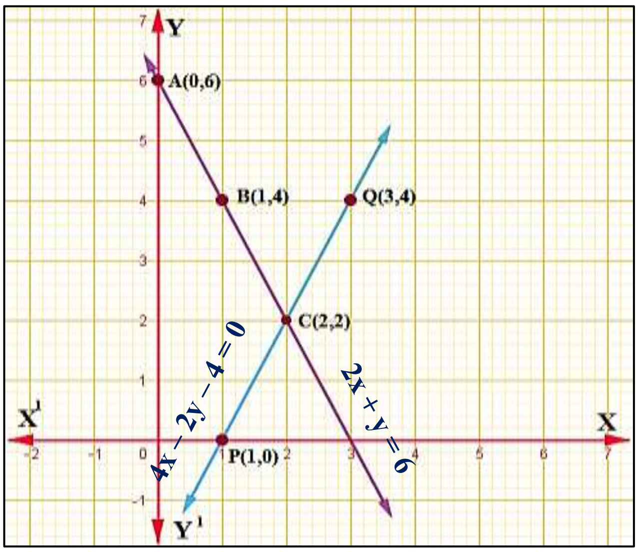
∴ ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಇವುಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರಗಳಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ ಅಸ್ಥಿರ ಜೋಡಿಯಾಗಿವೆ.

(iii) $2x + y - 6 = 0\ ; 4x - 2y - 4 = 0$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ. ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿದೆ. $(2, 2)$ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ.



$2x + y - 6 = 0 \Rightarrow y = 6 - 2x$

x	0	1	2
$y = 6 - 2x$	6	4	2

$4x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow 2y = 4x - 4 \Rightarrow y = \frac{4x-4}{2}$

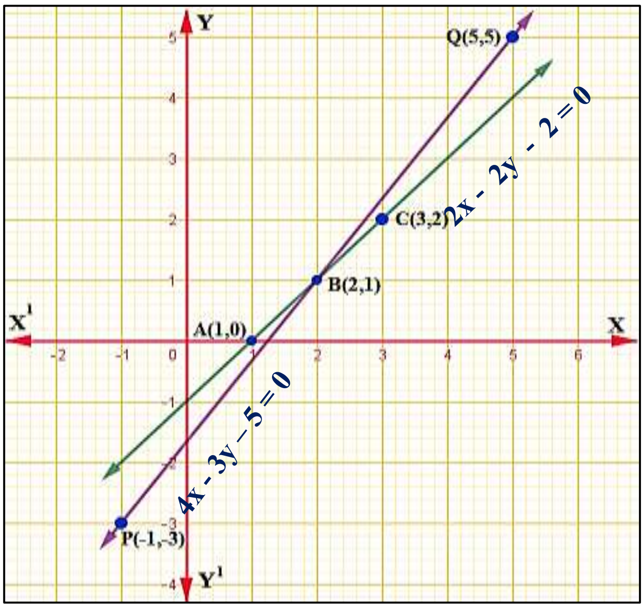
x	1	2	3
$y = \frac{4x-4}{2}$	0	2	4

(iv) $2x - 2y - 2 = 0$; $4x - 3y - 5 = 0$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ. ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿದೆ. $(2, 1)$ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ.



$2x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow 2y = 2x - 2 \Rightarrow y = \frac{2x-2}{2}$

x	1	2	3
$y = \frac{2x-2}{2}$	0	1	2

$4x - 3y - 5 = 0 \Rightarrow 3y = 4x - 5 \Rightarrow y = \frac{4x-5}{3}$

x	2	5	−1
$y == \frac{4x-5}{3}$	1	5	−3

5) ಉದ್ದವು ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ 4m ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಆಯತಾಕಾರದ ಒಂದು ಹೂದೋಟದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅರ್ಧವು 36m. ಹೂದೋಟದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

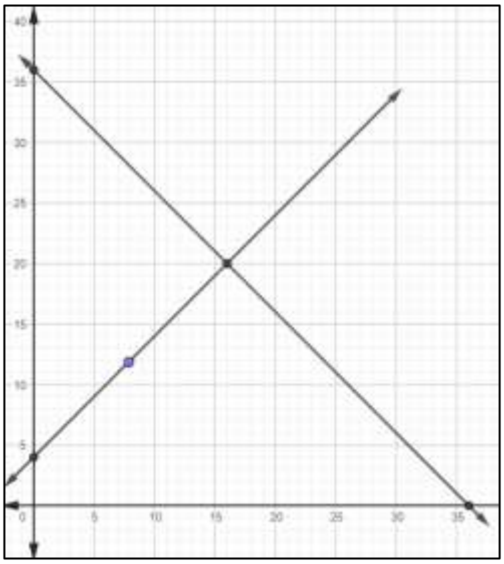
ಆಯತಾಕಾರದ ಹೂದೋಟದ ಅಗಲ $= x$,ಉದ್ದ $= y$ ಆಗಿರಲಿ.

ಉದ್ದ $y = x + 4$

ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅರ್ಧ $\frac{2x+2y}{2} = 36$

$\Rightarrow x + y = 36$

$y - x = 4,$



x	0	8	16
$y = x + 4$	4	12	20

$x + y = 36$

$\Rightarrow y = 36 - x$

x	**0**	**16**	**36**
$y = 36 - x$	36	20	0

ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ. ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿದೆ. $(16, 20)$ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ. **ಅಗಲ $= 16\ m$, ಉದ್ದ $= 20\ m$ ಆಗಿದೆ.**

6. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ $2x + 3y - 8 = 0$ ಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ, ಹೇಗೆಂದರೆ ಉಂಟಾದಂತಹ ಜೋಡಿಗಳ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರಬೇಕು.

(i) ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು (ii) ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು (iii) ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ರೇಖೆಗಳು

(i) ನೀಡಲಾದ ಸಮೀಕರಣ $2x + 3y - 8 = 0$

ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡನೇ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ $2x + 4y - 6 = 0$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{2} = 1, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(ii) ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು $\frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡನೇ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ $4x + 6y - 8 = 0$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(iii) ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ರೇಖೆಗಳು $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡನೇ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ $6x + 9y - 24 = 0$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-24} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

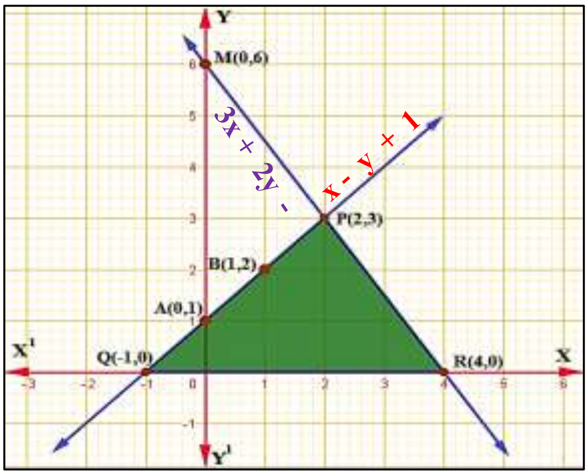
7. $x - y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $3x + 2y - 12 = 0$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು X − ಅಕ್ಷದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ ಹಾಗೂ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ವಲಯವನ್ನು ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿರಿ.

$x - y + 1 = 0 \Longrightarrow y = x + 1$

x	0	1	2
$y = x + 1$	1	2	3

$3x + 2y - 12 = 0 \Longrightarrow 2y = 12 - 3x \Longrightarrow y = \frac{12-3x}{2}$

x	0	2	4
$y = \frac{12-3x}{2}$	6	3	0



ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

(2,3) , (−1,0) , (4,0)

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನಗಳು:

ಆದೇಶ ವಿಧಾನ:

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ನಾವು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಚರಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ, ಅದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು 'ಆದೇಶ ವಿಧಾನ' ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಆದೇಶ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$7x - 15y = 2$

$x + 2y = 3$

$7x - 15y = 2$ -------------------(1), $x + 2y = 3$ ----------------------(2)

ಸಮೀಕರಣ (2)$\Longrightarrow x + 2y = 3$

$\Longrightarrow x = 3 - 2y$ ------------------ (3)

x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$7(3 - 2y) - 15y = 2$

$21 - 14y - 15y = 2$

$-29y = 2 - 21$

$y = \frac{-19}{-29} = \frac{19}{29}$

y ಯ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = 3 - \frac{38}{29} = \frac{87-38}{29} = \frac{49}{29}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರವೆಂದರೆ, $x = \frac{49}{29}$, $y = \frac{19}{29}$

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಅಫ್ತಾಬ್ ತಮ್ಮ ಮಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳುತ್ತಾರೆ, "ಏಳು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ, ಆಗಿನ ನಿನ್ನ ವಯಸ್ಸಿಗಿಂತ ನನ್ನ ವಯಸ್ಸು ಏಳು ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿತ್ತು. ಇನ್ನು ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ ಕೂಡಾ ಆವತ್ತಿನ ನಿನ್ನ ವಯಸ್ಸಿಗಿಂತ ನನ್ನ ವಯಸ್ಸು ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ". (ಈ ಸಂಗತಿಯು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಲ್ಲವೆ?) ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ಅಫ್ತಾಬ್‌ನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು $= x$ ವರ್ಷಗಳು

ಮಗಳ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು $= y$ ವರ್ಷಗಳಾಗಿರಲಿ.

7 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅಫ್ತಾಬ್‌ನ ವಯಸ್ಸು $= x - 7$ ವರ್ಷಗಳು

7 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಮಗಳ ವಯಸ್ಸು $= y - 7$ ವರ್ಷಗಳು.

ಮೇಲಿನ ನಿಬಂಧನೆಯಂತೆ

$x - 7 = 7(y - 7) \Rightarrow \boldsymbol{x - 7y + 42 = 0}$ ------ (1)

3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅಫ್ತಾಬ್‌ನ ವಯಸ್ಸು $= x + 3$ ವರ್ಷಗಳು

3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಮಗಳ ವಯಸ್ಸು $= y + 3$ ವರ್ಷಗಳು.

ಮೇಲಿನ ನಿಬಂಧನೆಯಂತೆ

$x + 3 = 3(y + 3) \Rightarrow x - \boldsymbol{3y = 6}$ ------(2)

ಸಮೀಕರಣ (2) $\Rightarrow \boldsymbol{x = 3y + 6}$ --------- (3)

x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$3y + 6 - 7y + 42 = 0$

$4y = 48 \Rightarrow y = 12$

y ಯ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$x = 3(12) + 6 = 36 + 6 = 42$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಫ್ತಾಬ್ ಮತ್ತು ಅವರ ಮಗಳ ವಯಸ್ಸು ಕ್ರಮವಾಗಿ 42 ಮತ್ತು 12 ವರ್ಷಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ:6 2 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 3 ರಬ್ಬರ್‌ಗಳ ಬೆಲೆ ರೂ 9 ಮತ್ತು 4 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 6 ರಬ್ಬರ್‌ಗಳ ಬೆಲೆ ರೂ 18. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತುಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಬ್ಬರ್‌ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ= ರೂ x

ಒಂದು ರಬ್ಬರ್‌ನ ಬೆಲೆ= ರೂ yಆಗಿರಲಿ.ಮೇಲಿನ ಸಂಧರ್ಭವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$2x + 3y = 9$ ---------(1)

$4x + 6y = 18$ ---------(2)

ಸಮೀಕರಣ (1) $\Rightarrow 2x = 9 - 3y$

$\Rightarrow x = \frac{9-3y}{2}$ ------(3)

x ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$4\left(\frac{9-3y}{2}\right) + 6y = 18$

$18 - 6y + 6y = 18$

$18 = 18$

y ಯ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಈ ಹೇಳಿಕೆ ನಿಜವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೂ, y ಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆ ಪರಿಹಾರವಾಗಿ ಸಿಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ x ಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳೆರಡೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ಕ್ಕೆ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ:7 ಎರಡು ಹಳಿಗಳನ್ನು $x + 2y - 4 = 0$ ಮತ್ತು $2x + 4y - 12 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಳಿಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೆ?

$x + 2y - 4 = 0$ -----------(1)

$2x + 4y - 12 = 0$ ------------(2)

ಸಮೀಕರಣ (1) $\Rightarrow x = 4 - 2y$ -----------(3)

x ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$

$8 - 4y + 4y - 12 = 0$

$8 - 12 = 0 \quad \Rightarrow -4 = 0$

ಈ ಹೇಳಿಕೆ ಅಸಂಬದ್ಧವಾಗಿದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ ಎರಡು ಹಳಿಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

1) ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಆದೇಶ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

(i) $x + y = 14$ ----------- (1), $x - y = 4$------------(2)

ಸಮೀಕರಣ (1) $\Rightarrow x = 14 - y$ ----------(3)

x ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$14 - y - y = 4$

$14 - 2y = 4$

$-2y = 4 - 14$

$-2y = -10$

$y = \frac{-10}{-2} = 5$

$y = 5$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$x = 14 - y = 14 - 5 \Rightarrow x = 9$

$\therefore \boldsymbol{x = 9, \quad y = 5}$

(ii) $s - t = 3$ ------- (1) $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$ ---------- (2)

ಸಮೀಕರಣ (1) $\Rightarrow s = 3 + t$ (3)

s ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$\frac{3+t}{3} + \frac{t}{2} = 6$

$\frac{6+2t+3t}{6} = 6$

$6 + 5t = 36$

$5t = 36 - 6$

$t = \frac{30}{5}$

$t = 6$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$s = 3 + t$

$s = 3 + 6 \Rightarrow s = 9$

$\therefore \boldsymbol{s = 9, \quad t = 6}$

(iii) $3x - y = 3$ ---------(1), $9x - 3y = 9$ -------- (2)

ಸಮೀಕರಣ (1) $\Rightarrow y = 3x - 3$ ನ್ನು

ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$9x - 3(3x - 3) = 9$

$9x - 9x + 9 = 9$

$9 = 9$

y ಯ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಈ ಹೇಳಿಕೆ ನಿಜವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೂ, y ಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆ ಪರಿಹಾರವಾಗಿ ಸಿಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ x ಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳೆರಡೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ಕ್ಕೆ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.

(iv) $\mathbf{0.2x + 0.3y = 1.3;\ 0.4x + 0.5y = 2.3}$

$0.2x + 0.3y = 1.3$ (1) $\times$ 10

$0.4x + 0.5y = 2.3$ (2) $\times$ 10

$2x + 3y = 13$ (3)

$4x + 5y = 23$ (4)

ಸಮೀಕರಣ (3) $\Longrightarrow 2x = 13 - 3y$

$\Longrightarrow x = \frac{13-3y}{2}$ --------------------(5)

x ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (4) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$4\left(\frac{13-3y}{2}\right) + 5y = 23$

$26 - 6y + 5y = 23$

$26 - 23 = y$

$y = 3$,

$y = 3$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (5) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$x = \frac{13-3(3)}{2} = \frac{13-9}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$\therefore \boldsymbol{x = 2,\quad y = 3}$

(v) $\mathbf{\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0}$ -----------(1); $\mathbf{\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0}$ -----------(2)

ಸಮೀಕರಣ (1) $\Longrightarrow \sqrt{2}x = -\sqrt{3}y$

$\Longrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}\,y}{\sqrt{2}}$--------------(3)

x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}\,y}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{8}y = 0$

$-\frac{3y}{\sqrt{2}} - \sqrt{4 \times 2}\ y = 0$

$-\frac{3y}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\ y = 0$

$y\left(-\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\right) = 0$

$y = 0$, $y = 0$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$x = -\frac{\sqrt{3}\,(0)}{\sqrt{2}} = 0$

$\therefore \boldsymbol{x = 0,\quad y = 0}$

(vi) $\mathbf{\frac{3x}{2} - \frac{5y}{2} = -2}$ ---------- (1); $\mathbf{\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}}$ --------------(2)

ಸಮೀಕರಣ (1) $\times 2 \Longrightarrow 3x - 5y = -4$--------(3)

ಸಮೀಕರಣ (2) $\times 6 \Longrightarrow 2x + 3y = 13$ --------(4)

ಸಮೀಕರಣ (3) $\Longrightarrow 3x = 5y - 4$

$\Longrightarrow x = \frac{5y-4}{3}$ ----------------------------(5)

x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (4) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$2\left(\frac{5y-4}{3}\right) + 3y = 13$

$\frac{10y-8+9y}{3} = 13$

$19y - 8 = 39 \Rightarrow 19y = 39 + 8$

$19y = 47$

$y = \frac{47}{19}$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (5) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$x = \frac{5\left(\frac{47}{19}\right)-4}{3} = \frac{235-76}{19} \times \frac{1}{3} = \frac{159}{19} \times \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{53}{19}}$

2) $2x + 3y = 11$ ಮತ್ತು $2x - 4y = -24$ ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $y = mx + 3$ ರಲ್ಲಿ m ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$2x + 3y = 11$ (1)

$2x - 4y = -24$ (2)

ಸಮೀಕರಣ (2) $\Longrightarrow 2x = 4y - 24$

$\Longrightarrow x = 2y - 12$ (3)

x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$2(2y - 12) + 3y = 11$

$4y - 24 + 3y = 11$

$7y = 11 + 24 \;\; 7y = 35$

$y = 5$

$y = 5$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$x = 2x5 - 12 = 10 - 12 = -2$

$\therefore x = -2, \quad y = 5$

$y = mx + 3 \Rightarrow 5 = m(-2) + 3$

$5 - 3 = -2m \Rightarrow -2m = 2$

$\mathbf{\Rightarrow m = \frac{2}{-2} = -1}$

3) ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಆದೇಶ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅವುಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 26 ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇನ್ನೊಂದರ ಮೂರರಷ್ಟಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೊದಲನೆ ಸಂಖ್ಯೆ x, ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ y ಆದಾಗ $y > x$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯಂತೆ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$y - x = 26$ (1)

$y = 3x$ (2)

y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$3x - x = 26 \Rightarrow 2x = 26$

$x = 13$, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು

ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$y = 3(13) = 39$

$\mathbf{\therefore x = 13, \quad y = 39}$

(ii) ಎರಡು ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನವು ಚಿಕ್ಕ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ 18 ಡಿಗ್ರಿ ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೊಡ್ಡ ಕೋನ x , ಚಿಕ್ಕ ಕೋನ y ಆಗಿರಲಿ. ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯಂತೆ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$x + y = 180^0$ (1)

$x = y + 18^0$ (2)

x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀರಕಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$y + 18^0 + y = 180^0 \Rightarrow 2y = 162^0$

$y = 81^0$ y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು

ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$x = 81^0 + 18^0 = 99^0$

$\mathbf{\therefore x = 99^0 , \quad y = 81^0}$

(iii) ಕ್ರಿಕೆಟ್ ತಂಡವೊಂದರ ತರಬೇತುಗಾರ್ತಿಯು 7 ಬ್ಯಾಟ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 6 ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ₹ 3800 ಕ್ಕೆ ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಆ ಬಳಿಕ 3 ಬ್ಯಾಟ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 5 ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಅವರು ರೂ 1750 ಕ್ಕೆ ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬ್ಯಾಟ್ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚೆಂಡಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬ್ಯಾಟಿನ ಬೆಲೆ = ರೂ x , ಚೆಂಡಿನ ಬೆಲೆ = ರೂ y ಆಗಿರಲಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯಂತೆ

$7x + 6y = 3800$ (1)

$3x + 5y = 1750$ (2)

ಸಮೀಕರಣ (1) $\Longrightarrow 7x = 3800 - 6y \Longrightarrow x = \frac{3800-6y}{7}$ ------ (3)

x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$3\left(\frac{3800-6y}{7}\right) + 5y = 1750$

$\frac{11400-18y+35y}{7} = 1750$

$11400 + 17y = 12250$

$17y = 12250 - 11400 \Rightarrow 17y = 850$

$y = \frac{850}{17} = 50$

$y = 50$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$x = \frac{3800-6(50)}{7} = \frac{3800-300}{7} = \frac{3500}{7} = 500$

∴ ಬ್ಯಾಟಿನ ಬೆಲೆ = ರೂ 500 , ಚೆಂಡಿನ ಬೆಲೆ = ರೂ 50

(iv) ಒಂದು ನಗರದಲ್ಲಿ ಟ್ಯಾಕ್ಸಿ ಬಾಡಿಗೆಯು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯದು ನಿಗದಿತ ಬಾಡಿಗೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದು ಚಲಿಸಿದ ದೂರಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಬಾಡಿಗೆ. ಇವೆರಡನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಟ್ಟು ಬಾಡಿಗೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಟ್ಟು ಬಾಡಿಗೆಯು 10km ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ರೂ 105 ಮತ್ತು 15km ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ರೂ 155. ಹಾಗಾದರೆ ನಿಗದಿತ ಬಾಡಿಗೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ನ ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ಬಾಡಿಗೆ ದರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು 25km ದೂರವನ್ನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದರೆ ನೀಡಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಬಾಡಿಗೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನಿಗದಿತ ಬಾಡಿಗೆಗೆ ರೂ x, ಪ್ರತಿ ಕಿಲೋ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ಬಾಡಿಗೆ ರೂ y ಆಗಿರಲಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯಂತೆ

$x + 10y = 105$ (1) y

$x + 15y = 155$ (2)

ಸಮೀಕರಣ (1) $\Longrightarrow x = 105 - 10y$--------(3)

x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$105 - 10y + 15y = 155$

$105 + 5y = 155$

$5y = 155 - 105$

$y = \frac{50}{5} = 10$

$= 10$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$x = 105 - 10(10) = 105 - 100 = 5$

ನಿಗದಿತ ಬಾಡಿಗೆಗೆ ರೂ 5,

ಚಲಿಸಿದ ದೂರಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಬಾಡಿಗೆ ರೂ 10

25km ದೂರವನ್ನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದರೆ ನೀಡಬೇಕಾದ

ಒಟ್ಟು ಬಾಡಿಗೆ $x + 25y = 5 + 25(10)$

$= 5 + 250 =$ **ರೂ 255**

(v) ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡಕ್ಕೂ 2 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ, ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{9}{11}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡಕ್ಕೂ 3ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅದು $\frac{5}{6}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{x}{y}$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯಂತೆ

$\frac{x+2}{y+2} = \frac{9}{11} \Longrightarrow 11x + 22 = 9y + 18$

$\Rightarrow 11x - 9y = 18 - 22$
$\Rightarrow 11x - 9y = -4$ (1)
$\frac{x+3}{y+3} = \frac{5}{6} \Rightarrow 6x + 18 = 5y + 15$
$\Rightarrow 6x - 5y = 15 - 18 \Rightarrow 6x - 5y = -3$ ---(2)
ಸಮೀಕರಣ (1) $\Rightarrow 11x = -4 + 9y$
$\Rightarrow x = \frac{-4+9y}{11}$ --------(3)
x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ
$6\left(\frac{-4+9y}{11}\right) - 5y = -3$
$\frac{-24+54y-55y}{11} = -3$
$-24 - y = -33$
$-y = -33 + 24$
$-y = -9$
$y = 9$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ
$x = \frac{-4+9(9)}{11} = \frac{-4+81}{11} = \frac{77}{11} = 7$
ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{x}{y} = \frac{7}{9}$

(vi) ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ ಜೇಕಬ್‌ರ ವಯಸ್ಸು ಅವರ ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನ ಮೂರರಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ. ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಜೇಕಬ್‌ರ ವಯಸ್ಸು ಅವರ ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನ ಏಳರಷ್ಟಿತ್ತು ಅವರಿಬ್ಬರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು ಎಷ್ಟು?

ಜೇಕಬ್‌ರ ವಯಸ್ಸು $= x$, ಅವರ ಮಗನ ವಯಸ್ಸು $= y$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯಂತೆ
ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ $x + 5 = 3(y + 5)$
$\Rightarrow x + 5 = 3y + 15 \Rightarrow x - 3y = 10$---------(1)
ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ $x - 5 = 7(y - 5)$
$\Rightarrow x - 5 = 7y - 35 \Rightarrow x - 7y = -30$-------(2)
ಸಮೀಕರಣ (1) $\Rightarrow x = 10 + 3y$---------------(3)
x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ
$10 + 3y - 7y = -30$
$10 - 4y = -30$
$-4y = -30 - 10$
$-4y = -40$
$y = \frac{-40}{-4} = 10$ $y = 10$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ
$x = 10 + 3(10) = 10 + 30 = 40$
ಜೇಕಬ್‌ರ ವಯಸ್ಸು $= 40$, ಅವರ ಮಗನ ವಯಸ್ಸು $= 10$

3.4.2 ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ:

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಆದಾಯಗಳ ಅನುಪಾತ 9:7 ಮತ್ತು ಅವರ ಖರ್ಚುಗಳ ಅನುಪಾತ 4:3 ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಕೂಡಾ ತಿಂಗಳಿಗೆ ರೂ 2000 ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದರೆ ಅವರ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಆದಾಯವನ್ನು ರೂ 9x ಮತ್ತು ರೂ 7x ನಿಂದಲೂ ಖರ್ಚುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ರೂ 4y ಮತ್ತು ರೂ 3y ಯಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಆಗ ದೊರೆಯುವ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದರೆ,
$9x – 4y = 2000$ (1)
$7x – 3y = 2000$ (2)
y ಯ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸಬೇಕು, ಅದಕ್ಕಾಗಿ
ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು 3 ರಿಂದಲೂ,
ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು 4 ರಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಬೇಕು
$9x – 4y = 2000$ (1) x 3

$7x - 3y = 2000$ (2) x 4

$27x - 12y = 6000$	(3)
$28x - 12y = 8000$	(4)
$-x = -2000$	

$\Rightarrow x = 2000$

$x = 2000$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ(1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$(1) \Rightarrow 9(2000) - 4y = 2000$

$\Rightarrow 18000 - 2000 = 4y$

$\Rightarrow 4y = 16000 \Rightarrow y = 4000$

∴ ಈ ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯ = ರೂ18000 ಮತ್ತು ರೂ14000

ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಿಧಾನವನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಮೊದಲು ವರ್ಜಿಸಿ, ಒಂದೇ ಚರಾಕ್ಷರದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು y ಯನ್ನು ವರ್ಜಿಸಿದೆವು. ನಾವು x ನ್ನು ಕೂಡಾ ವರ್ಜಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು. ಆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 9: ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ, ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$2x + 3y = 8$ (1)

$4x + 6y = 7$ (2)

ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$2x + 3y = 8$ (1) x 2

$4x + 6y = 16$ (3)

(3) ರಿಂದ (2) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

$4x + 6y = 16$	(3)
$4x + 6y = 7$	(2)
$0 = 9$	

ಇಲ್ಲಿ 0 =9 ಎಂಬುವುದು ಒಂದು ಅಸಂಬದ್ಧ ಹೇಳಿಕೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 10: ಎರಡಂಕೆಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅದರ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಮೊತ್ತ 66. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕೆಗಳಿಗಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 2 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಂತಹ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ?

ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $10x + y$

ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ = $10y + x$

$\therefore 10x + y + 10y + x = 66 \Rightarrow 11x + 11y = 66$

$\Rightarrow x + y = 6$ ------------(1)

ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ: $x - y = 2$ ----- (2)

(1) ರಿಂದ (2) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

$x + y = 6$	(1)
$x - y = 2$	(2)
$2y = 4$	

$\Rightarrow y = 2$; $y = 2$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$x + 2 = 6 \Rightarrow x = 4$

ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $10x + y = 10 \times 4 + 2 = 42$

⇒ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 42 ಮತ್ತು 24

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3

1. ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಆದೇಶ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $x + y = 5$ ಮತ್ತು $2x - 3y = 4$

ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ,

$x + y = 5$ -------------------- (1)
$2x - 3y = 4$ --------------------(2)
x ನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸಬೇಕು, ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು

$2x + 2y = 10$-------------------- (3)
ಸಮೀಕರಣ (3) ರಿಂದ (2) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

$2x + 2y = 10$	(3)
$2x - 3y = 4$	(2)
$5y = 6$	

$\Rightarrow y = \frac{6}{5}$

$y = \frac{6}{5}$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$x + \frac{6}{5} = 5 \Rightarrow 5x + 6 = 25 \Rightarrow 5x = 19 \Rightarrow x = \frac{19}{5}$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = \frac{19}{5}$ ಮತ್ತು $y = \frac{6}{5}$

ಆದೇಶ ವಿಧಾನ:

$x + y = 5$ -------------------- (1)
$2x - 3y = 4$ -------------------- (2)
$(1) \Rightarrow y = 5 - x$
$y = 5 - x$ ಎಂದು (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$\Rightarrow 2x - 3(5 - x) = 4$ ------------- (3)
$\Rightarrow 2x - 15 + 3x = 4$
$\Rightarrow 5x = 19$
$\Rightarrow x = \frac{19}{5}$

$x = \frac{19}{5}$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$\frac{19}{5} + y = 5$
$\Rightarrow 19 + 5y = 25$
$\Rightarrow 5y = 25 - 19 \Rightarrow y = \frac{6}{5}$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = \frac{19}{5}$ ಮತ್ತು $y = \frac{6}{5}$

(ii) $3x + 4y = 10$ ಮತ್ತು $2x - 2y = 2$

ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ,

$3x + 4y = 10$ (1)
$2x - 2y = 2$ (2)
y ಯ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸಬೇಕು, ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು

$2x - 2y = 2$ (2) x 2
$4x - 4y = 4$ (3)
ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (3) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ,

$3x + 4y = 10$	(1)
$4x - 4y = 4$	(3)
$7x = 14$	

$\Rightarrow$ x = 2
x = 2 ಎಂದು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,
$3(2) + 4y = 10 \Rightarrow 6 + 4y = 10$
$4y = 10 - 6 \Rightarrow 4y = 4 \Rightarrow y = 1$
ಆದ್ದರಿಂದ $x = 2, y = 1$

ಆದೇಶ ವಿಧಾನ:

$3x + 4y = 10$ (1)
$2x - 2y = 2$ (2)
$(2) \Rightarrow -2y = -2x + 2 \Rightarrow y = x - 1$
y = x – 1ಎಂದು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,
$3x + 4(x - 1) = 10$
$3x + 4x - 4 = 10$
$7x = 10 + 4$
$7x = 14$
$\Rightarrow x = 2$
x = 2 ಎಂದು (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,
$2(2) - 2y = 2$
$4 - 2y = 2$
$-2y = 2 - 4$
$-2y = -2 \Rightarrow y = 1$
ಆದ್ದರಿಂದ x = 2, y = 1

(iii) 3x - 5y - 4 = 0 ಮತ್ತು 9x = 2y + 7

ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ,

$3x - 5y - 4 = 0$
$\Rightarrow 3x - 5y = 4$ (1)
$9x = 2y + 7$
$\Rightarrow 9x - 2y = 7$ (2)
(1) ನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ, ,
$9x - 15y = 12$ (3)
ಸಮೀಕರಣ (3) ರಿಂದ (2) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

9x – 15 y = 12	**(3)**
9x – 2y = 7	(2)
- 13y = 5	

$-13y = 5 \Rightarrow y = -\frac{5}{13}$
$y = -\frac{5}{13}$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,
$3x - 5\left(-\frac{5}{13}\right) = 4 \Rightarrow 3x + \frac{25}{13} = 4$
$\Rightarrow 39x + 25 = 52 \Rightarrow 39x = 27$
$\Rightarrow x = \frac{27}{39} = \frac{9}{13}$
ಆದ್ದರಿಂದ $x = \frac{9}{13}$ and $y = -\frac{5}{13}$

ಆದೇಶ ವಿಧಾನ:

$3x - 5y - 4 = 0$
$\Rightarrow 3x - 5y = 4$-------------------- (1)
$9x = 2y + 7$
$\Rightarrow 9x - 2y = 7$-------------------- (2)
$(1) \Rightarrow -5y = 4 - 3x \Rightarrow 5y = 3x - 4$

$y = \frac{3x-4}{5}$ -------------------- (3)

$y = \frac{3x-4}{5}$ ಎಂದು (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$9x - 2\left(\frac{3x-4}{5}\right) = 7 \Rightarrow 9x - \left(\frac{6x-8}{5}\right) = 7$

$\Rightarrow 45x - 6x + 8 = 35$

$\Rightarrow 39x = 27 \Rightarrow x = \frac{27}{39} = \frac{9}{13}$

$x = \frac{9}{13}$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$3\left(\frac{9}{13}\right) - 5y = 4$

$\Rightarrow 27 - 65y = 52$

$\Rightarrow -65y = 52 - 27$

$\Rightarrow y = -\frac{25}{65}$

$\Rightarrow y = -\frac{5}{13}$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = \frac{9}{13}$ ಮತ್ತು $y = -\frac{5}{13}$

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ ಮತ್ತು $x - \frac{y}{3} = 3$

ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ, $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$

$\Rightarrow 3x + 4y = -6$ -------------------- (1)

$x - \frac{y}{3} = 3$

$\Rightarrow 3x - y = 9$ -------------------- (2)

(2) ರಿಂದ (1) ನ್ನು ಕಳೇದಾಗ,

$3x + 4y =$	-6	(1)
$3x - y =$	9	(2)
$+5y =$	-15	

$\Rightarrow y = -3$

$y = -3$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$3x + 4(-3) = -6 \Rightarrow 3x - 12 = -6 \Rightarrow 3x = 6$

$\Rightarrow x = 2$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 2$ ಮತ್ತು $y = -3$

ಆದೇಶ ವಿಧಾನ:

$3x + 4y = -6$-------------------- (1)

$3x - y = 9$-------------------- (2)

$(2) \Rightarrow -y = 9 - 3x$

$\Rightarrow y = 3x - 9$-------------------- (3)

$y = 3x - 9$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$3x + 4(3x - 9) = -6$

$\Rightarrow 3x + 12x - 36 = -6 \Rightarrow 15x = 30 \quad \Rightarrow x = 2$

$x = 2$ ಎಂದು (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$y = 3(2) - 9 \Rightarrow y = 6 - 9$

$\Rightarrow y = -3$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 2$ ಮತ್ತು $y = -3$

2. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು (ಇರುವುದಾದರೆ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶಕ್ಕೆ 1ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ, ಛೇದದಿಂದ 1 ನ್ನು ಕಳೆದು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದರೆ, 1 ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದಕ್ಕೆ 1 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅದು $\frac{1}{2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಯಾವುದು?

ಭಿನ್ನರಾಶಿ = $\frac{x}{y}$ ಆಗಿರಲಿ

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, $\frac{x+1}{y-1} - 1 = 1 \Rightarrow \frac{x+1}{y-1} = 2 \Rightarrow x + 1 = y - 1$

$\Rightarrow x - y = -2$ -------------------- (1)

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,

$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2x = y + 1$

$\Rightarrow 2x - y = 1$ -------------------- (2)

ಸಮೀಕರಣ (2) ರಿಂದ (1)ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

$x - y = -2$	(1)
$2x - y = 1$	(2)
$-x \quad = -3$	

$\Rightarrow x = 3$

x = 3 ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$3 - y = -2 \Rightarrow -y = -2 - 3$

$\Rightarrow y = 5$

ಆದ್ದರಿಂದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ = $\frac{3}{5}$

(ii) ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ನೂರಿಯ ವಯಸ್ಸು ಸೋನುವಿನ ವಯಸ್ಸಿನ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಆಗಿತ್ತು. ಹತ್ತು ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ ನೂರಿಯ ವಯಸ್ಸು ಸೋನುವಿನ ವಯಸ್ಸಿನ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ನೂರಿ ಮತ್ತು ಸೋನುವಿನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?

ನೂರಿಯ ವಯಸ್ಸು = x ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಸೋನುವಿನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು = y ಆಗಿರಲಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಪ್ರಕಾರ,

$(x - 5) = 3(y - 5)$

$x - 3y = -10$ -------------------- (1)

$(x + 10y) = 2(y + 10)$

$x - 2y = 10$ -------------------- (2)

ಸಮೀಕರಣ (2) ರಿಂದ (1)ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

$x - 3y = -10$	(1)
$x - 2y = 10$	(2)
$-y = -20$	

$\Rightarrow y = 20$

$y = 20$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$x - 60 = -10 \Rightarrow x = 50$

ಆದ್ದರಿಂದ ನೂರಿಯ ವಯಸ್ಸು = 50 ಮತ್ತು ಸೋನುವಿನ ವಯಸ್ಸು = 20 ವರ್ಷಗಳು.

(iii) ಎರಡಂಕಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ 9. ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಗಳ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಇಮ್ಮಡಿಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಅದು ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಒಂಭತ್ತರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = xy ಆಗಿರಲಿ

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,

$x + y = 9$ -------------------- (1)

2(10y + x) = 9(10x + y)

20y + 2x = 90x + 9y

88x – 11y = 0

⇒ 8x – y = 0 -------------------- (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ,

(2)

x + y =	9	(1)
8x – y =	0	(2)
9x =	9	

⇒ x = 1

x = 1ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

1 + y = 9 ⇒ y = 8

ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ xy = 18

(iv) ರೂ 2000 ವನ್ನು ಹಿಂಪಡೆಯಲು ಮೀನಾ ಬ್ಯಾಂಕಿಗೆ ಹೋದಳು. ಅವಳು ನಗದು ಗುಮಾಸ್ತರಲ್ಲಿ ರೂ 50 ಮತ್ತು ರೂ 100ರ ನೋಟುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ನೀಡುವಂತೆ ಹೇಳಿದಳು. ಮೀನಾಳಿಗೆ ಒಟ್ಟು 25 ನೋಟುಗಳು ದೊರೆತವು. ರೂ 50 ರ ಮತ್ತು ರೂ100 ರ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ನೋಟುಗಳನ್ನು ಅವಳು ಪಡೆದಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

50 ರೂಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = x ಮತ್ತು 100 ರೂಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = y ಆಗಿರಲಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,

x + y = 25 -------------------- (1)

50x + 100y = 2000

⇒ x + 2y = 40-------------------- (2)

ಸಮೀಕರಣ (2) ರಿಂದ (1)ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

x + 2y = 40	(2)
x + y = 25	(1)
y = 15	

y = 15 ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

x + 15 = 25 ⇒ x = 25 – 15

⇒ x = 10

ಆದ್ದರಿಂದ 50 ರೂಗಳ 10 ನೋಟ್‌ಗಳು ಹಾಗೂ 100 ರೂಗಳ 15 ನೋಟ್‌ಗಳಿವೆ.

(ii) ಒಂದು ಎರವಲು ಗ್ರಂಥಾಲಯದಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಮೂರು ದಿನಕ್ಕೆ ಒಂದು ನಿಗದಿತ ಶುಲ್ಕವಿರುತ್ತದೆ. ಆ ಬಳಿಕದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದಿನಕ್ಕೂ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಶುಲ್ಕವಿರುತ್ತದೆ. ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಏಳು ದಿನ ತನ್ನಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿಕೊಂಡದ್ದಕ್ಕಾಗಿ ಸರಿತಾ ರೂ 27 ನ್ನು ಪಾವತಿಸಿದರೆ, ಪುಸ್ತಕವನ್ನು 5 ದಿನ ಇರಿಸಿಕೊಂಡದ್ದಕ್ಕಾಗಿ ಸೂಸಿ ರೂ 21 ನ್ನು ಪಾವತಿಸಿದಳು. ನಿಗದಿತ ಶುಲ್ಕ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೆಚ್ಚುವರಿ ದಿನದ ಶುಲ್ಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೂರು ದಿನಗಳ ನಿಗದಿತ ಶುಲ್ಕ = ರೂ x ಮತ್ತು ಉಳಿದ ದಿನಗಳ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಶುಲ್ಕ = ರೂ y ಆಗಿರಲಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,

x + 4y = 27 -------------------- (1)

x + 2y = 21 -------------------- (2)

ಸಮೀಕರಣ (2) ರಿಂದ (1)ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

x + 2y = 21	(2)
x + 4y = 27	(1)
- 2y = -6	

⇒y = 3

⇒y = 3 ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

x + 4x3 = 27

⇒ x + 12 = 27

⇒ x = 27 – 12

⇒ x = 15

∴ ನಿಗದಿತ ಶುಲ್ಕ = **Rs 15** ಮತ್ತು ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಶುಲ್ಕ = **Rs 3**

****

4 ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಕಲಿಕಾಂಶಗಳು:

1. ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆದರ್ಶರೂಪ
2. ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು
3. ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕ
4. ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸುವುದು

$p(x) = 0$ ರೂಪದ, $p(x)$ ಎಂಬುದು ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ 2 ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಕರಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. $p(x)$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆದರೆ $p(x) = 0$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಆಗುತ್ತದೆ.

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶರೂಪ: $ax^2 + bx + c = 0$

$a \neq 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಲಕ್ಷಣಗಳೆಂದರೆ,

- ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
- ಚರಾಕ್ಷರದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತ 2 ನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.
- ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪ $ax^2 + bx + c = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ a ಯು x^2 ನ ಸಹಗುಣಕ, b ಯು x ನ ಸಹಗುಣಕ, c ಯು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
- ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರದ ಘಾತಗಳು ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮಿಶ್ರ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ $ax^2 + bx + c = 0$ ದಲ್ಲಿ $a \neq 0$, $b \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಮಿಶ್ರ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $x^2 - 3x - 5 = 0$, $x^2 + 5x + 6 = 0$,

ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಚರಾಕ್ಷರವು 2 ನೇ ಘಾತದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಕಂಡುಬಂದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುವರು. ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪ: $ax^2 + c = 0$ $[a \neq 0]$

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

(i). ಜಾನ್ ಮತ್ತು ಜೀವಂತಿ ಇವರಿಬ್ಬರ ಬಳಿ ಇರುವ ಒಟ್ಟು ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 45 ಆಗಿದೆ. ಇವರಿಬ್ಬರೂ ತಲಾ 5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡರೆ ಇವರ ಬಳಿ ಇರುವ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 124 ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಅವರ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಒಂದು ಗುಡಿ ಕೈಗಾರಿಕೆಯು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆಟಿಕೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಆಟಿಕೆಯ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು, (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) 55ರಿಂದ, ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸಿದ ಆಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿನದಲ್ಲಿ, ಆಟಿಕೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಒತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು ರೂ750 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆ ದಿನ ಉತ್ಪಾದಿಸಿದ ಆಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

ಪರಿಹಾರ :

(i) ಜಾನ್‌ನ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು x ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ ಜೀವಂತಿಯ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 45 - x$ [∵ಅವರಿಬ್ಬರ ಬಳಿ ಇರುವ ಒಟ್ಟು ಗೋಲಿಗಳು 45]

5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಜಾನ್‌ನ ಬಳಿ ಉಳಿದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= x - 5$

5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಜೀವಂತಿಯ ಬಳಿ ಉಳಿದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 45 - x - 5 = 40 - x$

∴ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 124 \Rightarrow (x - 5)(40 - x) = 124$

$\Rightarrow 40x - x^2 - 200 + 5x = 124$

$\Rightarrow -x^2 + 45x - 200 = 124$

$\Rightarrow -x^2 + 45x - 324 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 45x + 324 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಜಾನ್‌ನ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $\mathbf{x^2 - 45x + 324 = 0}$ ಯನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಗಣಿತೀಯ ರೂಪವಾಗಿದೆ.

(ii) ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಆಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗಿರಲಿ

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ದಿನದ ಪ್ರತಿ ಆಟಿಕೆಯ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) $= 55 - x$ ಆದ್ದರಿಂದ,

ಆ ದಿನದ ಒಟ್ಟು ಆಟಿಕೆಗಳ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) $= x(55 - x)$

$\therefore x(55 - x) = 750$

$\Rightarrow 55x - x^2 = 750$

$\Rightarrow -x^2 + 55x - 750 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 55x + 750 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಆಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $\mathbf{x^2 - 55x - 750 = 0}$ ಯನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಗಣಿತೀಯ ರೂಪವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$ (iii) $x(2x + 3) = x^2 + 1$ (iv) $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

(i) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$

$x^2 - 4x + 4 + 1 = 2x - 3$

$x^2 - 4x - 2x + 5 + 3 = 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

(ii) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

$x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$x^2 - x^2 + x + 8 + 4 = 0 \Rightarrow x + 12 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(iii) $x(2x + 3) = x^2 + 1$

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$

$2x^2 - x^2 + 3x - 1 = 0$

$x^2 + 3x - 1 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(iv) $(x+2)^3 = x^3 - 4$

$x^3 + 2^3 + 3(x)(2)^2 + 3x^2(2) = x^3 - 4$

$x^3 + 8 + 12x + 6x^2 = x^3 - 4$

$x^3 - x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 4 = 0$

$6x^2 + 12x + 12 = 0 \div 6 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$ **(ii)** $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$ **(iii)** $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$

(iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$ **(v)** $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ **(vi)** $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

(vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2 - 1)$ **(viii)** $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$

$x^2 + 2x + 1 = 2x - 6$

$x^2 + 2x - 2x + 1 + 6 = 0$

$x^2 + 7 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

$x^2 - 2x = -6 + 2x$

$x^2 - 2x - 2x + 6 = 0$

$x^2 - 4x + 6 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ.

(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$

$x^2 + x - 2x - 2 = x^2 + 3x - x - 3$

$x^2 - x - 2 = x^2 + 2x - 3$

$-x - 2x - 2 + 3 = 0 \Rightarrow -3x + 3 = 0$

$\Rightarrow 3x - 1 = 0$ ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.

(iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

$2x^2 + x - 6x - 3 = x^2 + 5x$

$2x^2 - 5x - 3 = x^2 + 5x$

$2x^2 - x^2 - 5x - 5x - 3 = 0$

$x^2 - 10x - 3 = 0$ ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.∴**ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ.**

(v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$

$2x^2 - 6x - x + 3 = x^2 - x + 5x - 5$

$2x^2 - 7x + 3 = x^2 + 4x - 5$

$2x^2 - x^2 - 7x - 4x + 3 + 5 = 0$

$x^2 - 11x + 8 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

$x^2 + 3x + 1 = x^2 - 2(x)(2) + 2^2$

$x^2 - x^2 + 3x + 4x + 1 - 4 = 0$

$7x - 3 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.

(vii)$(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

$x^3 + 2^3 + 3(x)(2)^2 + 3x^2(2) = 2x^3 - 2x$

$x^3 + 8 + 12x + 6x^2 = 2x^3 - 2x$

$x^3 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 2x + 8 = 0$

$-x^3 + 6x^2 + 14x + 8 = 0 \times -1$

$x^3 - 6x^2 - 14x - 8 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.

(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

$x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 2^3 + 3(x)(2)^2 - 3x^2(2)$

$x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 8 + 12x - 6x^2$

$x^3 - x^3 - 4x^2 + 6x^2 - x - 12x + 1 + 8 = 0$

$2x^2 - 13x + 9 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

(i) ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ನಿವೇಶನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $528m^2$ ಆಗಿದೆ. ನಿವೇಶನದ ಉದ್ದವು (ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ) ಅದರ ಅಗಲದ ಎರಡಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಆ ನಿವೇಶನದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಅಗಲ $b = x$ m ಆಗಿರಲಿ $\Rightarrow$ ಉದ್ದ $l = (2x + 1)$m

ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= l \times b$

$\Rightarrow 528 = x(2x + 1) \Rightarrow 528 = 2x^2 + x \Rightarrow \mathbf{2x^2 + x - 528 = 0}$

(ii) ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 306 ಆಗಿದೆ. ನಾವು ಆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು x ಮತ್ತು $(x + 1)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ದ $= 306$

$\Rightarrow x(x + 1) = 306$

$\Rightarrow \mathbf{x^2 + x - 306 = 0}$

(iii) ರೋಹನನ ತಾಯಿಯು ಅವನಿಗಿಂತ 26 ವರ್ಷ ದೊಡ್ಡವಳಾಗಿದ್ದಾಳೆ. 3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) ಗುಣಲಬ್ಧವು 360 ಆಗುತ್ತದೆ. ನಾವು ರೋಹನನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

ರೋಹನ್‌ನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು $= x$ ಆಗಿರಲಿ

ತಾಯಿಯ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು $= x + 26$

3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ

ರೋಹನ್‌ನ ವಯಸ್ಸು $= x + 3$

ತಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸು $= x + 26 + 3 = x + 29$

3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣಲಬ್ದ $= 360$

$\therefore (x + 3)(x + 29) = 360$

$\Rightarrow x^2 + 29x + 3x + 87 = 360$

$\Rightarrow \mathbf{x^2 + 32x - 273 = 0}$

(iv) ಒಂದು ರೈಲು ಏಕರೂಪದ ಜವದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿ, 480km ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಜವವು 8km/h ಕಡಿಮೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅಷ್ಟೇ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ರೈಲು 3 ಘಂಟೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿತ್ತು. ನಾವು ರೈಲಿನ ಜವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

ರೈಲಿನ ಜವ $= x\ km/h$ ಆಗಿರಲಿ.

$480\ km$ ಚಲಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲ $= \frac{480}{x}\ hrs$

8 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ಜವದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿದಾಗ ರೈಲಿನ ಜವ $= (x-8) km/h$

8 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ಜವದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿದಾಗ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲ $= \frac{480}{x-8} hrs$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ $\frac{480}{x} + 3 = \frac{480}{x-8}$

$\Rightarrow 480(x-8) + 3\,x\,(x-8) = 480x$

$\Rightarrow 480x - 3840 + 3\,x^2 - 24\,x = 480x$

$\Rightarrow 3840 + 3\,x^2 - 24\,x = 0$

$\Rightarrow 3\,x^2 - 24\,x + 3840 = 0$

$\Rightarrow \boldsymbol{x^2 - 8x + 1280 = 0}$

10.3 ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

ನೆನಪಿಡಿ: $ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ $2x^2 -5x+3=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$2x^2 - 5x + 3 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 0$

$\Rightarrow 2x(x-1) - 3(x-1) =$

$\Rightarrow (x-1)(2x-3) = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0, \quad 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow x = 1,\ 2x = 3$

$\boldsymbol{x = 1,\ x = \frac{3}{2}}$

ಮೊದಲ ಪದ = $2x^2$, ಕಡೆಯ ಪದ $=+3$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $+6x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ = $-5x$
ಗುಣಲಬ್ಧ = $+6x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-5x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$-5x = -2x - 3x$

ಉದಾಹರಣೆ 4: $6x^2 - x - 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$6x^2 - x - 2 = 0$

$6x^2 - 4x + 3x - 2 = 0$

$2x(3x-2) + 1(3x-2) = 0$

$(2x+1)(3x-2) = 0$

$2x + 1 = 0, 3x - 2 =$

$2x = -1, 3x = 2$

$\boldsymbol{x = \frac{-1}{2}, x = \frac{2}{3}}$

ಮೊದಲ ಪದ = $6x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=-2$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $-12x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ = $-x$
ಗುಣಲಬ್ಧ = $-12x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$- x = - 4x + 3x$

ಉದಾಹರಣೆ 5 : $3x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 2 = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\boldsymbol{3x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 2 = 0}$

$3x^2 - \sqrt{6}\,x - \sqrt{6}\,x + 2 = 0$

$(\sqrt{3})^2 x^2 - \sqrt{2}.\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}.\sqrt{3}\,x + (\sqrt{2})^2 = 0$

$\sqrt{3}\,x(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) = 0$

$(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2})(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) = 0$

$(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) = 0\,,\ (\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) = 0$

$\sqrt{3}\,x = \sqrt{2},\ \sqrt{3}\,x = \sqrt{2}$

$\boldsymbol{x = \sqrt{\frac{2}{3}}\ ,\ x = \sqrt{\frac{2}{3}}}$

ಮೊದಲ ಪದ = $3x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=+2$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $6x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ = $-2\sqrt{6}\,x$
ಗುಣಲಬ್ಧ = $6x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-2\sqrt{6}\,x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$-2\sqrt{6}\,x = \sqrt{6}\,x - \sqrt{6}\,x$

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ವಿಭಾಗ 10.1 ರಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾದ ಪ್ರಾರ್ಥನಾ ಮಂದಿರದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಧರ್ಮದರ್ಶಿಯೊಬ್ಬರು ಒಂದು ಪ್ರಾರ್ಥನಾ ಮಂದಿರವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬಯಸುತ್ತಾರೆ ಹಾಗೂ ಇದರ ಒಳಾಂಗಣ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $300m^2$ ಆಗಿದ್ದು, ಉದ್ದವು ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 1m ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತಾರೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆ ಮಂದಿರದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಎಷ್ಟಿರಬೇಕು?

$2x^2 + x - 300 = 0$
$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$
$2x(x-12) + 25(x-12) = 0$
$(x-12)(2x+25) = 0$
$x - 12 = 0, \quad 2x + 25 = 0$
$x = 12, \quad$ ~~$2x = -25$~~
ಅಗಲ $= x = 12\,m$
ಉದ್ದ $= 2x + 1 = 2(12) + 1 = 24 + 1 = 25\,m$

> ಮೊದಲ ಪದ $=2x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=-300$
> ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -600x^2$
> ಮಧ್ಯದ ಪದ $= +x$
> ಗುಣಲಬ್ಧ $= -600x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $+x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
> $+x = -24x + 25x$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

1. ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ **(ii)** $2x^2 + x - 6 = 0$ **(iii)** $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ **(iv)** $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$

$x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$
$x(x-5) + 2(x-5) = 0$
$(x-5)(x+2) = 0$
$(x-5) = 0, (x+2) = 0$
$x = 5, x$

> ಮೊದಲ ಪದ $=x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=-10$
> ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -10x^2$
> ಮಧ್ಯದ ಪದ $= -3x$
> ಗುಣಲಬ್ಧ $= -10x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-3x$
> ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ, $-3x = -5x + 2x$

(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

$2x^2 + x - 6 = 0$
$2x^2 + 4x - 3x - 6 = 0$
$2x(x+2) - 3(x+2) = 0$
$(x+2)(2x-3) = 0$
$x + 2 = 0, 2x - 3 = 0$
$x = -2, 2x = 3$
$x = -2, x = \frac{3}{2}$

> ಮೊದಲ ಪದ $=2x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=-6$
> ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -12x^2$
> ಮಧ್ಯದ ಪದ $= +x$
> ಗುಣಲಬ್ಧ $= -12x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $+x$
> ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $+x = +4x - 3x$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\sqrt{2}x^2 + 2x + 5x + 5\sqrt{2} = 0$
$\sqrt{2}x(x+\sqrt{2}) + 5(x+\sqrt{2}) = 0$
$(\sqrt{2}x + 5)(x + \sqrt{2}) = 0$
$\sqrt{2}x + 5 = 0, \quad x + \sqrt{2} = 0$
$\sqrt{2}x = -5, \quad x = -\sqrt{2}$
$x = \frac{-5}{\sqrt{2}}, \quad x = -\sqrt{2}$

> ಮೊದಲ ಪದ $=+\sqrt{2}x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=+5\sqrt{2}$
> ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= +10x^2$
> ಮಧ್ಯದ ಪದ $= +7x$
> ಗುಣಲಬ್ಧ $= +10x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $+7x$
> ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
> $+7x = +2x + 5x$

(iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

$16x^2 - 8x + 1 = 0$
$16x^2 - 4x - 4x + 1 =$
$4x(4x-1) - 1(4x-1) = 0$
$(4x-1)(4x-1) = 0$
$4x - 1 = 0, \quad 4x - 1 = 0$

> ಮೊದಲ ಪದ $=+16x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=+1$
> ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= +16x^2$
> ಮಧ್ಯದ ಪದ $= -8x$
> ಗುಣಲಬ್ಧ $= +16x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-8x$
> ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
> $-8x = -4x - 4x$

$4x = 1, 4x = 1$

$x = \frac{1}{4}, \ x = \frac{1}{4}$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

$100x^2 - 20x + 1 = 0$

$100x^2 - 10x - 10x + 1 = 0$

$10x(10x - 1) - 1(10x - 1) = 0$

$(10x - 1)(10x - 1) = 0$

$10x - 1 = 0, 10x - 1 = 0$

$10x = 1, 10x = 1$

$x = \frac{1}{10}, \ x = \frac{1}{10}$

ಮೊದಲ ಪದ $=+100x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=+1$

ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= +100x^2$

ಮಧ್ಯದ ಪದ $= -20x$

ಗುಣಲಬ್ಧ $= +100x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-20x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$-20x = -10x - 10x$

2. ಉದಾಹರಣೆ1 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

(i) ಜಾನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= x$

ಜೀವನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 45 - x$

5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡ ನಂತರ

ಜಾನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= x - 5$

ಜೀವನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 45 - x - 5 = 40 - x$

ಅವರ ಗೋಲಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 124$

$\therefore (x - 5)(40 - x) = 124$

$40x - x^2 - 200 + 5x = 124$

$-x^2 + 45x - 200 - 124 = 0$

$-x^2 + 45x - 324 = 0 \times -1$

$\mathbf{x^2 - 45x + 324 = 0}$

$x^2 - 36x - 9x + 324 = 0$

$x(x - 36) - 9(x - 36) = 0$

$(x - 36)(x - 9) = 0$

$(x - 36) = 0, \ \ (x - 9) = 0$

$x = 36, \ \ x = 9$

ಜಾನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= x = 36$

ಜೀವನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 45 - x = 45 - 36 = 9$

ಅಥವಾ

ಜಾನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= x = 9$

ಜೀವನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 45 - x = 45 - 9 = 36$

(ii) ಗೊಂಬೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= x$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗೊಂಬೆ ತಯಾರಿಸಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ

$= (55 - x)$ ರೂ

ಒಟ್ಟು ಗೊಂಬೆಗಳ ಬೆಲೆ $= 750$ ರೂ

$\therefore x(55 - x) = 750$

$55x - x^2 = 750$

$-x^2 + 55x - 750 = 0 \times -1$

$\mathbf{x^2 - 55x + 750 = 0}$

$x^2 - 25x - 30x + 750 = 0$

$x(x - 25) - 30(x - 25) = 0$

$(x - 25)(x - 30) = 0$

$(x - 25) = 0, \ \ (x - 30) = 0$

$x = 25, \quad x = 30$

ಗೊಂಬೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 25 ಅಥವಾ 30

3. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 27 ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ 182 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $= x$ ಆದರೆ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $= 27 - x$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 182$

$\therefore x(27 - x) = 182$

$27x - x^2 = 182$

$-x^2 + 27x - 182 = 0 \times -1$

$\mathbf{x^2 - 27x + 182 = 0}$

$x^2 - 13x - 14x + 182 = 0$

$x(x - 13) - 14(x - 13) = 0$

$(x - 13)(x - 14) = 0$

$(x - 13) = 0, \quad (x - 14) = 0$

$x = 13, x = 14$

ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $= 13$ ಆದರೆ

ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $= 27 - 13 = 14$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $= 14$ ಆದರೆ

ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $= 27 - 14 = 13$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ 13 ಮತ್ತು 14

4. ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು 365 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗಿರಲಿ, ಮತ್ತೊಂದು ಕ್ರಮಾಗತ ಧನಸಂಖ್ಯೆ $= x + 1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$x^2 + (x + 1)^2 = 365$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 35$

$2x^2 + 2x + 1 - 365 = 0$

$2x^2 + 2x - 364 = 0 \div 2$

$\mathbf{x^2 + x - 182 = 0}$

$x^2 + 14x - 13x - 182 = 0$

$x(x + 14) - 13(x + 14) = 0$

$(x + 14)(x - 13) = 0$

$(x + 14) = 0, (x - 13) = 0$

$x = -14, x = 13$

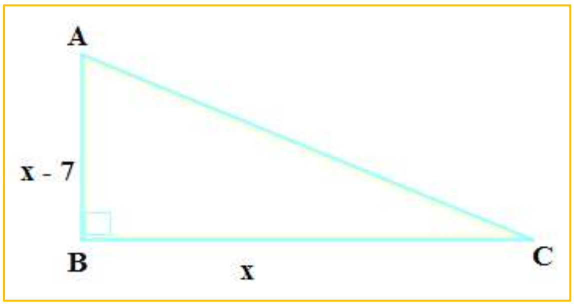
$\therefore x + 1 = 13 + 1 = 14$

ಕ್ರಮಾಗತ ಎರಡು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 13, 14 ಆಗಿವೆ.

5. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರವು ಅದರ ಪಾದಕ್ಕಿಂತ 7cm ಕಡಿಮೆ ಇದೆ. ಅದರ ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು 13cm ಆದರೆ ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ $BC = x\,cm$, ಎತ್ತರ $AB = (x - 7)cm$

ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ, $BC^2 + AB^2 = AC^2$



$x^2 + (x - 7)^2 = 13^2$

$x^2 + x^2 + 7^2 - 2(x)(7) = 169$

$2x^2 - 14x + 49 - 169 = 0$

$2x^2 - 14x - 120 = 0 \div 2$

$\mathbf{x^2 - 7x - 60 = 0}$

$x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$

$x(x-12)+5(x-12)=0$
$(x-12)(x+5)=0$
$(x-12)=0, \quad (x+5)=0$
$x=12, \; x=-5$
ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ $BC = x = 12\,cm$, ಎತ್ತರ $AB=(x-7)=12-7=5cm$

6. ಒಂದು ಗುಡಿ ಕೈಗಾರಿಕೆಯು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಡಿಕೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿನದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಮಡಿಕೆಯ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ), ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಮಡಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 3 ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಲಾಯಿತು. ಆ ದಿನದ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು ರೂ 90 ಆದರೆ ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಮಡಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿ ಮಡಿಕೆಯ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮಡಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= x$

ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ $=(2x+3)$ ರೂ

$\therefore x(2x+3)=90$

$\mathbf{2x^2+3x-90=0}$

$2x^2+15x-12x-90=0$
$x(2x+15)-6(2x+15)=0$
$(2x+15)(x-6)=0$
$(2x+15)=0, (x-6)=0$
$2x=-15, \; x=6$
$x=\frac{-15}{2}, x=6$

ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= x = 6$

ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ $=(2x+3)$

$=2(6)+3=12+3=15$ ರೂ

4.4 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ

$b^2 - 4ac$ ಯ ಬೆಲೆಯು, $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದರಿಂದ

$b^2 - 4ac$ ಯನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು Δ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುವರು.

ಹೀಗೆ, $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು

i) $b^2 - 4ac > 0$ ಆದರೆ ಎರಡು ಭಿನ್ನವಾದ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ii) $b^2 - 4ac = 0$ ಆದರೆ ಎರಡು ಸಮನಾದ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

iii) $b^2 - 4ac < 0$ ಆದರೆ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಶೋಧಕ	ಸ್ವಭಾವ
$\Delta = 0$	ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ
$\Delta > 0$	ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ವಿಭಿನ್ನ
$\Delta < 0$	ಊಹಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಉದಾಹರಣೆ 7: $2x^2 - 4x + 3 = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸಿ.

$a=2, \quad b=-4, \quad c=3$
$\Delta = b^2-4ac$
$\Delta = (-4)^2-4(2)(3) = 16-24$
$\Delta = -8 < 0$ ಮೂಲಗಳು ಊಹಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 8: 13m ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಅಂಚಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲೋಹದ ಕಂಬವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅದರ ಒಂದು ವ್ಯಾಸ AB ಯ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಾದ A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ದ್ವಾರಗಳಿವೆ. ಈ ದ್ವಾರಗಳಿಂದ ಆ ಲೋಹದ ಕಂಬಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 7m ಆಗಿರುವಂತೆ ಕಂಬವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ, ಕಂಬವು ಆ ಎರಡು ದ್ವಾರಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದೆ?

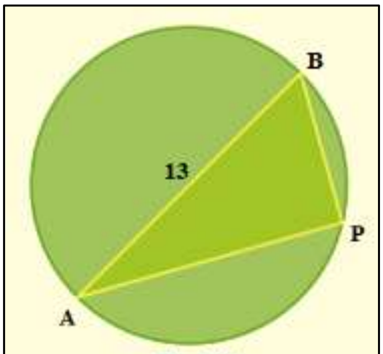


Fig 10.4

$BP = x\ m$
$AP = (x+7)m$
$AB = 13\ m$ ವ್ಯಾಸ
$\angle APB = 90^0$
$AP^2 + PB^2 = AB^2$
$x^2 + (x+7)^2 = 13^2$
$x^2 + x^2 + 7^2 + 2(x)(7) = 169$
$2x^2 + 14x + 49 - 169 = 0$
$2x^2 + 14x - 120 = 0 \quad \div\ 2$
$x^2 + 7x - 60 = 0$
$x^2 + 12x - 5x - 60 = 0$
$x(x+12) - 5(x+12) = 0$
$(x+12)(x-5) = 0$
$x + 12 = 0, \quad x - 5 = 0$
$x = -12, \quad x = 5$
ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ ಋಣವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.
$BP = x\ m = 5m$
$AP = (x+7) = 5 + 7 = 12\ m$

ಉದಾಹರಣೆ 9: $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸಿ. ಅವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a = 3, \quad b = -2, \quad c = \frac{1}{3}$
$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)\left(\frac{1}{3}\right) = 4 - 4 = 0$
$b^2 - 4ac = 0$ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ
ಮೂಲಗಳು $\frac{-b}{2a}, \quad \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(3)}, \quad \frac{-(-2)}{2(3)} = \frac{2}{6}, \quad \frac{2}{6}$
$= \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.3

1. **ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸಿ. ಅವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$
$a = 2, \quad b = -3, \quad c = 5$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(5)$
$\Delta = 9 - 40$
$\Delta = -31$
$\Delta < 0$
⇒ ಮೂಲಗಳು ಊಹಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

$a = 3, \quad b = -4\sqrt{3}, \quad c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4(3)(4)$

$\Delta = 48 - 48$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ

ಮೂಲಗಳು $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$

$= \frac{-(-4\sqrt{3})}{2(3)}, \frac{-(-4\sqrt{3})}{2(3)}$

$= \frac{4\sqrt{3}}{6}, \frac{4\sqrt{3}}{6}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

$a = 2, \quad b = -6, \quad c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4(2)(3)$

$\Delta = 36 - 24$

$\Delta = 12$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಭಿನ್ನ

ಮೂಲಗಳು $= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{-(-6)+\sqrt{12}}{2(2)}, \frac{-(-6)-\sqrt{12}}{2(2)}$

$= \frac{6+\sqrt{12}}{4}, \frac{6-\sqrt{12}}{4}$

$= \frac{6+2\sqrt{3}}{4}, \frac{6-2\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

(i) ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮನಾದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(k - 2) + 6 = 0$

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$

$a = 2, \quad b = k, \quad c = 3$

$b^2 - 4ac = 0$

$(k)^2 - 4(2)(3) = 0$

$k^2 - 24 = 0$

$k^2 = 24$

$k = \pm\sqrt{24}$

$= \pm\sqrt{4 \times 6} = \pm 2\sqrt{6}$

(ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

$kx^2 - 2kx + 6 = 0$

$a = k, \quad b = -2k, \quad c = 6$

$b^2 - 4ac = 0$

$(-2k)^2 - 4(k)(6) = 0$

$4k^2 - 24k = 0 \Rightarrow 4k(k - 6) = 0$

$4k = 0, k - 6 = 0$

$k = 0, \quad k = 6$

(ii) $800m^2$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಉದ್ದವು ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಮಾವಿನ ತೋಪನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ, ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮಾವಿನ ತೋಟದ ಅಗಲ $= l$

ಮಾವಿನ ತೋಟದ ಉದ್ದ $= 2l$

ಮಾವಿನ ತೋಟದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಉದ್ದ × ಅಗಲ

$(l)(2l) = 800$

$2l^2 = 800$

$l^2 = \frac{800}{2} = 400$

$l = \pm\sqrt{400} = \pm 20$

ಮಾವಿನ ತೋಟದ ಅಗಲ $= l = 20$ m

ಮಾವಿನ ತೋಟದ ಉದ್ದ $= 2l = 2 \times 20 = 40$ m

(iii) ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತಹ ಸನ್ನಿವೇಶವಿರಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ. ಇಬ್ಬರು ಸ್ನೇಹಿತರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮೊತ್ತವು 20 ವರ್ಷಗಳಾಗಿವೆ. ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ, ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 48 ವರ್ಷಗಳಾಗಿತ್ತು.

ಒಬ್ಬ ಸ್ನೇಹಿತನ ವಯಸ್ಸು $= x$ ವಯಸ್ಸು

ಮತ್ತೊಬ್ಬ ಸ್ನೇಹಿತನ ವಯಸ್ಸು $= (20 - x)$ ವಯಸ್ಸು.

4 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಮೊದಲನೆ ಸ್ನೇಹಿತನ ವಯಸ್ಸು $= (x - 4)$

4 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಎರಡನೇ ಸ್ನೇಹಿತನ ವಯಸ್ಸು

$= (20 - x - 4) = 16 - x$

$(x - 4)(16 - x) = 48$

$16x - x^2 - 64 + 4x = 48$

$-x^2 + 20x - 64 - 48 = 0$

$x^2 - 20x + 112 = 0$

$a = 1, \quad b = -20, \quad c = 112$

$b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(1)(112)$

$= 400 - 448 = -48$

ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿರುವ ಸನ್ನಿವೇಶ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

(iv) ಸುತ್ತಳತೆ 80m ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $400m^2$ ಇರುವ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು l ಮತ್ತು b ಆಗಿರಲಿ.

ಸುತ್ತಳತೆ $= 2(l + b) = 80$

$l + b = \frac{80}{2} = 40$

$l = 40 - b$

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $l \times b = 400$

$l(40 - l) = 400$

$40l - l^2 = 400$

$l^2 - 40l + 400 = 0$

$a = 1, \quad b = -40, \quad c = 400$

$b^2 - 4ac = (-40)^2 - 4(1)(400)$

$= 1600 - 1600 = 0$

$b^2 - 4ac = 0$ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ

ಮೂಲಗಳು $\frac{-b}{2a}$, $\frac{-b}{2a} = \frac{-(-40)}{2(1)}$,

$\Rightarrow \frac{-(-40)}{2(1)} = \frac{40}{2}$, $\frac{40}{26} = 20\,, 20$

ಆಯತದ ಉದ್ದ $l = 20\ m$

ಆಯತದ ಅಗಲ $b = 40 - l = 40 - 20 = 20m$

****

5 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು

ಕಲಿಕಾಂಶಗಳು:

1. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ
2. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ
3. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ nನೇ ಪದ
4. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ
5. ಸಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

1.2 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ:

ಮೊದಲ ಪದವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಯೇ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ.

i)	1, 2, 3, 4	ಪ್ರತಿ ಪದವು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕಿಂತ 1 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ
ii)	100, 70, 40, 10	ಪ್ರತಿ ಪದವು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕಿಂತ 30 ಕಡಿಮೆ ಇದೆ
iii)	-3, -2, -1, 0	ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು
iv)	3, 3, 3, 3	ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ 0 ಯನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು
v)	-1, -1.5,-2.0,-2.5	ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ −0.5 ನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ

ಆ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (**d**) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಧನ, ಋಣ ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯ ಆಗಿರಬಹುದು.

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ a_1 . ಎರಡನೇ ಪದ a_2 .... n ನೇ ಪದ a_n, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ **d** ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯು a_1, a_2, a_3 ...... a_n ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದರಿಂದ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots\ldots\, a_{n+1} - a_n = d$

ಪರಿಮಿತ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ

ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿ. ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗೆ ಕೊನೆಯ ಪದ ಇರುತ್ತದೆ.

a) ಬೆಳಗಿನ ಪ್ರಾರ್ಥನೆಗೆ ಸಾಲಾಗಿ ನಿಲ್ಲುವ ಶಾಲೆಯೊಂದರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರಗಳು (cm ಗಳಲ್ಲಿ)
147, 148, 149 .... 157.

b) ಒಟ್ಟು ರೂ 1000ಗಳ ಸಾಲಕ್ಕೆ 5% ದಂತೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಪಾವತಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಬಾಕಿ ಹಣ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ)
950, 900, 850, 800 .... 50.

c) ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ರೂ 50 ರಂತೆ ಉಳಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ 10 ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಉಳಿಕೆ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ)
50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500.

ಅಪರಿಮಿತ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು

ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಪರಿಮಿತ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುವರು. ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗೆ ಕೊನೆಯ ಪದ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

a) 3, 7, 11, ...
b) 1, 4, 7, 10, . . .
c) -10, -15, -20, ...

ಗಮನಿಸಿ: ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1: $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$.......... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಪದ $= a_1 = \frac{3}{2}$

ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $\mathbf{d} = a_2 - a_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತವೆ? ಅವುಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) 4, 10, 16, 22 .... (ii) 1, -1, -3, -5 .... (ii)-2, 2, -2, 2 ....(iv)1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 ....

ಪರಿಹಾರ:

i) 4, 10, 16, 22 ....

$a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$; $a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$;$a_3 - a_2 = 22 - 16 = 6$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂಖ್ಯಾಪಟ್ಟಿಯು d = 6 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳು: 28, 34

ii) 1, -1, -3, -5 ....

$a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$; $a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -2$; $a_3 - a_2 = -5 - (-3) = -2$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂಖ್ಯಾಪಟ್ಟಿಯು d = -2 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳು: -7, -9

iii) -2, 2, -2, 2 ....

$a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$; $a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$; $a_3 - a_2 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

ಇಲ್ಲಿ $a_{k+1} \neq a_k$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂಖ್ಯಾಪಟ್ಟಿಯು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿಲ್ಲ.

iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 ....

$a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$; $a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$; $a_3 - a_2 = 2 - 1 = 1$

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_3 - a_2$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂಖ್ಯಾಪಟ್ಟಿಯು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

1. **ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಪಟ್ಟಿಯು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಏಕೆ?**

(i) ಒಂದು ಟ್ಯಾಕ್ಸಿಯ ಬಾಡಿಗೆ ಮೊದಲ ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ಗೆ ರೂ 15 ಆಗಿದ್ದು ನಂತರದ ಪ್ರತಿ ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ಗೆ ರೂ 8 ರಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಪರಿಹಾರ:

(i) ಮೊದಲ ಪದ $a_1 = 15$, $a_2 = 15 + 8 = 23$, $a_3 = 23 + 8 = 31$ ....

ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ. ಏಕೆಂದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = 8 ಆಗಿದೆ.

(ii) ಒಂದು ನಿರ್ವಾತಗೊಳಿಸುವ ವಾಯು ರೇಚಕ ಯಂತ್ರವು ಪ್ರತಿಸಲ ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿರುವ ಅನಿಲದ $\frac{1}{4}$ ರಷ್ಟು ಅನಿಲವನ್ನು ಹೊರತೆಗೆದರೆ ಉಳಿಯುವ ಅನಿಲದ ಪ್ರಮಾಣಗಳು.

ಪರಿಹಾರ:

(ii) ಆರಂಭಿಕ ಅನಿಲದ ಪ್ರಮಾಣವು V ಆಗಿರಲಿ.

ರೇಚಕ ಯಂತ್ರವು ಪ್ರತಿಬಾರಿ ಹೊರತೆಗೆಯುವ ಅನಿಲದ ಪ್ರಮಾಣ $= \frac{1}{4}$ ಭಾಗ,

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಥಮ ಬಾರಿ $\frac{1}{4}$ ಭಾಗ ಅನಿಲವನ್ನು ಹೊರತೆಗೆದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಅನಿಲದ ಪ್ರಮಾಣ $= V - \frac{1}{4} = \frac{3V}{4}$,

ಎರಡನೇ ಬಾರಿ ಅನಿಲ ಹೊರ ತೆಗೆದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಪ್ರಮಾಣ $= \frac{3V}{4} - \frac{3V}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3V}{4} - \frac{3V}{16} = \frac{9V}{16}$ ……

ಇಲ್ಲಿ ಪದಗಳು, V, $\frac{3V}{4}$, $\frac{9V}{16}$ .. …..

$a_2 - a_1 = \frac{3V}{4} - V = -\frac{V}{4}$; $a_3 - a_2 = \frac{9V}{16} - \frac{3V}{4} = \frac{9V}{16} - \frac{12V}{16} = -\frac{3V}{16}$

ಆದ್ದರಿಂದ $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$;

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲ.

(iii) ಬಾವಿಯನ್ನು ತೋಡುವಾಗ ಮೊದಲ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ರೂ 150 ನಂತರದ ಪ್ರತಿ ಮೀಟರ್‌ಗೆ 50 ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಪರಿಹಾರ: (iii) ಮೊದಲ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ತಗಲುವ ಖರ್ಚು = 150 ರೂ

ಎರಡನೇ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ತಗಲುವ ಖರ್ಚು = 150+50 = 200ರೂ

ಮೂರನೇ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ತಗಲುವ ಖರ್ಚು = 200+50 = 250ರೂ

ನಾಲ್ಕನೇ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ತಗಲುವ ಖರ್ಚು = 250+50 = 300ರೂ

ಆದ್ದರಿಂದ 150, 200, 250, 300........ ಇಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 50 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. **ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.**

(iv) ಆರಂಭಿಕ ಠೇವಣಿ ರೂ 10000 ಕ್ಕೆ 8% ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಂತೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷ ಆಗುವ ಮೊತ್ತ

ಪರಿಹಾರ:(iv) ಅಸಲು ರೂ P ಯನ್ನು r% ದರದಂತೆ n ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಆಗುವ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ

$P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$; P = 10,000; r = 8%, ಆದಾಗ,; ಅಸಲು = 10000ರೂ

ಒಂದನೇ ವರ್ಷದ ಮೊತ್ತ = $10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^1 = 10000x\frac{108}{100} = 100x108=10800$ರೂ

ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಮೊತ್ತ = $10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2 = 10000x\frac{108}{100}x\frac{108}{100} = 108 \text{ x } 108 = 11664$ ರೂ

ಇಲ್ಲಿ ಪದಗಳು, 10000, 10800, 11664 .. …..

$a_2 - a_1 = 10800 - 10000 = 800$

$a_3 - a_2 = 11664 - 10800 = 864$

$a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$; **ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲ.**

2. ಮೊದಲನೆ ಪದ a, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) a = 10, d = 10 ii) a = -2, d = 0 (iii) a = 4, d = -3 (iv)) a = -1, d = $\frac{1}{2}$ (v) a = -1.25, d = 0.25

(i)_a = 10, d = 10

$a_1 = 10$,
$a_2 = a_1 + d = 10 + 10 = 20$
$a_3 = a_2 + d = 20 + 10 = 30$
$a_4 = a_3 + d = 30 + 10 = 40$

∴ **ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳು 10, 20, 30, 40**

(ii) a = -2, d = 0

$\boldsymbol{a_1} = -2$,
$a_2 = a_1 + d = -2 + 0 = -2$
$a_3 = a_2 + d = -2 + 0 = -2$
$a_4 = a_3 + d = -2 + 0 = -2$

∴ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳು -2, -2, -2, -2,

iii) a = 4, d = -3

$a_1 = 4$,
$a_2 = a_1 + d = 4 - 3 = 1$
$a_3 = a_2 + d = 1 - 3 = -2$
$a_4 = a_3 + d = -2 - 3 = -5$

∴ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳು

4, 1, -2, -5

(iv) a = -1, d = $\frac{1}{2}$

$a_1 = -1$,
$a_2 = a_1 + d = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
$a_3 = a_2 + d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$
$a_4 = a_3 + d = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

∴ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳು **-1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$**

(v) a = -1.25, d = -0.25

a_1 = -1.25

$a_2 = a_1 + d$ = -1.25 - 0.25 = -1.50

$a_3 = a_2 + d$ = -1.50 - 0.25 = - 1.75

$a_4 = a_3 + d$ = -1.75 + 0.25 = -2.00

ಆದ್ದರಿಂದ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳು **–1.25, -1.50, -1.75, -2.00**

3. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಿಗೆ ಮೊದಲನೇ ಪದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

i) 3, 1, - 1, - 3.......   ii) -5, -1, 3, 7....... iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\ldots$ iv) 0.6, 1.7, 2.8, 3.9, ...

i) 3, 1, - 1, - 3.......

a =3; d = $a_2 - a_1$ = 1 – 3 = -2

ii) -5, -1, 3, 7.......

a = -5; d = $a_2 - a_1$= -1– (-5) = -1+ 5 = 4

iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\ldots$

a =$\frac{1}{2}$; **d** = $a_2 - a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ = **0**

iv) 0.6, 1.7, 2.8, 3.9, ...

a = 0.6; d = $a_2 - a_1$ = 1.7 – 0.6 = 1.1

4. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಾಗಿವೆ? ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅದರ ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

i	2, 4, 8, 16	ii	2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$	iii	-1.2, -3.2, -5.2, -7.2 .....
iv	iv) -10, -6, -2, 2	v	3, 3+ $\sqrt{2}$,3 + 2$\sqrt{2}$, 3 + 3$\sqrt{2}$, …	vi	0.2, 0.22, 0.222, 0.2222 .....
vii	0, -4, -8, -12	viii	$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$	ix	1, 3, 9, 27 ....
x	a, 2a, 3a, 4a	xi	a, a^2, a^3, a^4…….	xii	$\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}$……..
xiii	$\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}$…	xiv	1^1, 3^2, 5^2, 7^2, ……	xv	1^1, 5^2, 7^2, 73, ……….

i) 2, 4, 8, 16 ....

$a_2 - a_1$ **= 4 – 2 = 2**

$a_3 - a_2$ **= 8 – 4 = 4**

ಇಲ್ಲಿ $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

∴ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಅಲ್ಲ

ii) 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$ ....

$a_2 - a_1 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$; $a_3 - a_2 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

ಇಲ್ಲಿ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3$

∴ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಹೌದು; d = $\frac{1}{2}$;

ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು $\frac{7}{2} + \frac{1}{2}$; $4 + \frac{1}{2}$; $\frac{9}{2} + \frac{1}{2}$; $5 + \frac{1}{2}$ = **4, $\frac{9}{2}$, 5, $\frac{11}{2}$**

iii) -1.2, -3.2, -5.2, -7.2 .....

$a_2 - a_1$ = -3.2 – (-1.2) = -3.2 + 1.2 = -2

$a_3 - a_2$ = -5.2 – (-3.2) = -5.2 + 3.2 = 2

$a_4 - a_3$ = -7.2 – (-5.2) = -7.2 + 5.2 = -2

ಇಲ್ಲಿ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3$

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಹೌದು; d = -2

ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು **-9.2, -11.2, -13.2**

iv) -10, -6, -2, 2 ......

a_2 - a_1 = -6 – (-10) = -6 + 10 = 4
a_3 - a_2 = -2 – (-6) = -2 + 6 = 4
a_4 - a_3 = 2 – (-2) = 2 + 2 = 4
ಇಲ್ಲಿ a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3
ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಹೌದು; d = 4
ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು **6 ,10,14**

(v) 3, 3+ $\sqrt{2}$, 3 + 2$\sqrt{2}$, 3 + 3$\sqrt{2}$, ...

a_2 - a_1 = 3+ $\sqrt{2}$ – 3 = $\sqrt{2}$
a_3 - a_2 = 3 + 2$\sqrt{2}$ – 3+ $\sqrt{2}$= $\sqrt{2}$
a_4 - a_3 = 3 + 3$\sqrt{2}$ – 3 + 2$\sqrt{2}$ = $\sqrt{2}$
ಇಲ್ಲಿ a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3
ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಹೌದು; d = $\sqrt{2}$
ಮುಂದಿನ 3 ಪದಗಳು **3 + 4$\sqrt{2}$; 3 + 5$\sqrt{2}$; 3 + 6$\sqrt{2}$**

(vi)0.2, 0.22, 0.222, 0.2222 ....

a_2 - a_1 = 0.22 – 0.2 = 0.02
a_3 - a_2 = 0.222 - 0.22 = 0. 002
ಇಲ್ಲಿ a_2 - a_1 ≠ a_3 - a_2
ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಅಲ್ಲ

(vii) 0, -4, -8, -12 ....

a_2 - a_1 = -4 – 0 = -4
a_3 - a_2 = -8 – (-4) = -8 + 4 = - 4
a_4 - a_3 = -12 – (-8) = -12 + 8 = -4
ಇಲ್ಲಿ a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3
ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಹೌದು; d = -4
ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು: **-16; -20; -24**

(viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots..$

a_2 - a_1 = $-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$
a_3 - a_2 = $-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$
a_4 - a_3 = $-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$
ಇಲ್ಲಿ a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3
ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಹೌದು; d = 0
ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(ix) 1, 3, 9, 27 ....

a_2 - a_1 = 3 – 1 = 2
a_3 - a_2 = 9 – 3 = 6
ಇಲ್ಲಿ a_2 - a_1 ≠ a_3 - a_2
ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಅಲ್ಲ

(x) a, 2a, 3a, 4a ....

a_2 - a_1 = $2a - a = a \Rightarrow a_3 - a_2 = 3a - 2a = a$
ಇಲ್ಲಿ a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3
ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಹೌದು; d = a
ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು $\mathbf{5a, 6a, 7a}$

(xi) a, a^2, a^3, a^4…….

a_2 - a_1 = $a^2 - a$ = $a(a-1)$

a_3 - a_2 = $a^3 - a^2$ = $a^2(a-1)$

ಇಲ್ಲಿ $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಅಲ್ಲ

(xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}$……..

$a_2 - a_1 = \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

$a_3 - a_2 = \sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

ಇಲ್ಲಿ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3$

∴ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಹೌದು; $d = \sqrt{2}$

ಮುಂದಿನ 3 ಪದಗಳು $\sqrt{50}$, $\sqrt{72}$, $\sqrt{98}$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}$……

$a_2 - a_1 = \sqrt{6} - \sqrt{3}$

$a_3 - a_2 = \sqrt{9} - \sqrt{6} = 3 - \sqrt{6}$

ಇಲ್ಲಿ $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

∴ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಅಲ್ಲ

(xiv) 1^1 , 3^2, 5^2, 7^2, ……

$a_2 - a_1 = 3^2 - 1^1 = 9 - 1 = 8$

$a_3 - a_2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

ಇಲ್ಲಿ $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಅಲ್ಲ

(xv) 1^1, 5^2, 7^2, 73, ……….

$a_2 - a_1 = 5^2 - 1^1 = 25 - 1 = 24$; $a_3 - a_2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$; $a_4 - a_3 = 73 - 7^2 = 73 - 49 = 24$

ಇಲ್ಲಿ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3$

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಹೌದು; ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d = 24

ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು 97, 121, 14

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ nನೇ ಪದ

nನೇ ಪದ: $a_n = a + (n-1)d$ [ಮೊದಲ ಪದ a, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d]

ಕೊನೆಯಿಂದ nನೇ ಪದ: $l - (n-1)d$ [ಕೊನೆಯ ಪದ – l , ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ – d]

ಉದಾಹರಣೆ 3: 2, 7, 12 …… ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 10ನೇ ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

a = 2, d = 7 - 2 = 5 ಮತ್ತು n = 10

$a_n = a + (n-1)d$

$a_{10} = 2 + (10-1)5$

$a_{10} = 2 + (9)5$

$a_{10} = 2 + 45$

$a_{10} = 47$

ಉದಾಹರಣೆ 4: 21, 18, 15 …… ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಷ್ಟನೇ ಪದವು –81 ಆಗಿದೆ? ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಪದ 0 ಆಗಿದೆಯೆ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಕೊಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: a = 21, d = 18 - 21 = -3 ಮತ್ತು a_n = -81.

$a_n = a + (n-1)d$

$-81 = 21 + (n-1)(-3) = 21 - 3n + 3$

$-81 = 24 - 3n \Rightarrow 3n = 24 + 81 \Rightarrow 3n = 105 \Rightarrow n = 35$

ಎಷ್ಟನೇ ಪದ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದೆ?

$0 = 21 + (n-1)(-3) = 21 - 3n + 3$

$\Rightarrow 3n = 24$ $\Rightarrow$ **$n = 8$** ಅಂದರೆ **8ನೇ ಪದವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದೆ**

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 3ನೇ ಪದ 5 ಮತ್ತು 7ನೇ ಪದ 9 ಆದರೆ ಆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$a + (n-1)d = a_n$

$a + (3-1)d = 5$

$a + 2d = 5$ ------- (1)

$a + (7-1)d = 9$

a	+	2d	=	5
a	+	6d	=	9
		−4d	=	- 4

$\Rightarrow d = 1$

$\Rightarrow \boldsymbol{a + 2(1) = 5} \Rightarrow a + 2 = 5$

$\Rightarrow a = 5 - 2 = 3$

∴ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ: 3, 4, 5, 6, – – –

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:

$d = \frac{a_p - a_q}{p-q}$

$a_p = a_7$; $a_q = a_3$

$d = \frac{a_7 - a_3}{7-3} = \frac{9-5}{7-3} = \frac{4}{4} = 1$

$a = a_p + (p-1)d$ a

$a = a_7 + (7-1)1$

$a = 9 + (7-1)1$

$a = 9 + 6 = 3 \Rightarrow a = 3$

∴ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ: 3, 4, 5, 6, - - -

ಉದಾಹರಣೆ 6: 301, ಇದು 5, 11, 17, 13 .... ಈ ಸಂಖ್ಯಾಪಟ್ಟಿಯ ಪದವಾಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $a = 5, d = 11 - 5 = 6$

$a + (n-1)d = a_n$

$5 + (n-1)6 = 301 \Rightarrow 5 + 6n - 6 = 301$

$\Rightarrow 6n - 1 = 301 \Rightarrow 6n = 301 + 1$

$\Rightarrow 6n = 302$

$n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$; ಇಲ್ಲಿ n ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಲ್ಲ

∴301 ಇದು 5, 11, 17, 13 ...ಈ ಸಂಖ್ಯಾಪಟ್ಟಿಯ ಪದ ಅಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ: 12, 15, 18 99

$a = 12, d = 3, a_n = 99$

$a + (n-1)d = a_n$

$12 + (n-1)3 = 99 \Rightarrow 12 + 3n - 3 = 99$

$\Rightarrow 3n + 9 = 99 \Rightarrow 3n = 99 - 9$

$3n = 90 \Rightarrow n = 30$

∴ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ 30 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಕೊನೆಯಿಂದ 11ನೇ (ಮೊದಲನೆ ಪದದ ಕಡೆಗೆ) ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 10, 7, 4 .... −62

ಪರಿಹಾರ: $a = 10, d = 7 - 10 = -3, \quad l = -62$

ಕೊನೆಯಿಂದ nನೇ ಪದ$= l-(n-1)d$

$= -62-(11-1)(-3)$
$= -62+33-3$
$= -62+30$
$= \mathbf{-32}$

ಉದಾಹರಣೆ 9: ರೂ 1000 ಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು 8% ದರದಂತೆ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಠೇವಣಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಬಡ್ಡಿಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆಯೆ? ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 30 ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಸೂತ್ರ $I = \frac{PRT}{100}$

∴ ಮೊದಲನೆ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿ $= \frac{1000x8x1}{100} = 80$ರೂ;

ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿ $= \frac{1000x8x2}{100} = 160$ರೂ

ಮೂರನೇ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿ $= \frac{1000x8x3}{100} = 240$ರೂ

∴ ಪದಗಳು 80,160,240, – – –;ಇಲ್ಲಿ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = d = 80$

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

30 ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿ ; a = 80, d = 80, n = 30

$a_n = a+(n-1)d$
$a_{30} = 80+(30-1)80$
$= 80+29x80 = 80+2320$
$a_{30} = 2400$ರೂ.

ಉದಾಹರಣೆ 10: ಒಂದು ಹೂ ಹಾಸಿನ ಮೊದಲನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 23 ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳಿವೆ. 2ರಲ್ಲಿ 21, 3ರಲ್ಲಿ 19 ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ. ಕೊನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 5 ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳಿದ್ದರೆ ಆ ಹೂ ಹಾಸಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ: 1, 2, 3ನೇ .... ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ: 23, 21, 19,– – –

ಇಲ್ಲಿ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = -2$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

$a = 23, d = -2, a_n = 5, n = ?$

$a+(n-1)d = a_n$
$23+(n-1)(-2) = 5$
$23-2n+2 = 5$
$\Rightarrow -2n+25 = 5$
$\Rightarrow -2n = 5-25$
$\Rightarrow -2n = -20$
$\Rightarrow n = 10$

∴ ಆ ಹೂ ಹಾಸಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 10.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಜಾಗಗಳನ್ನು ತುಂಬಿಸಿ, ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ *a*, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ *d*, *n* ನೇ ಪದ a_n ಆಗಿದೆ.

	a	*d*	*n*	a_n
(i)	7	3	8	…...
(ii)	– 18	…..	10	0
(iii)	…..	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	…..	3.6
(v)	3.5	0	105	…..

ANS
28
2
46
10
3.5

i) $a_n = a + (n - 1)d$

$a_8 = 7 + (8 - 1)3$

$a_8 = 7 + 7x3$

$a_8 = 7 + 21$

$a_8 = 28$

(ii) $a_n = a + (n - 1)d$

$0 = -18 + (10 - 1)d$

$0 = -18 + 9d$

$9d = 18$

$d = 2$

(iii) $a_n = a + (n - 1)d$

$-5 = a + (18 - 1)(-3)$

$-5 = a - 17x3$

$-5 = a - 51$

$a = 46$

(iv) $a_n = a + (n - 1)d$

$3.6 = -18.9 + (n - 1)(2.5)$

$3.6 = -18.9 + 2.5n - 2.5$

$\Rightarrow 3.6 = -21.4 + 2.5n$

$\Rightarrow 2.5n = 3.6 + 21.4$

$\Rightarrow n = \frac{25}{2.5} = \frac{250}{25} = 10$

(v) $a_n = a + (n - 1)d$

$a_n = 3.5 + (105 - 1)(0)$

$a_n = 3.5 + 104x0$

$a_n = 3.5$

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾದ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿ ಸಮರ್ಥಿಸಿ

(i) 10, 7, 4 ..... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 30ನೇ ಪದ

(A) 97 (B) 77 (C) -77 (D) -87

$a_n = a + (n - 1)d$; d = -3

$a_{30} = 10 + (30 - 1)(-3)$

$a_{30} = 10 + (29)(-3) = 10 - 87 = -77$

Ans: (C) = -77

(ii) -3, $-\frac{1}{2}$, 2, ... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 11 ನೇ ಪದ

(A) 28 (B) 22 (C) -38 (D) $-48\frac{1}{2}$

$a_n = a + (n - 1)d$

$d = a_2 - a_1 = -\frac{1}{2} - (-3) = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$

$a_{11} = -3 + (11 - 1)\left[\frac{5}{2}\right] = -3 + (10)\left[\frac{5}{2}\right]$

$a_{11} = -3 + 25 = 22$

Ans: **(B) 22**

3. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಬಾಕ್ಸ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಖಾಲಿ ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ತುಂಬಿಸಿ.

(i) 2, □, 26 **Ans: 14**

(ii) -4, □, □, □, □, 6 **Ans: -2, 0, 2, 4**

(iii) □ 13, □, 3, **Ans: 18 , 8**

(iv) 5, □, □, $9\frac{1}{2}$, **Ans: $\frac{1}{2}$, 8**

(v) □, 38, □, □, □, −22 **Ans: 53, 23, 8, -7**

4. 3, 8, 13, 18 ...... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಷ್ಟನೇ ಪದ 78?

d = 5; a = 3; a_n = 78; n = ? ;

$a_n = a + (n-1)d$

$78 = 3 + (n-1)5 = 3 + 5n - 5 = 5n - 2$

$\Rightarrow 5n = 78 + 2 = 80 \Rightarrow \boldsymbol{n} = \mathbf{16}$

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

i) 7, 13, 19 205

$a_n = a + (n-1)d$

d = a_2 - a_1 = 13 – 7 = 6; a = 7; a_n = 205; n = ?

$205 = 7 + (n-1)6$

$205 = 7 + 6n - 6$

$205 = 6n + 1$

$6n = 205 - 1$

$6n = 204$

$n = \frac{204}{6}$

$\Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{34}$

(ii) 18, $15\frac{1}{2}$, 13 .... -47

$a_n = a + (n-1)d$

d =-$\frac{5}{2}$; a = 18; a_n = -47; n = ?

$-47 = 18 + (n-1)\left[-\frac{5}{2}\right]$

$= 18 - \frac{5}{2}n + \frac{5}{2}$

$\Rightarrow -47 = \frac{36-5n+5}{2} = \frac{41-5n}{2}$

$\Rightarrow -94 = 41 - 5n$

$-5n = -94 - 41$

$\Rightarrow -5n = -135$

$\mathbf{n} = \mathbf{27}$

6. -150 ಇದು 11, 8, 5, 2 ..... ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದವಾಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $a_n = a + (n-1)d$

d = -3; a = 11; a_n = 150; n = ?

$-150 = 11 + (n-1)(-3)$

$\Rightarrow -150 = 11 - 3n + 3$

$\Rightarrow -150 = 14 - 3n$

$\Rightarrow -3n = -150 - 14$

$\Rightarrow -3n = -164$

$\boldsymbol{n} = \frac{\mathbf{164}}{\mathbf{3}}$ n ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ –150 ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದ ಅಲ್ಲ.

7. **ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 11ನೇ ಪದ 38, 16ನೇ ಪದ 73 ಆದರೆ 31ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

$a_n = a + (n-1)d$

a_{11} = 38, a_{16} = 73, a_{31} = ?

$a + (11-1)d = 38$

$a + 10d = 38$ ---------------(1)

$a + (16-1)d = 73$

$a + 15d = 73$ ----------------(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$a + 10d = 38$
$a + 15d = 73$
-5d = -35

d $= \frac{-45}{-3} = 7$

(1) $\Rightarrow a + 10x7 = 38$

$\Rightarrow a + 70 = 38$

$\Rightarrow a = 38 - 70$

$\Rightarrow a = -32$

$a_{31} = -32 + (31 - 1)7$

$a_{31} = -32 + (30)7$

$a_{31} = -32 + 210$

$\boldsymbol{a_{31} = 178}$

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:

$d = \frac{a_p - a_q}{p-q}$

$a_p = a_{16}$; $a_q = a_{11}$

$d = \frac{a_{16}-a_{11}}{16-11} = \frac{73-38}{5} = \frac{35}{5} = 7$

$a_n = a_p + (n - p)d$ a

$a_{31} = a_{16} + (31 - 16)7$

$a_{31} = 73 + (15)7$

$a_{31} = 73 + 105$

$\boldsymbol{a_{31} = 178}$

8. 50 ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 3ನೇ ಪದ 12 ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ 106 ಆದರೆ 29ನೇ ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a(n - 1)d = a_n$

n = 50, $a_3 = 12$, $a_n = 106$ $a_{29} = ?$

$a + (50 - 1)d = 106$

$a + 49d = 106$ --------- (1)

$a + 2d = 12$ --------- -(2)

$\boldsymbol{a + 49d = 106}$
$\boldsymbol{a + 2d = 12}$
47d = 94

$\Rightarrow d = 2$

d = 2 ಎಂದು (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$a + 2(2) = 12$

$a + 4 = 12 \Rightarrow a = 12 - 4$

$a = 8$

$a_{29} = 8 + (29 - 1)2$

$a_{29} = 8 + (28)2$

$a_{29} = 8 + 56$

$\boldsymbol{a_{29} = 64}$

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ: $d = \frac{a_p - a_q}{p-q}$

$a_p = a_{50}$; $a_q = a_3$

$d = \frac{a_{50}-a_3}{50-3} = \frac{106-12}{47} = \frac{94}{47} = 2$

$a_n = a_p + (n - p)d$ a

$a_{29} = a_3 + (29 - 3)2$
$a_{31} = 12 + (26)2$
$a_{31} = 12 + 52 = 64$
ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:

$d = \frac{a_p - a_q}{p - q}$
$a_p = a_{50}$; $a_q = a_3$
$d = \frac{a_{50} - a_3}{50 - 3} = \frac{106 - 12}{47} = \frac{94}{47} = 2$
$a_n = a_p + (n - p)d$ a
$a_{29} = a_3 + (29 - 3)2$
$a_{31} = 12 + (26)2$
$a_{31} = 12 + 52 = 64$

5. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 3ನೇ ಮತ್ತು 9ನೇ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 4 ಮತ್ತು −8 ಆದರೆ ಅದರ ಎಷ್ಟನೇ ಪದ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದೆ?

$a_3 = 4$, $a_9 = -8$
$a_n = a + (n - 1) d$
$a_3 = a + (3 - 1) d$
$4 = a + 2d$ ------------(i)
$a_9 = a + (9 - 1) d$
$-8 = a + 8d$ ---------- (ii)
(i)ರಿಂದ (ii) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

a + 2d = 4
a + 8d = - 8
-6d = 12

$-6d = 12$
ಸಮೀಕರಣ (i) ರಿಂದ
$4 = a + 2(-2)$
$4 = a - 4$
$a = 8$
$a_n = 0$ ಆದಾಗ,
$a_n = a + (n - 1) d$
$0 = 8 + (n - 1)(-2)$
$0 = 8 - 2n + 2$
$2n = 10$
$2n = 10$
$n = 5$
∴5ನೇ ಪದವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:

$d = \frac{a_p - a_q}{p - q}$; $a_p = a_9$; $a_q = a_3$
$d = \frac{a_9 - a_3}{9 - 3} = \frac{-8-4}{6} = \frac{-12}{6} = -2$
$a = a_p + (1 - p)d$ a
$a = a_3 + (1 - 3)(-2)$
$a = 4 + (-2)(-2) = 8$
$a_n = a + (n - 1) d$
$0 = 8 + (n - 1)(-2)$
$0 = 8 - 2n + 2 \Rightarrow 2n = 10$

$\Rightarrow n = 5$

10. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 17ನೇ ಪದವು ಅದರ 10ನೇ ಪದಕ್ಕಿಂತ 7 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a_n = a + (n - 1)\, d$

$a_{17} = a + (17 - 1)\, d$

$a_{17} = a + 16d$

ಇದೇ ರೀತಿ, $a_{10} = a + 9d$

ಆದರೆ,

$a_{17} - a_{10} = 7$

$(a + 16d) - (a$

$+ 9d) = 7$

$7d = 7$

$d = 1$

11. 3, 15, 27, 39 .... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಯಾವಪದವು ಅದರ 54ನೇ ಪದಕ್ಕಿಂತ 132 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ?

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಡಿ 3, 15, 27, 39, …

$a = 3, d = 12$

$a_{54} = a + (54 - 1)\, d = 3 + (53)(12)$

$\Rightarrow a_{54} = 3 + 636 = 639$

ಈಗ $132 + 639 = 771$ ಎಷ್ಟನೇ ಪದ ?

$a_n \quad a_n = a + (n - 1)\, d$

$771 = 3 + (n - 1)\, 12 \Rightarrow 768 = (n - 1)\, 12$

$(n - 1) = 64 \Rightarrow n = 65$

∴ 65ನೇ ಪದ 54ನೇ ಪದಕ್ಕಿಂತ 132 ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ.

12. ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಅವುಗಳ 100ನೇ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 100 ಆದರೆ 1000ನೇ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನು?

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಡಿಗಳ ಮೊದಲ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

a ಮತ್ತು b ಆಗಿರಲಿ. ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಆಗಿರಲಿ.

ಮೊದಲ ಶ್ರೇಢಿ, $a_{100} = a + (100 - 1)\, d$

$a_{100} = a + 99d$

$a_{1000} = a + (1000 - 1)\, d$

$a_{1000} = a + 999d$

ಎರಡನೇ ಶ್ರೇಢಿ, $a_{100} = b + (100 - 1)\, d$

$a_{100} = b + 99d$

$a_{1000} = b + (1000 - 1)\, d \Rightarrow a_{1000} = b + 999d$

100ನೇ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 100

ಆದ್ದರಿಂದ $(a + 99d) - (b + 99d) = 100$

$a - b = 100$ ------------------- (i)

1000ನೇ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ?

$(a + 999d) - (b + 999d) = a - b$

ಸಮೀಕರಣ (i) ರಿಂದ,

ಆದ್ದರಿಂದ 1000ನೇ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 10

13. ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 7ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ?

7ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಮೊದಲ ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $a = 105, d = 7$

7ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಕೊನೆಯ ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $a_n = 994$

ಆದ್ದರಿಂದ ಶ್ರೇಢಿ 105, 112, 119, …994;

$n = ?$

$a_n = a + (n - 1)\, d$
$994 = 105 + (n - 1)\, 7$
$889 = (n - 1)\, 7$
$(n - 1) = 127$
n = 128

∴ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳ 128 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 7ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:

7ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 105, 112, 119, ... 994 .
ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

a = 105 ಮತ್ತು d = 7, $a_n = 994$

$\Rightarrow a + (n - 1)\, d = 994$
$\Rightarrow 105 + (n - 1) \times 7 = 994$
$\Rightarrow 7(n - 1) = 889$
$\Rightarrow n - 1 = 127$
⇒ n = 128

14. 10 ಮತ್ತು 250ರ ನಡುವಿನ 4ರ ಗುಣಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

10ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಮೊದಲ 4 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ 12 ಹಾಗೂ 250 ರ ನಡುವಿನ ಕಡೆಯ ಅಪವರ್ತ್ಯ 248
ಆದ್ದರಿಂದ 10ರಿಂದ 250 ನಡುವಿನ 4ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು 12, 16, 20, 24, …248

$a = 12,\ d = 4,\ a_n = 248$
$a_n = a + (n - 1)\, d$
$248 = 12 + (n - 1) \times 4$
$248 = 12 + 4n - 4$
$248 = 8 + 4n$
$4n = 248 - 8$
$4n = 240$
$\boldsymbol{n = 60}$

∴10 ಮತ್ತು 250ರ ನಡುವಿನ 4ರ ಗುಣಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 60

15. n ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ 63, 65, 67 .... ಮತ್ತು 3, 10, 17 … ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ n ನೇ ಪದಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ?

63, 65, 67 .... $a = 63,\ d = a_2 - a_2 = 65 - 63 = 2$

$a_n = a + (n - 1)\, d$
$a_n = 63 + (n - 1)\, 2 = 63 + 2n - 2$
$a_n = 61 + 2n$ ----------- (i)

3, 10, 17, … $a = 3,\ d = a_2 - a_2 = 10 - 3 = 7$

$a_n = 3 + (n - 1)\, 7$
$a_n = 3 + 7n - 7$
$a_n = 7n - 4$ ------------ (ii)

ಶ್ರೇಢಿಗಳ n’ ನೇ ಪದಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$\Rightarrow 61 + 2n = 7n - 4$
$\Rightarrow 61 + 4 = 5n \Rightarrow 5n = 65$ **⇒ n = 13**

∴ ಶ್ರೇಢಿಗಳ 13’ ನೇ ಪದಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

16. ಮೂರನೇ ಪದ 16, 7ನೇ ಪದವು 5ನೇ ಪದಕ್ಕಿಂತ 12 ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a_3 = 16 \Rightarrow a + (3 - 1)$
$d = 16$
$a + 2d = 16$ ---------- (i)
$a_7 - a_5 = 12$
$[a + (7 - 1)\, d] - [a + (5 - 1)\, d] = 12$

$(a + 6d) - (a + 4d) = 12$

$2d = 12 \Rightarrow d = 6$

ಸಮೀಕರಣ (i) ರಿಂದ,

$a + 2(6) = 16$

$a + 12 = 16 \Rightarrow a = 4$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ **4, 10, 16, 22, …**

17. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ 3, 8, 13 …. 253 ಇದರ ಕೊನೆಯಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ 20ನೇ ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ 3, 8, 13, …, 253

ಕೊನೆಯಿಂದ n ನೇ ಪದ = $l - (n - 1)d$

$l = 253, a = 3, d = 5$

∴ ಕೊನೆಯಿಂದ 20 ನೇ ಪದ = $253 - (20 - 1)5$

$= 253 - (19)5$

$= 253 - 95$

$= 253 - 95 = 158$

18. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 4ನೇ ಮತ್ತು 8ನೇ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 24 ಮತ್ತು 6ನೇ ಮತ್ತು 10ನೇ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 44 ಆದರೆ ಆ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a_n = a + (n - 1)d$

$a_4 = a + (4 - 1)d$

$a_4 = a + 3d$

ಇದೇ ರೀತಿ $a_8 = a + 7d$

$a_6 = a + 5d$

$a_{10} = a + 9d$

ಆದರೆ, $a_4 + a_8 = 24$

$a + 3d + a + 7d = 24$

$2a + 10d = 24$

$a + 5d = 12$ ------------(i)

$a_6 + a_{10} = 44$

$a + 5d + a + 910d = 44$

$2a + 14d = 44$

$a + 7d = 22$ -----------(ii)

(i) ರಿಂದ **(ii)** ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

$2d = 22 - 12$

$2d = 10$

$d = 5$

$d = 5$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (i) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$a + 5d = 12$

$a + 5(5) = 12$

$a + 25 = 12 \Rightarrow a = -13$

$a_2 = a + d = -13 + 5 = -8$

$a_3 = a_2 + d = -8 + 5 = -3$

∴ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳು

−13,−8, −3.

19. ವಾರ್ಷಿಕ ಸಂಬಳ ರೂ 5000 ಮತ್ತು ಪ್ರತಿವರ್ಷಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಭತ್ಯೆ ರೂ 200 ಇರುವ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಸುಬ್ಬರಾವ್ 1995 ರಲ್ಲಿ ಸೇರಿದರು. ಯಾವ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅವರ ಸಂಬಳ ರೂ 7000 ಆಗುತ್ತದೆ?

1995ರಿಂದ ಸುಬ್ಬರಾವ್ ರ ಪ್ರತಿವರ್ಷದ ವೇತನ: 5000, 5200, 5400, - - - 7000

$a = 5000$, $d = 200$, $a_n = 7000$.

$a_n = a + (n - 1) d$

$7000 = 5000 + (n - 1) 200$

$200(n - 1) = 2000 \Rightarrow (n - 1) = 10$

$n = 11$

∴ 11ನೇ ವರ್ಷ ಅಂದರೆ 2005ರಲ್ಲಿ ಅವರ ವೇತನವು **ರೂ7000 ಆಗುತ್ತದೆ.**

20. ರಾಮ್ಕಲಿಯು ವರ್ಷದ ಮೊದಲನೇ ವಾರದಲ್ಲಿ ರೂ 5 ನ್ನು ಉಳಿಸಿದಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿವಾರ ಅವಳ ಉಳಿತಾಯವನ್ನು ರೂ 1.75ಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಳು. nನೇ ವಾರದಲ್ಲಿ ಅವಳ ಉಳಿತಾಯ ರೂ 20.75 ಆದರೆ n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a = 5$, $d = 1.75$, $a_n = 20.75$, $n = ?$

$a_n = a + (n - 1) d$

$20.75 = 5 + (n - 1) \times 1.75$

$15.75 = (n - 1) \times 1.75$

$15.75 = 1.75n - 1.75$

$1.75n = 15.75 + 1.75$

$1.75n = 17.50$

$n = \frac{17.50}{1.75} \Rightarrow n = \frac{1750}{175}$

$\mathbf{n = 10}$

5.3 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

ಮೊದಲ ಪದ a ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಕೊಟ್ಟಾಗ $S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕೊಡದೆ ಮೊದಲ ಪದ a ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ *l* ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ $S = \frac{n}{2}[a + l]$

ಉದಾಹರಣೆ 11: 8, 3, -2 ..... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 22 ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವೇನು?

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$, $n = 22$.

$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S = \frac{22}{2}[2x8 + (22 - 1)(-5)]$

$S = 11[16 + 21(-5)]$

$S = 11[16 - 105]$

$S = 11x-89 = -979$

ಉದಾಹರಣೆ 12: ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ 14 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 1050. ಅದರ ಮೊದಲನೇ ಪದ 10, ಅದರೆ 20ನೇ ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ $S_{14} = 1050$, $n = 14$, $a = 10$

$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$1050 = \frac{14}{2}[2x10 + (14 - 1)d]$

$1050 = 7[20 + 13d]$

$1050 = 140 + 91d$

$91d = 1050 - 140 \Rightarrow 91d = 910$

$d = \frac{910}{91} = 10$

$a_n = a + (n - 1)d$
$a_{20} = 10 + (20 - 1)10$
$a_{20} = 10 + 19x10$
$a_{20} = 10 + 190$
$\mathbf{a_{20} = 200}$

ಉದಾಹರಣೆ 13: 24, 21, 18 .... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 78 ಆಗಿದೆ?

ಪರಿಹಾರ:a = 24, d = 21-24 = -3, Sn = 78 ನಾವು n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$78 = \frac{n}{2}[2x24 + (n - 1)(-3)]$

$78 = \frac{n}{2}[48 - 3n + 3]$

$156 = n[48 - 3n + 3] \Rightarrow 156 = 51n - 3n^2$

$52 = 17n - n^2$

$n^2 - 17n + 52 = 0$

$n^2 - 13n - 4n + 52 = 0$

$n(n - 13) - 4(n - 13) = 0$

$(n - 13)(n - 4) = 0$

n = 13 ಅಥವಾ n = 4

ಉದಾಹರಣೆ 14: ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ: (i) ಮೊದಲ 1000 ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು (ii) ಮೊದಲ n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು

(i) S = 1 + 2 + 3 +...... + 1000 ಆಗಿರಲಿ

$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S = 500[2 + 999]$

$S = 500[1001]$

$S = 500500$

(ii) S = 1 + 2 + 3 +...... + n ಆಗಿರಲಿ

$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S = \frac{n}{2}[2x1 + (n - 1)1] \Rightarrow S = \frac{n}{2}[2 + n - 1]$

$S = \frac{n}{2}[n + 1]$

ಉದಾಹರಣೆ 15: n ನೇ ಪದ $a_n = 3 + 2n$ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಯ ಮೊದಲ 24 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$a_n = 3 + 2n$
$a_1 = 3 + 2x1 = 3 + 2 = 5$
$a_2 = 3 + 2x2 = 3 + 4 = 7$
$a_3 = 3 + 2x3 = 3 + 6 = 9$
ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ: 5, 7, 9, – – –
a = 5, d = 2, n = 24
$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$
$S = \frac{24}{2}[2x5 + (24 - 1)2]$
$S = 12[10 + 23x2]$
$S = 12[10 + 46]$
$S = 12x56$
$S = 672$

ಉದಾಹರಣೆ 16: ಟೆಲಿವಿಷನ್ ಸೆಟ್‌ಗಳ ತಯಾರಕರೊಬ್ಬರು ಮೂರನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 600 ಸೆಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಏಳನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 700 ಸೆಟ್‌ಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಅವರ ಉತ್ಪಾದನೆ ಸ್ಥಿರವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ.

(i) ಮೊದಲ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪಾದನೆ (ii) 10ನೇ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪಾದನೆ (iii) 7 ವರ್ಷಗಳ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ಪರಿಹಾರ: i) ಉತ್ಪಾದನೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷ ಒಂದು ಸ್ಥಿರವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ ಹೆಚ್ಚಾಗುವ ಕಾರಣ 1ನೇ, 2ನೇ 3ನೇ...... ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ಟೆಲಿವಿಷನ್ ಸೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

n ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸಿದ ಟೆಲಿವಿಷನ್ ಸೆಟ್‌ಗಳ = a_n

$a_3 = 600, \quad a_7 = 700,$

a + 2d = 600

a + 6d = 700

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ,

d = 25 ಮತ್ತು a = 550

(i) ಮೊದಲ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪಾದನೆ = 550

(ii) 10ನೇ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪಾದನೆ:

$a_{10} = a + 9d$

a_{10} = 550 + 9x25

= 550 + 225 = **775**

(iii) **7 ವರ್ಷಗಳ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆ:**

S = $\frac{n}{2}$[2a + (n - 1)d]

S = $\frac{7}{2}$[2x550 + (7 - 1)25]

S = $\frac{7}{2}$[1100 + 6x25]

S = $\frac{7}{2}$[1100 + 150] = $\frac{7}{2}$[1250]

S = 7x625 = 4375

7 ವರ್ಷಗಳ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆ=4375

ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

1. **1. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ**

i) 2, 7, 12 ...... ರ 10 ಪದಗಳವರೆಗೆ

a = 2, d = $a_2 - a_1$ = 7 − 2 = 5, n = 10

$S_n = \frac{n}{2}$ [2a + (n - 1) d]

$S_{10} = \frac{10}{2}$ [2(2) + (10 - 1) × 5]

S_{10} = 5[4 + (9) × (5)]

S_{10} = 5 × 49 = 245

ii) -37, -33, -29 ...... ರ 12 ಪದಗಳವರೆಗೆ

a = −37; d = 4; n = 12

$S_n = \frac{n}{2}$ [2a + (n - 1) d]

$S_{12} = \frac{12}{2}$ [2(-37) + (12 - 1) × 4]

S_{12} = 6[-74 + 11 × 4]

S_{12} = 6[-74 + 44]

a = 0.6

d = $a_2 - a_1$ = 1.7 − 0.6 = 1.1

n = 100

$S_n = \frac{n}{2}$ [2a + (n - 1) d]

$S_{100} = \frac{100}{2}[1.2 + (99) \times 1.1]$

$S_{100} = 50[1.2 + 108.9]$

$S_{100} = 50[110.1]$

$S_{100} = 5505$

iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$ ----------ರ 11 ಪದಗಳವರೆಗೆ

$a = \frac{1}{15}$; $d = a_2 - a_1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{5-4}{60} = \frac{1}{60}$; $n = 11$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1) d]$

$S_{11} = \frac{11}{2}[2x\frac{1}{15} + (11 - 1) \times \frac{1}{60}]$

$S_{11} = \frac{11}{2}[\frac{2}{15} + \frac{10}{60}]$

$S_{11} = \frac{11}{2}[\frac{8+10}{60}] = \frac{11}{2}[\frac{18}{60}] = \frac{11}{2}[\frac{3}{10}] = \frac{33}{20}$

$S_{11} = \frac{33}{20}$

2. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + ----- + 84$

$a = 7, l = 84, d = \frac{7}{2}$

$l = a + (n - 1)d$

$84 = 7 + (n - 1) \times \frac{7}{2}$

$\Rightarrow 77 = (n - 1) \times \frac{7}{2}$

$154 = 7n - 7 \Rightarrow 7n = 161 \Rightarrow$ **$n = 23$**

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$S_{23} = \frac{23}{2}(7 + 84) = \frac{23}{2} x\ 91$

$= \frac{2093}{2} =$ **$1046\frac{1}{2}$**

ii) 34 + 32 + 30 + …… + 10

$a = 34, d = -2, l = 10$

$l = a + (n - 1) d$

$10 = 34 + (n - 1)(-2)$

$-24 = (n - 1)(-2) \Rightarrow 12 = n - 1$

$n = 13$

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$S_{13} = \frac{13}{2}(34 + 10)$

$S_{13} = \frac{13}{2} x44$

$S_{13} = 13 \times 22$

$S_{13} = 286$

iii) -5 + (-8) + (-11)+ …. + (-230)

$a = -5, l = -230, d = -3$

$l = a + (n - 1)d$

$-230 = -5 + (n - 1)(-3)$

$-225 = (n - 1)(-3)$

$(n - 1) = 75$

$n = 76$

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$S_{76} = \frac{76}{2}[(-5) + (-230)]$

$S_{76} = 38(-235)$

$S_{76} = -8930$

3. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ

i) $a = 5, d = 3, a_n = 50$ ಆದರೆ n ಮತ್ತು Sn ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a = 5, d = 3, a_n = 50$

$a_n = a + (n - 1)d,$

$\Rightarrow 50 = 5 + (n - 1) \times 3$

$\Rightarrow 3(n - 1) = 45$

$\Rightarrow n - 1 = 15$

$\Rightarrow n = 16$

$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$

$S_{16} = \frac{16}{2}(5 + 50) = 440$ $S_{16} = 8(55) = 440$

ii) $a = 7, a_{13} = 35$ ಆದರೆ d ಮತ್ತು S_{13} ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a = 7, a_{13} = 35$

$a_n = a + (n - 1)d,$

$\Rightarrow 35 = 7 + (13 - 1)d$

$\Rightarrow 12d = 28$

$\Rightarrow d = 28/12 = 2.33$

$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$

$S_{13} = \frac{13}{2}(7 + 35)$

$S_{13} = \frac{13}{2}(42) = 13x21$

$\mathbf{S_{13} = 273}$

iii) $a_{12} = 37, d = 3$ ಆದರೆ a ಮತ್ತು S_{12} ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a_{12} = 37, d = 3$

$a_n = a + (n - 1)d,$

$\Rightarrow a_{12} = a + (12 - 1)3$

$\Rightarrow 37 = a + 33$

$\Rightarrow a = 4$

$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$

$S_{12} = \frac{12}{2}(4 + 37)$

$S_{12} = 6(41)$

$\mathbf{S_{12} = 246}$

iv) $a_3 = 15$, S10 = 125 ಆದರೆ d ಮತ್ತು a_{10} ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a_3 = 15, S_{10} = 125$

$a_n = a + (n - 1)d,$

$a_3 = a + (3 - 1)d$

15 = a + 2d ------------ (i)

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S_{10} = \frac{10}{2}[2a + (10 - 1)d]$

125 = 5(2a + 9d)

25 = 2a + 9d ----------- (ii)

ಸಮೀಕರಣ (i) ನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

30 = 2a + 4d ----------- (iii)

(ii) ರಿಂದ (ii) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$-5 = 5d$
$d = -1$
ಸಮೀಕರಣ **(i)** ರಿಂದ,
$15 = a + 2(-1)$
$15 = a - 2$
$a = 17$
$a_{10} = a + (10 - 1)d$
$a_{10} = 17 + (9)(-1)$
$\boldsymbol{a_{10} = 17 - 9 = 8}$

v) $d = 5, S_9 = 75$ ಆದರೆ a ಮತ್ತು a_9 ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$d = 5, S_9 = 75$
$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$
$75 = \frac{9}{2}[2a + (9 - 1)5]$
$75 = \frac{9}{2}(2a + 40)$
$75 = 9(a + 20)$
$75 = 9a + 180$
$9a = 75 - 180$
$a = \frac{-35}{3}$
$a_n = a + (n - 1)d$
$a_9 = a + (9 - 1)(5)$
$= \frac{-35}{3} + 8(5)$
$= \frac{-35}{3} + 40$
$= \frac{-35+120}{3} = \frac{85}{3}$

vi) $a = 2, d = 8, Sn = 90$ ಆದಾಗ n ಮತ್ತು a_n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a = 2, d = 8, S_n = 90$
$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$
$90 = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$
$\Rightarrow 180 = n(4 + 8n - 8)$
$\Rightarrow 180 = n(8n - 4)$
$\Rightarrow 180 = 8n^2 - 4n$
$8n^2 - 4n - 180 = 0$
$\Rightarrow 2n^2 - n - 45 = 0$
$\Rightarrow 2n^2 - 10n + 9n - 45 = 0$
$\Rightarrow 2n(n - 5) + 9(n - 5) = 0$
$\Rightarrow (2n - 9)(2n + 9) = 0$
$n = 5$ (ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ)
$\therefore a_5 = 8 + 5 \times 4 = 34$

vii) $a = 8, a_n = 62, Sn = 210$ ಆದಾಗ n ಮತ್ತು d ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a = 8, a_n = 62, S_n = 210$

$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$

$210 = \frac{n}{2}(8 + 62)$

$\Rightarrow 35n = 210$

$\Rightarrow n = \frac{210}{35} = 6$

$a_n = a + (n - 1)d$

$62 = 8 + 5d$

$\Rightarrow 5d = 62 - 8 = 54$

$\Rightarrow \mathbf{d = \frac{54}{5} = 10.8}$

viii) $a_n = 4$, $d = 2$, $Sn = -14$ ಆದರೆ n ಮತ್ತು a ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a_n = 4, d = 2, S_n = -14$

$a_n = a + (n - 1)d$

$4 = a + (n - 1)2$

$4 = a + 2n - 2$

$a + 2n = 6$

$a = 6 - 2n$ ---------- **(i)**

$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$

$-14 = \frac{n}{2}(a + 4)$

$-28 = n(a + 4)$

$-28 = n(6 - 2n + 4)$[**(i)**ರಿಂದ]

$-28 = n(-2n + 10)$

$-28 = -2n^2 + 10n$

$2n^2 - 10n - 28 = 0$

$n^2 - 5n - 14 = 0$

$n^2 - 7n + 2n - 14 = 0$

$n(n - 7) + 2(n - 7) = 0$

$(n - 7)(n + 2) = 0$

$n - 7 = 0$ or $n + 2 = 0$

$n = 7$ or ~~$n = -2$~~

ಸಮೀಕರಣ **(i)** ರಿಂದ,

$a = 6 - 2n$

$a = 6 - 2(7)$

$a = 6 - 14$

$\mathbf{a = -8}$

ix) $a = 3$, $n = 8$, $S = 192$ ಆದರೆ d ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a = 3, n = 8, S = 192$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$192 = \frac{8}{2}[2 \times 3 + (8 - 1)d]$

$192 = 4[6 + 7d]$

$48 = 6 + 7d$

$42 = 7d$

$d = 6$

x) l = 28, S = 144 ಮತ್ತು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 9 ಇದ್ದರೆ a ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

l = 28, S = 144, n = 9

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$144 = \frac{9}{2}(a + 28)$

(16) × (2) = a + 28

32 = a + 28

a = 4

4.ಮೊತ್ತ 636 ಸಿಗಬೇಕಾದರೆ 9, 17, 25 .... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?

a = 9 ; d = 8

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$636 = \frac{n}{2}[2 \times a + (8 - 1) \times 8]$

$636 = \frac{n}{2}[18 + (n- 1) \times 8]$

636 = n [9 + 4n − 4]

636 = n (4n + 5)

$4n^2 + 5n - 636 = 0$

$4n^2 + 53n - 48n - 636 = 0$

n (4n + 53) − 12 (4n + 53) = 0

(4n + 53) (n − 12) = 0

4n + 53 = 0 or n − 12 = 0

n = ~~(-53/4)~~ or n = 12

⇒n = 12

5. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪದ 5, ಕೊನೆಯ ಪದ 45 ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ 400 ಆದರೆ ಅದರ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

a = 5, l = 45, S_n = 400

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$400 = \frac{n}{2}(5 + 45)$

$400 = \frac{n}{2}(50)$

25n = 400

n = 16

l = a + (n − 1) d

45 = 5 + (16 − 1) d

40 = 15d

$d = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$

6. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 17 ಮತ್ತು 350 ಆಗಿವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 9 ಆದರೆ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?

a = 17, l = 350, d = 9

l = a + (n − 1) d

350 = 17 + (n − 1)9

333 = (n − 1)9

(n − 1) = 37

a = 2

$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$

$S_{22} = \frac{22}{2}(2 + 149)$

$S_{22} = 11 \times 151$

$\mathbf{S_{22} = 1661}$

7. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ d = 7 ಮತ್ತು 22 ನೇ ಪದ 149 ಆದರೆ 22 ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವೇನು?

$d = 7, a_{22} = 149, S_{22} = ?$

$a_n = a + (n - 1)d$

$a_{22} = a + (22 - 1)d$

$149 = a + 21 \times 7$

$149 = a + 147$

$a = 149 - 147$

$a = 2$

$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$

$S_{22} = \frac{22}{2}(2 + 149)$

$S_{22} = 11 \times 151$

$\mathbf{S_{22} = 1661}$

8. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 14 ಮತ್ತು 18 ಆದರೆ ಅದರ 51 ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವೇನು?

$a_2 = 14, \; a_3 = 18, \; d = 4$

$a_2 = a + d$

$14 = a + 4$

$a = 10$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S_{51} = \frac{51}{2}[2 \times 10 + (51-1) \times 4]$

$= \frac{51}{2}[20 + (50) \times 4]$

$= \frac{51}{2}[20 + 200]$

$= \frac{51}{2}[220]$

$= 51 \times 110$

= 5610

9. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 7 ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತ 49 ಮತ್ತು 17 ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತ 289. ಆದರೆ ಮೊದಲ n ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವೇನು?

$S_7 = 49, \; S_{17} = 289$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S_7 = \frac{7}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S_7 = \frac{7}{2}[2a + (7 - 1)d]$

$49 = \frac{7}{2}[2a + 6d]$

$7 = (a + 3d)$

$a + 3d = 7$ ----------- **(i)**

ಇದೇ ರೀತಿ,

$S_{17} = \frac{17}{2}$ [2a + (17 - 1)d]

$289 = \frac{17}{2}$ (2a + 16d)

17 = (a + 8d)

a + 8d = 17 --------- **(ii)**

ಸಮೀಕರಣ **(i)** ರಿಂದ **(ii)** ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

5d = 10

d = 2

5d = 10

d = 2

ಸಮೀಕರಣ **(i)** ರಿಂದ

a + 3(2) = 7

a + 6 = 7

a = 1

$S_n = \frac{n}{2}$ [2a + (n - 1)d]

$= \frac{n}{2}$ [2(1) + (n - 1) × 2]

$= \frac{n}{2}$ (2 + 2n - 2)

$= \frac{n}{2}$ (2n)

$= n^2$

10. a_n ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ $a_1, a_2, a_3 \dots a_n ,\dots$ ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

(i) $a_n = 3 + 4n$

$a_1 = 3 + 4(1) = 7$

$a_2 = 3 + 4(2) = 3 + 8 = 11$

$a_3 = 3 + 4(3) = 3 + 12 = 15$

$a_4 = 3 + 4(4) = 3 + 16 = 19$

$\Rightarrow a_2 - a_1 = 11 - 7 = 4$

$a_3 - a_2 = 15 - 11 = 4$

$a_4 - a_3 = 19 - 15 = 4$

ಇಲ್ಲಿ d=4.

∴ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದ್ದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 4 ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಪದ 7 ಆಗಿದೆ.

$S_n = \frac{n}{2}$ [2a + (n - 1)d]

$S_{15} = \frac{15}{2}$ [2(7) + (15 - 1) × 4]

$= \frac{15}{2}$ [(14) + 56]$= \frac{15}{2}$ (70)

= 15 × 35 **= 525**

(ii) $a_n = 9 - 5n$

$a_1 = 9 - 5 \times 1 = 9 - 5 = 4$

$a_2 = 9 - 5 \times 2 = 9 - 10 = -1$

$a_3 = 9 - 5 \times 3 = 9 - 15 = -6$

$a_2 - a_1 = -1 - 4 = -5$

$a_3 - a_2 = -6 - (-1) = -5$

$a_3 - a_2 = 15 - 11 = 4$

$a_4 - a_3 = 19 - 15 = 4$

ಇಲ್ಲಿ d= -5

∴ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದ್ದು ಸಾಮಾನ್ಯ -5 ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಪದ 4 ಆಗಿದೆ.

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S_{15} = \frac{15}{2}[2(4) + (15 - 1)(-5)]$

$= \frac{15}{2}[8 + 14(-5)] = \frac{15}{2}(8 - 70)$

$= \frac{15}{2}(-62) = 15(-31)$ **= -465**

11. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತ $4n - n^2$ ಆದರೆ ಮೊದಲ ಪದ (S_1) ಎಷ್ಟು? ಮೊದಲ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು? ಎರಡನೇ ಪದ ಎಷ್ಟು? ಅದೇ ರೀತಿ 3ನೇ ಪದ, 10ನೇ ಪದ ಮತ್ತು nನೇ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$S_n = 4n - n^2$

ಮೊದಲ ಪದ $a = S_1 = 4(1) - (1)^2 = 4 - 1 = 3$

ಮೊದಲ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

$S_2 = 4(2) - (2)^2 = 8 - 4 = 4$

$a_2 = S_2 - S_1 = 4 - 3 = 1$

$d = a_2 - a = 1 - 3 = -2$

n ನೇ ಪದ $a_n = a + (n - 1)d$

$= 3 + (n - 1)(-2)$

$= 3 - 2n + 2 = 5 - 2n$

∴ ಮೂರನೇ ಪದ $a_3 = 5 - 2(3) = 5 - 6 = -1$

10ನೇ ಪದ $a_{10} = 5 - 2(10) = 5 - 20 = -15$

12. 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಮೊದಲ 40 ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?

6ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

6, 12, 18, 24 …

ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದ್ದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 6 ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಪದ 6 ಆಗಿದೆ.

$a = 6, \quad d = 6, \quad S_{40} = ?$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S_{40} = \frac{40}{2}[2(6) + (40 - 1)6]$

$= 20[12 + (39)(6)]$

$= 20(12 + 234) = 20 \times 246$

= 4920

13. ಮೊದಲ 15, 8ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?

8 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

8, 16, 24, 32…

ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದ್ದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 8 ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಪದ 8 ಆಗಿದೆ.

$a = 8, \; d = 8, \; S_{15} = ?$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S_{15} = \frac{15}{2}[2(8) + (15 - 1)8]$

$= \frac{15}{2}[6 + (14)(8)]$

$= \frac{15}{2}[16 + 112]$

$= \frac{15}{2}(128) = 15 \times 64$

= 960

14. 0 ಮತ್ತು 50 ರ ನಡುವಿನ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?

0 ಮತ್ತು 50 ರ ನಡುವಿನ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

1, 3, 5, 7, 9 … 49

ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದ್ದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1

ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಪದ 2 ಆಗಿದೆ.

$a = 1, d = 2, \ l = 49$

$l = a + (n - 1)\ d$

$49 = 1 + (n - 1)2$

$48 = 2(n - 1)$

$n - 1 = 24 \Rightarrow n = 25$

$S_n = \frac{n}{2}\ (a + l)$

$S_{25} = \frac{25}{2}\ (1 + 49)$

$= \frac{25}{2}\ (50)$

=(25)(25 **= 625**

15. ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಕೆಲಸದ ಗುತ್ತಿಗೆಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಮಯದ ನಂತರ ತಡವಾಗಿ ಕೆಲಸ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದರೆ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪದ ದಂಡವನ್ನು ವಿಧಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಅದು ಹೀಗಿದೆ: ಮೊದಲನೇ ದಿನಕ್ಕೆ ರೂ 200, ಎರಡನೇ ದಿನಕ್ಕೆ ರೂ 250, 3ನೇ ದಿನಕ್ಕೆ ರೂ 300 ಇತ್ಯಾದಿ. ಪ್ರತಿ ದಿನದ ದಂಡವು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ದಿನದ ದಂಡಕ್ಕಿಂತ ರೂ 50 ಜಾಸ್ತಿ ಹಾಗಾದರೆ ಒಬ್ಬ ಗುತ್ತಿಗೆದಾರನು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಲು 30 ದಿನಗಳ ಕಾಲ ಹೆಚ್ಚು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅವನು ಕೊಡಬೇಕಾದ ದಂಡವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ?

ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದ್ದು, $d = 50, a = 200$

ಅವನು ಕೊಡಬೇಕಾದ ದಂಡ $= S_{30}$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S_{30} = \frac{30}{2}\ [2(200) + (30 - 1)\ 50]$

$= 15\ [400 + 1450]$

= 15 (1850)= **27750 ರೂಗಳು**

16. ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಮಗ್ರ ವಾರ್ಷಿಕ ನಿರ್ವಹಣೆಗಾಗಿ ನಗದು ಬಹುಮಾನಕ್ಕಾಗಿ ರೂ 700ರ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿತ್ತು. ಪ್ರತಿ ಬಹುಮಾನವು ಅದರ ಮುಂಚಿನ ಬಹುಮಾನಕ್ಕಿಂತ ರೂ 20 ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ ಪ್ರತಿ ಬಹುಮಾನಗಳ ಮೌಲ್ಯ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೊದಲ ಬಹುಮಾನದ ಮೊತ್ತ = a ಆಗಿರಲಿ

ಎರಡನೇ ಬಹುಮಾನದ ಮೊತ್ತ $= a - 20$

ಮೂರನೇ ಬಹುಮಾನದ ಮೊತ್ತ $= a - 40$

ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದ್ದು,

$d = -20, S_7 = 700$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$\frac{7}{2}[2a + (7 - 1)d] = 700$

$\frac{7}{2}[2a + 6d] = 700$

$7\ [a + 3d] = 700$

$a + 3d = 100$

$a + 3(-20) = 100 \Rightarrow a - 60 = 100$

$\mathbf{a = 160}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಬಹುಮಾನದ ಮೊತ್ತಗಳು **Rs 160, Rs 140, Rs 120, Rs 100, Rs 80, Rs 60, ಮತ್ತು Rs 40.**

17. ವಾಯುಮಾಲಿನ್ಯವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಲು ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶಾಲೆಯ ಒಳ ಆವರಣ ಮತ್ತು ಹೊರ ಆವರಣ ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಡುವ ಯೋಚನೆ ಮಾಡಿದರು. ಪ್ರತಿ ತರಗತಿಯ ಪ್ರತಿ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೆಡುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅವರು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ತರಗತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ತಿರ್ಮಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಉದಾ: 1ನೇ ತರಗತಿಯ ಒಂದು ವಿಭಾಗವು 1 ಗಿಡವನ್ನು,

ಎರಡನೇ ತರಗತಿಯ ವಿಭಾಗವು 2 ಗಿಡಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ 12ನೇ ತರಗತಿಗಳವರೆಗೆ ಮುಂದುವರಿದಿದೆ. ಪ್ರತಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಿಭಾಗಗಳಿದ್ದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ನೆಡಬೇಕಾದ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದ್ದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ –20

ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಪದ a ಆಗಿದೆ.

1, 2, 3, 4, 5………………..12

$a = 1, d = 2 - 1 = 1$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S_{12} = \frac{12}{2}[2(1) + (12 - 1)(1)]$

$= 6 (2 + 11)$

$= 6 (13)$

$= 78$

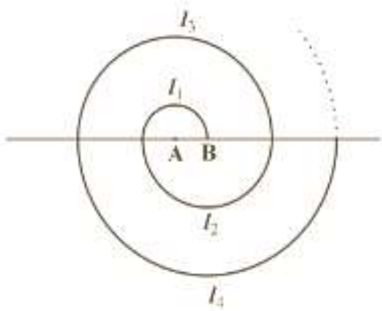
ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಭಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ನೆಡುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 78

ಆದ್ದರಿಂದ 3 ವಿಭಾಗಗಳ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ನೆಡುವ

ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = **78 x 3 234**

18. ಒಂದು ಸುರುಳಿಯನ್ನು ಕ್ರಮಾಗತ ಅರೆ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ A ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿದ್ದು A ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಆರಂಭವಾಗಿ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 0.5cm, 1cm, 1.5cm, 2cm .... ಹೀಗೆ ಚಿತ್ರ 1.4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇದೆ. ಈ ರೀತಿ ಹದಿಮೂರು ಕ್ರಮಾಗತ ಅರೆ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಸುರುಳಿಯ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ ಏನು? ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

[ಸುಳುಹು: ಕೇಂದ್ರಗಳು A, B,A,B ..... ಇರುವಂತೆ ಕ್ರಮಾಗತ ಅರೆವೃತ್ತಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ l_1, l_2, l_3, l_4, ...]



ಅರೆವೃತ್ತಗಳ ಉದ್ದ $= \pi r$

$l_1 = \pi(0.5) = \frac{\pi}{2}$ cm

$l_2 = \pi(1) = \pi$ cm

$l_3 = \pi(1.5) = \frac{3\pi}{2}$ cm

l_1, l_2, l_3 ಅರೆವೃತ್ತಗಳ ಉದ್ದಗಳು

$\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, ...$

$d = l_2 - l_1 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$a = \frac{\pi}{2}$cm

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

∴ ಹದಿಮೂರು ಕ್ರಮಾಗತ ಅರೆ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಸುರುಳಿಯ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ

$S_{13} = \frac{13}{2}[2x\frac{\pi}{2} + (13 - 1)\frac{\pi}{2}]$

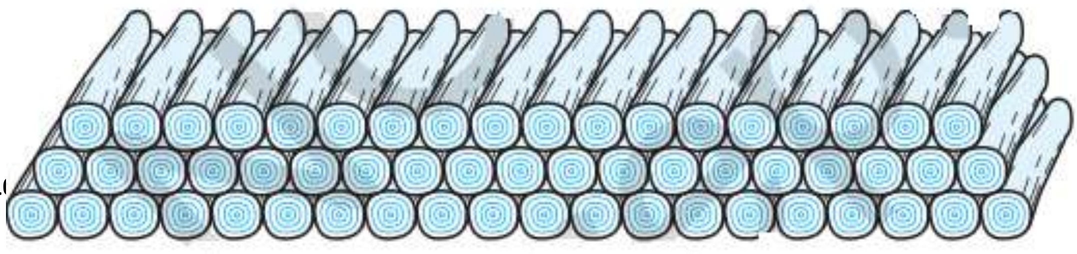
$= \frac{13}{2}[\pi + 6\pi]$

$= \frac{13}{2}(7\pi)$

$= \frac{13}{2} \times 7 \times \frac{22}{2}$

= 143 cm

19. 200 ಮರದ ದಿಮ್ಮಿ (ಕೊರಡು)ಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಡೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕೆಳಭಾಗದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 20 ದಿಮ್ಮಿಗಳು ಆ ನಂತರದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 19 ದಿಮ್ಮಿಗಳು ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರಿದಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 1.5ನ್ನು ನೋಡಿ) 200 ದಿಮ್ಮಿಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅತ್ಯಂತ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ದಿಮ್ಮಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?



ಕೊರಡುಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ

20, 19, 18…

$a = 20,\ d = -1;\ S_n = 200$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$200 = \frac{n}{2}[2(20) + (n - 1)(-1)]$

$200 = \frac{n}{2}[40 - n + 1]$

$400 = n(40 - n + 1)$

$400 = n(41 - n)$

$400 = 41n - n^2$

$n^2 - 41n + 400 = 0$

$n^2 - 16n - 25n + 400 = 0$

$n(n - 16) - 25(n - 16) = 0$

$(n - 16)(n - 25) = 0$

$(n - 16) = 0$ or $n - 25 = 0$

$n = 16$ or $n = 25$

$a_n = a + (n - 1)d$

$a_{16} = 20 + (16 - 1)(-1)$

$a_{16} = 20 - 15$

$a_{16} = 5$

Similarly,

$a_{25} = 20 + (25 - 1)(-1)$

$a_{25} = 20 - 24 = -4$ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ

ಆದ್ದರಿಂದ ಮರದ ದಿಮ್ಮಿಗಳನ್ನು 16 ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮತ್ತು ಅತ್ಯಂತ ಮೇಲಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 5 ದಿಮ್ಮಿಗಳಿವೆ.

20.ಒಂದು ಅಲೂಗಡ್ಡೆ ಓಟದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬುಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಆಲೂಗಡ್ಡೆಯಿಂದ 5m ದೂರದಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ ಉಳಿದ ಆಲೂಗಡ್ಡೆಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪರಸ್ಪರ 3m ಒಬ್ಬ ಸ್ಪರ್ಧಿಯು ಬಕೆಟ್‌ನಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಅದರ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿರುವ ಆಲೂಗಡ್ಡೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಓಡಿ ಬಕೆಟ್‌ಗೆ ಹಾಕಬೇಕು. ನಂತರ ಅಲ್ಲಿಂದ ಪುನಃ ಓಡಿ 2ನೆ ಆಲೂಗಡ್ಡೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಓಡಿ ಬಕೆಟಿಗೆ ಹಾಕಬೇಕು. ಅವಳು ಇದೇ ರೀತಿ ಎಲ್ಲಾ ಆಲೂಗಡ್ಡೆಗಳು ಬಕೆಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಬಂದು ಬೀಳುವವರೆಗೂ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕು. ಸ್ಪರ್ಧಿಯು ಓಡಿದ ಒಟ್ಟು ದೂರವೇನು?

[ಸುಳುಹು: ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು 2ನೇ ಆಲೂಗಡ್ಡೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಸ್ಪರ್ಧಿಯು ಓಡಿದ ಒಟ್ಟು ದೂರ (m ಗಳಲ್ಲಿ)

$S_{10} = \frac{10}{2}[2(10) + (10 - 1)(6)]$

$= 5[20 + 54]$

= 5 (74)
= 370
ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಧಿಯು ಒಟ್ಟು 370ಮೀ ದೂರ ಓಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

****

6 ತ್ರಿಭುಜಗಳು

ಕಲಿಕಾಂಶಗಳು:
1. ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳ ನಿಬಂಧನೆಗಳು
2. ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ ನಿರೂಪಣೆ ಮತ್ತು ಸಾಧನೆ
3. ಮೂ.ಸ.ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮದ ನಿರೂಪಣೆ
4. AAA ಪ್ರಮೇಯ
5. SSS ಪ್ರಮೇಯ
6. SAS ಪ್ರಮೇಯ
7. ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅನ್ವಯಿಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

6.2 ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳು

ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೇ ಇರುವ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಬೇಕಾದರೆ

- ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು
- ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು. (ಅಥವಾ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರಬೇಕು)

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

1. ಆವರಣದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪದಗಳಿಂದ ಸೂಕ್ತವಾದ ಪದವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬಿಟ್ಟ ಪದ ತುಂಬಿಸಿ

i) ಎಲ್ಲಾ ವೃತ್ತಗಳು ____________ (ಸರ್ವಸಮ, ಸಮರೂಪ) [**ಸಮರೂಪ**]

ii) ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಗಳು ______________ (ಸಮರೂಪ, ಸರ್ವಸಮ) [**ಸಮರೂಪ**]

iii) ಎಲ್ಲಾ ____________ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪ (ಸಮದ್ವಿಬಾಹು, ಸಮಬಾಹು) [**ಸಮದ್ವಿಬಾಹು**]

iv) ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೇ ಇರುವ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಬೇಕಾದರೆ

a) ಅದರ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು _____________ ಮತ್ತು

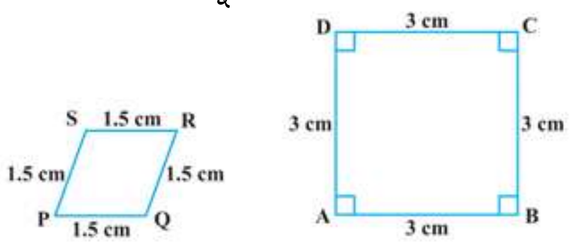
b) ಅದರ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು _______________ (ಸಮ, ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ) [**ಸಮ, ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ**]

1. ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ

i) ಒಂದು ಜೋತೆ ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳು [**ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಬಹುದು**]

ii) ಒಂದು ಜೋತೆ ಸಮರೂಪವಲ್ಲದ ಆಕೃತಿಗಳು [**ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಬಹುದು**]

2. ಕೆಳಗಿನ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವೇ? ಇಲ್ಲವೆ ತಿಳಿಸಿ.



ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿಲ್ಲ.

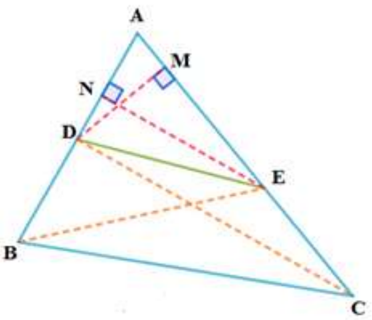
6.3 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆ

ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ (ಥೇಲ್ಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ)

ಎರಡು ಸಮಕೋನೀಯ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 6.1

ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳನು, ಸಮಾನುಪಾತದಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತದೆ.



ಸಾಧನೆ: ΔABC ಯಲ್ಲಿ BC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು AB ಮತ್ತು AC ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿವೆ.

ಸಾಧನೀಯ: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$,

ರಚನೆ: BE ಮತ್ತು CD ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು. $DM \perp AC$ ಮತ್ತು $EN \perp AB$ ಎಳೆಯಬೇಕು

ಸಾಧನೆ:

$\frac{\text{ವಿ}(\Delta ADE)}{\text{ವಿ}(\Delta BDE)} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times DB \times EN} = \frac{AD}{DB}$ -------- (1)[∵ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ= $\frac{1}{2}$ x ಪಾದ xಎತ್ತರ]

$\frac{\text{ವಿ}(\Delta ADE)}{\text{ವಿ}(\Delta CED)} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM} = \frac{AE}{EC}$ ------ (2)

ΔBDE ಮತ್ತು DEC ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ DF ಮತ್ತು $BC \parallel DE$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ವಿ$(\Delta BDE) \cong$ ವಿ(ΔDEC) --- (3)

ಆದ್ದರಿಂದ (1), (2) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

ಪ್ರಮೇಯ 6.2

ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಅದರ ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

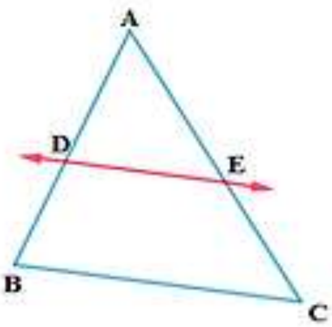
ಉದಾಹರಣೆ 1: ΔABC ಯ AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಯು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (ಚಿತ್ರ 2.13 ನೋಡಿ) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$DE \parallel BC$ (∵ ದತ್ತ)

$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (∵ ಪ್ರಮೇಯ 2.1)

$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ (∵ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗೊಳಿಸಿದಾಗ)



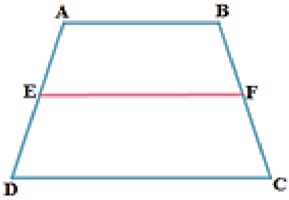
ಚಿತ್ರ 6.13

$\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (∵ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗೊಳಿಸಿದಾಗ)

ಉದಾಹರಣೆ 2: ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ AB∥DC, EF∥AB ಆಗುವಂತೆ E ಮತ್ತು F ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳಾದ AD ಮತ್ತು BC ಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು (ಚಿತ್ರ 6.14 ನೋಡಿ) $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 6.14

ಪರಿಹಾರ: AC ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಅದು EF ನ್ನು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.

(ಚಿತ್ರ 6.15 ನೋಡಿ) AB∥DC ಮತ್ತು EF∥AB

(∵ ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನಾಂತರ)

ಈಗ ΔADC ಯಲ್ಲಿ, EG∥DC (∵EF∥DC)

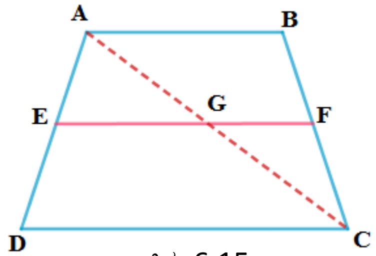
ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (∵ ಪ್ರಮೇಯ 2.1) ---- (1)

ಹಾಗೆಯೇ ΔCAB ನಲ್ಲಿ $\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$

ಅಂದರೆ $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ ---- (2)

ಆದ್ದರಿಂದ (1), (2) ಮತ್ತು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ (1) ರಿಂದ

$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$



ಚಿತ್ರ 6.15

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಚಿತ್ರ 6.16 ರಲ್ಲಿ $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ ಮತ್ತು ∠PST = ∠PRQ ಆದರೆ ΔPQR ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಆದ್ದರಿಂದ ST∥QR (∵ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ)

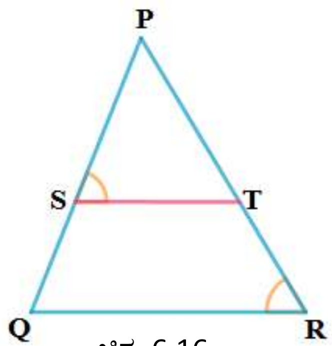
ಆದ್ದರಿಂದ ∠PST = ∠PQR (∵ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು) ------ (1)

ಆದರೆ ∠PST = ∠PRQ (∵ ದತ್ತ) ------- (2)

ಆದ್ದರಿಂದ ∠PRQ = ∠PQR ((1), (2) ಮತ್ತು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ (1) ರಿಂದ)

ಆದ್ದರಿಂದ PQ = PR (∵ ಸಮವಾದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾದ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ)

ಅಂದರೆ ΔPQR ಇದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.16

ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

1. ಚಿತ್ರ 6.17 ರ (i) ಮತ್ತು (ii) ರಲ್ಲಿ DE∥BC ಆದರೆ (i) ರಲ್ಲಿ EC (ii) ರಲ್ಲಿ AD ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ΔABCಯಲ್ಲಿ, DE∥BC (∵ ದತ್ತ)

∴ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ [∵ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ]

⇒ $\frac{1.5}{3} = \frac{1}{EC}$

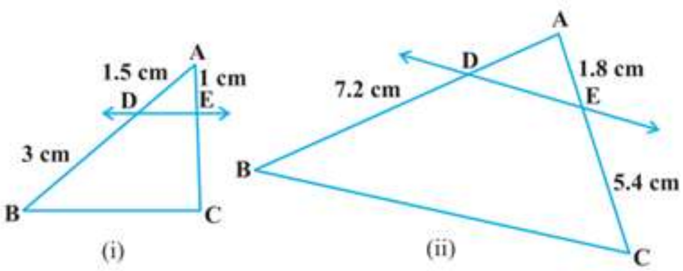
⇒ EC = $\frac{3x1}{1.5} = \frac{30}{15}$ = 2 cm.

(ii) ΔABCಯಲ್ಲಿ, DE∥BC (∵ ದತ್ತ)

∴ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ [∵ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ]

⇒ $\frac{AD}{7.2} = \frac{1.8}{5.4}$

⇒ AD = $\frac{1.8x7.2}{5.4} = \frac{18x7.2}{54}$



ಚಿತ್ರ 6.17

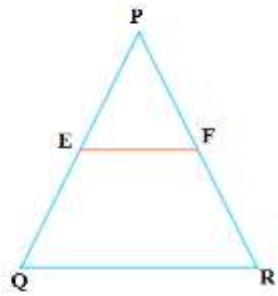
⇒ AD = 2.4 cm.

2. E ಮತ್ತು F ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔPQR ನ PQ ಮತ್ತು PR ಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ EF||QR ಆಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) PE = 3.9cm EQ = 3cm PF = 3.6cm FR = 2.4cm

(ii) PE = 4cm QE = 4.5cm PF = 8cm RF = 9cm

(iii) PQ = 1.28cm PR = 2.56cm PE = 0.18cm PF = 0.36cm



ΔPQRನಲ್ಲಿ, E ಮತ್ತು F ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ PQ ಮತ್ತು PR ಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು.

(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm ,PF = 3.6 cm, FR = 2,4 cm (ದತ್ತ)

$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{3.9}{3} = \frac{39}{3} = 1.3$ [∵ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ]

ಮತ್ತು $\frac{PF}{FR} = \frac{3.6}{2.4} = \frac{36}{24} = 1.5,$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{PE}{EQ} \neq \frac{PF}{FR}$

ಆದ್ದರಿಂದ **EF||QR** ಆಗಿಲ್ಲ

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8cm, RF = 9cm

$\therefore \frac{PE}{QE} = \frac{4}{4.5} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$ [∵ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ]

ಮತ್ತು, $\frac{PF}{RF} = \frac{8}{9}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{PE}{QE} = \frac{PF}{RF},$

ಆದ್ದರಿಂದ, **EF||QR**

(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm, PF = 0.36 cm

ಇಲ್ಲಿ, EQ = PQ - PE = 1.28 - 0.18 = 1.10 cm

ಮತ್ತು FR = PR - PF = 2.56 - 0.36 = 2.20 cm

ಹಾಗಾಗಿ, $\frac{PE}{QE} = \frac{0.18}{1.10} = \frac{18}{110} = \frac{9}{55}$ ………..... (i)

ಮತ್ತು $\frac{PE}{FR} = \frac{0.36}{2.20} = \frac{36}{220} = \frac{9}{55}$ ………….. (ii)

$\therefore \frac{PE}{QE} = \frac{PE}{FR}$

ಆದ್ದರಿಂದ, **EF||QR**

3. ಚಿತ್ರ 6.18 ರಲ್ಲಿ LM||CB ಮತ್ತು LN||CD ಆದರೆ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

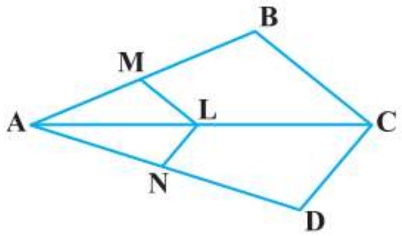
ಪರಿಹಾರ: ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, LM || CB

<u>ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,</u>

$\frac{AM}{MB} = \frac{AL}{LC}$ ... (i)

ಇದೇ ರೀತಿ, LN || CD

$\therefore \frac{AN}{ND} = \frac{AL}{LC}$ ... (ii)



ಚಿತ್ರ 6.18

(i) ಮತ್ತು **(ii)** ರಿಂದ,

$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{ND}$

$\Rightarrow \frac{MB}{AM} = \frac{ND}{AN}$ [ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗೊಳಿಸಿದಾಗ]

$\Rightarrow \frac{MB}{AM} + 1 = \frac{ND}{AN} + 1$ [1ನ್ನು ಎರಡೂ ಬದಿಗೂ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ]

$\Rightarrow \frac{MB+AM}{AM} = \frac{ND+AN}{AN}$

$\Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AN} \Rightarrow \frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AD}}$ [ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗೊಳಿಸಿದಾಗ]

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, LM || CB

ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಉಪ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$\frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AC}$ ... (i)

ಇದೇ ರೀತಿ, LN || CD

$\therefore \frac{AN}{AD} = \frac{AL}{AC}$ ... (ii)

(i) ಮತ್ತು **(ii)** ರಿಂದ,

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$

ಪ್ರಮೇಯ 6.1 ರ ಉಪಪ್ರಮೇಯ: ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಅಂತ:ಖಂಡದೊಳಗಿನ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

4. ಚಿತ್ರ 6.19 ರಲ್ಲಿ DE||AC ಮತ್ತು DF||AE ಆದರೆ $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

ΔABCಯಲ್ಲಿ , DE || AC (ದತ್ತ)

∴ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$ --------(1)

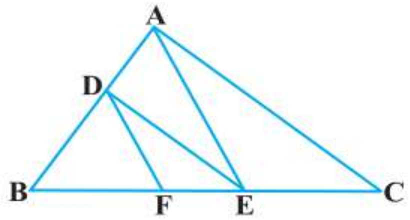
ΔABCಯಲ್ಲಿ , DF || AE (ದತ್ತ)

∴ ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$\frac{BD}{DA} = \frac{BF}{FE}$ ----------(2)

ಸಮೀಕರಣ **(i)** ಮತ್ತು **(ii)** ರಿಂದ

$\frac{\mathbf{BE}}{\mathbf{EC}} = \frac{\mathbf{BF}}{\mathbf{FE}}$



ಚಿತ್ರ 6.19

5. ಚಿತ್ರ 6.20 ಯಲ್ಲಿ DE||OQ ಮತ್ತು DF||OR ಆದರೆ EF||QR ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

ΔPQO ಯಲ್ಲಿ, DE || OQ (ದತ್ತ)

∴ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$\frac{PD}{DO} = \frac{PE}{EQ}$ ....(1)

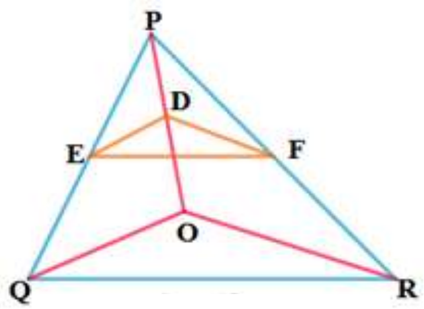
ΔPORನಲ್ಲಿ, DF || OR (ದತ್ತ)

∴ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$\frac{PD}{DO} = \frac{PF}{FR}$ ....(2)

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$

ಆದ್ದರಿಂದ ΔPQR ನಲ್ಲಿ , **EF || QR** [ಮೂ.ಸ.ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ]



ಚಿತ್ರ 6.20

6. ಚಿತ್ರ 6.21 ರಲ್ಲಿ AB||PQ ಮತ್ತು AC||PR ಆಗುವಂತೆ A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ OP, OQ ಮತ್ತು OR ಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು. ಆದರೆ BC||QR ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ΔOPQಯಲ್ಲಿ, AB || PQ (ದತ್ತ)

∴ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$ --------------------(1)

ΔOPR ಯಲ್ಲಿ , AC || PR (ದತ್ತ)

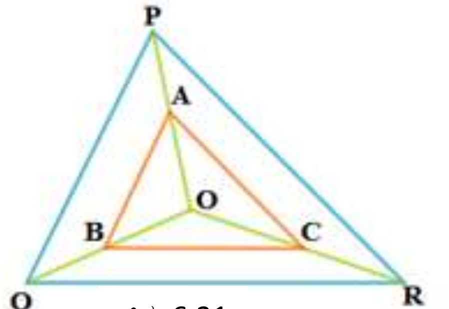
∴ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$\frac{OA}{AP} = \frac{OC}{CR}$ --------------------(2)

ಸಮೀಕರಣ **(1)** ಮತ್ತು **(2)** ರಿಂದ

$\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$

∴ ΔOQR ನಲ್ಲಿ, BC || QR. [ಮೂ.ಸ. ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ]



ಚಿತ್ರ 6.21

7. ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಯು ಅದರ ಮೂರನೇ ಬಾಹುವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಪ್ರಮೇಯ 6.1 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಿ (ನೀವು ಇದನ್ನು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿದ್ದೀರಿ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ)

ದತ್ತ: : ΔABC ಯಲ್ಲಿ D ಯು ABಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ⇒ AD=DB.

D ಬಿಂದುವಿನಿಂದ BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ DE ರೇಖೆಯು ACಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೀಯ: E ಯು AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು.

ಸಾಧನೆ: D ಯು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು.

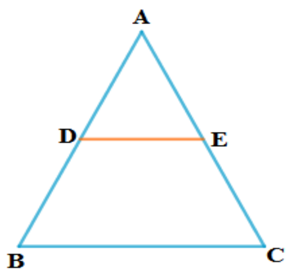
∴ AD = DB ⇒ $\frac{AD}{BD} = 1$ -----------------------(1)

ΔABCಯಲ್ಲಿ, DE || BC,

∴ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$ ⇒ $1 = \frac{AE}{EC}$ [ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ]

∴ AE =EC ⇒E ಯು AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು.



8. ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮದ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಪ್ರಮೇಯ 6.2 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಿ (ನೀವು ಇದನ್ನು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ)

ದತ್ತ: ΔABCಯಲ್ಲಿ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳು AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು

⇒AD=BD ಮತ್ತು AE=EC.

ಸಾಧನೀಯ: DE || BC

ಸಾಧನೆ: D ಯು ABಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು (ದತ್ತ)

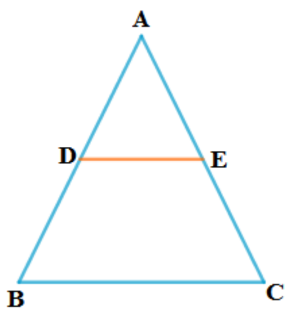
∴ AD = DB ⇒ $\frac{AD}{BD} = 1$ -------------------------- (1)

ಹಾಗೆಯೇ E ಯು AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು (ದತ್ತ)

∴ AE = EC ⇒ $\frac{AE}{EC} = 1$ -------------------------(2)

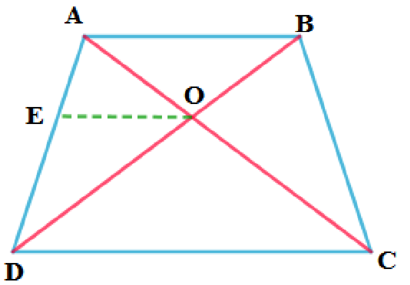
ಸಮೀಕರಣ **(1)** ಮತ್ತು **(2)** ರಿಂದ

$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$ ಆದ್ದರಿಂದ **DE || BC** [ಮೂ.ಸ.ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ]



9. ABCD ಯು ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ಇದರಲ್ಲಿ AB||DC ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದರೆ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ದತ್ತ: ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCDಯಲ್ಲಿ, AB || DC ಮತ್ತು ಕರ್ಣ ACಮತ್ತು ಕರ್ಣ BD ಗಳು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೀಯ: $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

ರಚನೆ: O ಮೂಲಕ EO || DC || AB ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ: ΔADCಯಲ್ಲಿ, OE || DC (ರಚನೆ)

∴ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$\frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO}$ ---------(1)

ΔABDಯಲ್ಲಿ, OE || AB (ರಚನೆ)

∴ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$\frac{ED}{AE} = \frac{DO}{BO} \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{BO}{DO}$ -------(2)

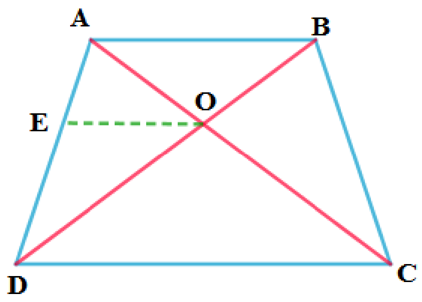
[ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಮಾಡಿದಾಗ]

ಸಮೀಕರಣ **(1)** ಮತ್ತು **(2)** ರಿಂದ

$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} \Rightarrow \frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

10. ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ ಆಗುವಂತೆ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ABCD ಯು ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ದತ್ತ: ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCD ಕರ್ಣ AC ಮತ್ತು ಕರ್ಣ BD ಗಳು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ ಆಗುವಂತೆ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ



ಸಾಧನೀಯ: ABCD ಯು ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ

ರಚನೆ: O ಮೂಲಕ EO || AB ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು ADಯನ್ನು Eಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

ಸಾಧನೆ: ΔDABಯಲ್ಲಿ, EO || AB

∴ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$\frac{ED}{AE} = \frac{DO}{BO} \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{BO}{DO}$ ------------------------ (1)

[ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಮಾಡಿದಾಗ]

ಅದೇ ರೀತಿ, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ (ದತ್ತ)

$\Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$ -----------------(2)

ಸಮೀಕರಣ **(1)** ಮತ್ತು **(2)** ರಿಂದ

$\frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO}$

∴ಮೂ.ಸ.ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ

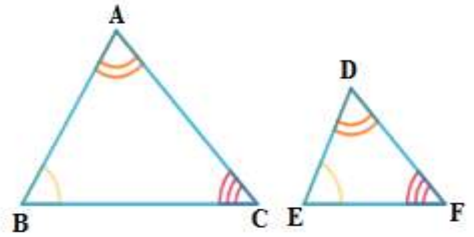
EO || DC ಮತ್ತು EO || AB

⇒ AB || DC.

ABCD ಯು ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ

2.4 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳು

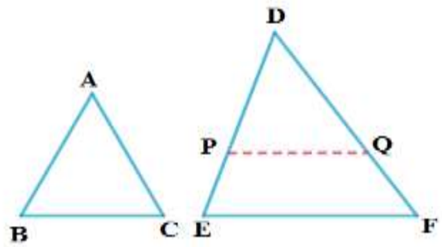
ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಹೆಸರಿಸಿದಂತೆ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವಾಗ ಅದರ ಅನುರೂಪ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸೂಚಿಸಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಚಿತ್ರ 2.22 ರಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜ DEF ಗಳನ್ನು ΔABC~ ΔEDF



ಪ್ರಮೇಯ 6.3

(ಕೋ. ಕೋ. ಕೋ) ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



ದತ್ತ: ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳಲ್ಲಿ $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle F$

ಸಾಧನೀಯ: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ (<1) ಮತ್ತು $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

ರಚನೆ: $DP = AB$ ಮತ್ತು $DQ = AC$ ಆಗುವಂತೆ ಕತ್ತರಿಸಿ PQ ವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ

ಸಾಧನೆ: ΔABC ಮತ್ತು ΔDPQ ಗಳಲ್ಲಿ,

$AB = DP$ (ರಚನೆ)

$\angle A = \angle D$ (ದತ್ತ)

$AC = DQ$ (ರಚನೆ)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ.ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ)

$\therefore$ **BC = PQ [ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ.] ------(1)**

$\Rightarrow \angle B = \angle P$ ಆದರೆ $\angle B = \angle E$ (ದತ್ತ)

$\therefore \angle P = \angle E$

ಇವು ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು

$\therefore$ **PQ‖EF**

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

[ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪಪ್ರಮೇಯ]

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ [ರಚನೆ ಮತ್ತು (1) ರಿಂದ]

$\therefore$ **$\Delta ABC \sim \Delta DEF$**

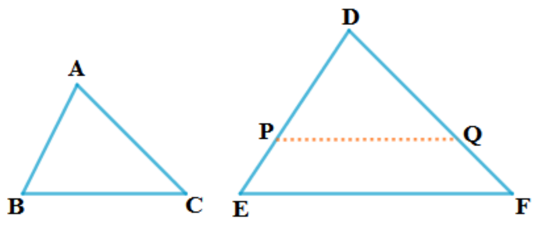
ನೆನಪಿಡಿ: ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

SSS- ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ

ಪ್ರಮೇಯ 6.4

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳೊಡನೆ ಸಮಾನುಪಾತ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ (ಅಂದರೆ ಅನುಪಾತ ಒಂದೇ ಆದರೆ) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದಾಗಿ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ: ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳಲ್ಲಿ, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (<1) -------(1)



ಸಾಧನೀಯ: ∠A = ∠D, ∠B = ∠E ಮತ್ತು ∠C = ∠F

ಮತ್ತು ΔABC ≅ Δ DEF

ರಚನೆ: DP = AB ಮತ್ತು DQ = AC ಆಗುವಂತೆ ಕತ್ತರಿಸಿ PQ ವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ

ಸಾಧನೆ: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ [∵ದತ್ತ]

$\Rightarrow \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF}$ [∵ DP = AB, DQ = AC]

∴ PQ∥EF [∵ Δ DEFನಲ್ಲಿ ಥೇಲ್ಸ್‌ನ ಉ.ಪ್ರ.ವಿಲೋಮ]

ಆದ್ದರಿಂದ **∠P = ∠E ಮತ್ತು ∠Q = ∠F**

∴ ΔDPQ ~ΔDEF [AA ಸ. ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ]

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{DP}{DE} = \frac{PQ}{EF}$ [ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ.]

$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{PQ}{EF}$ -------(1) [∵ AB = DP ರಚನೆ]

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ ----------(2) [∵ದತ್ತ]

$\Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{BC}{EF}$

⇒**BC = PQ** [∵ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ]

ΔABC ಮತ್ತು ΔDPQ ಗಳಲ್ಲಿ,

BC = PQ [∵ ಸಾಧಿಸಿದೆ]

AB = DP; AC = DQ [∵ರಚನೆ]

∴ΔABC ≅ ΔDPQ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ.ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ)

ಆದ್ದರಿಂದ∠A = ∠D, ∠B = ∠P ಮತ್ತು ∠C = ∠Q

⇒∠A = ∠D, ∠B = ∠E ಮತ್ತು ∠C = ∠F ಮತ್ತು ΔABC ≅ Δ DEF

SAS - ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ

ಪ್ರಮೇಯ 6.5

ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನವು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದು ಆ ಕೋನಗಳು ಉಂಟುಮಾಡಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿ ಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಚಿತ್ರ 6.29 ರಲ್ಲಿ PQ∥RS ಆದರೆ ΔPOQ ~ ΔSO

ಪರಿಹಾರ: PQ∥RS (∵ ದತ್ತ)

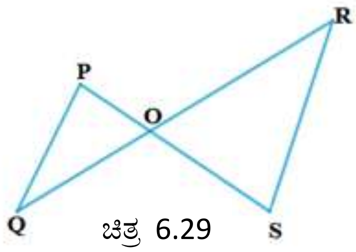
ಆದ್ದರಿಂದ ∠P = ∠S (∵ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

ಮತ್ತು ∠Q = ∠R (∵ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

ಮತ್ತು ∠POQ = ∠SOR (∵ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

ಆದ್ದರಿಂದ ΔPOQ ~ ΔSOR

(∵ಕೋ.ಕೋ.ಕೋ ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)



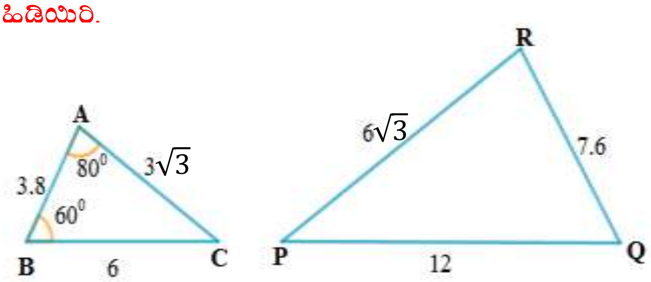
ಚಿತ್ರ 6.29

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಚಿತ್ರ 6.30 ಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ∠P ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳಲ್ಲಿ

$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{PQ} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

ಅಂದರೆ $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{CQ} = \frac{CA}{PR}$



ಚಿತ್ರ 6.30

∴ $\Delta ABC \sim \Delta RQP$ (∵ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ ಸ.ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

$\angle C = \angle P$ (∵ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

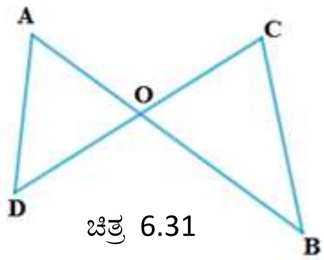
ಆದರೆ $\angle C = 180 - \angle A - \angle B$ (ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ)

$=180^0 - 80^0 - 60^0 = 40^0$

$\Rightarrow \angle P = 40^0$

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಚಿತ್ರ 6.31 ರಲ್ಲಿ OA.OB = OC.OD ಆದರೆ ∠A = ∠C ಮತ್ತು ∠B = ∠D ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: OA.OB = OC.OD (ದತ್ತ)



ಚಿತ್ರ 6.31

ಹಾಗೆ $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ ----------------------(1)

ಹಾಗೂ

$\angle AOD = \angle COB$ (∵ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು) ------(2)

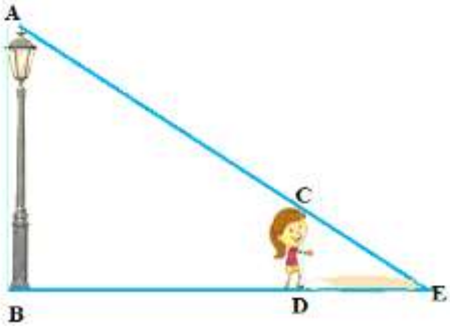
(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$\Delta AOD \sim \Delta COB$ (∵ ಸಮರೂಪತೆಯ SAS ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

ಹೀಗೆ $\angle A = \angle C$ ಮತ್ತು $\angle D = \angle B$ (∵ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

ಉದಾಹರಣೆ 7: 90cm ಎತ್ತರವಿರುವ ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳು 1.2m/s ಜವದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೀಪದ ಕಂಬವೊಂದರ ಬುಡದಿಂದ ಹೊರ ನಡೆಯುತ್ತಿದ್ದಾಳೆ. ದೀಪವು ನೆಲದಿಂದ 3.6m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ 4 ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳ ನಂತರ ಅವಳ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವೇನು?

ಪರಿಹಾರ:



AB ದೀಪದ ಕಂಬವಾಗಿರಲಿ. ಹುಡುಗಿಯ ಎತ್ತರ CD ಆಗಿರಲಿ.

DE ಯು ಹುಡುಗಿಯ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

DE $= x$' m ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $BD = 1.2m \times 4 = 4.8m$

$\Delta ABE \sim \Delta CDE$

∴ $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$

ಅಂದರೆ, $\frac{4.8+x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ ($\because 90cm = \frac{90}{100} m = 0.9m$)

$\Rightarrow 4.8+x = 4x$

$\Rightarrow 3x = 4.8$

$\Rightarrow x = 1.6$

ಹೀಗೆ 4 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಡಿಗೆಯ ನಂತರ ಹುಡುಗಿಯ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ 1.6m

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಚಿತ್ರ 6.33 ರಲ್ಲಿ CM ಮತ್ತು RN ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ΔABC ~ ΔPQR ಆದರೆ

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

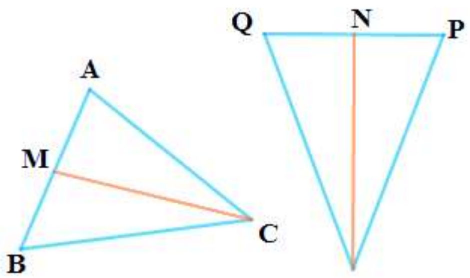
ಪರಿಹಾರ: i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ಹೀಗೆ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ ------------------- (1)

ಮತ್ತು $\angle A=\angle P$, $\angle B=\angle Q$ ಮತ್ತು $\angle C=\angle R$ --------- (2)

ಆದರೆ AB = 2AM ಮತ್ತು PQ = 2PN

(∵ CM ಮತ್ತು RN ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳಾದ ಕಾರಣ)



ಚಿತ್ರ 6.33

ಹೀಗೆ $\frac{2AM}{2PN} = \frac{CA}{RP} \Rightarrow \frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ ---------- (3)

ಅಲ್ಲದೇ, $\angle MAC = \angle NPR$ ($\because$ (2) ರಿಂದ) --------- (4)

ಹೀಗೆ (3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (SAS ನಿರ್ಧಾರಕಗುಣ) ------ (5)

ii) (5) ರಿಂದ $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ -------------------(6)

ಆದರೆ $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ ($\because$ (2) ರಿಂದ) ------------ (7)

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ ----------- (8)

(iii) ಪುನ: $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ ($\because$ (8) ಮತ್ತು (9) ರಿಂದ)

ಹಾಗೂ $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2BM}{2QN}$

ಅಂದರೆ $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$ ----------- (10)

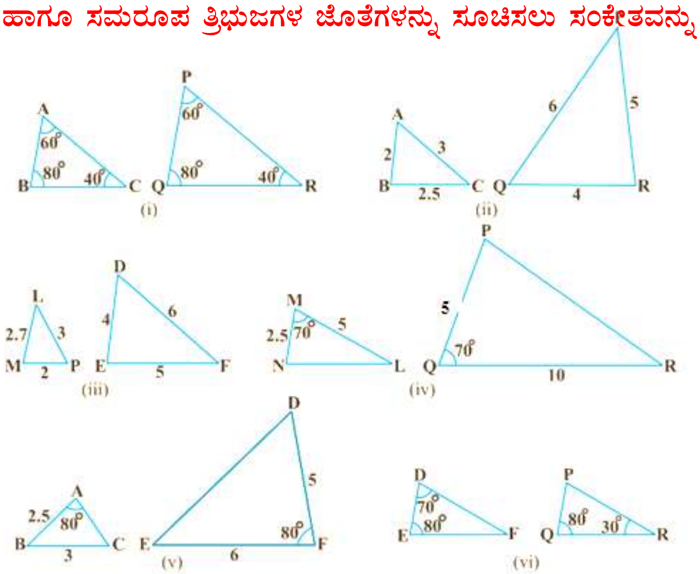
ಅಂದರೆ $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ ($\because$ (9) ಮತ್ತು (10) ರಿಂದ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ ($\because$ ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

ಗಮನಿಸಿ: i) ನೇ ಭಾಗವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸುತ್ತಾ ನೀವು ಭಾಗ (iii) ನ್ನು ಕೂಡಾ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.3

1) **ಚಿತ್ರ 6.34 ರಲ್ಲಿ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಗಳು ಯಾವುವು ತಿಳಿಸಿ. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಸಮರೂಪತೆಯ ಯಾವ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವಿರಿ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಸಂಕೇತವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.**



ಚಿತ್ರ 6.34

(i) ΔABC ಮತ್ತು ΔPQRಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle A = \angle P = 60°$ (ದತ್ತ)

$\angle B = \angle Q = 80°$ (ದತ್ತ)

$\angle C = \angle R = 40°$ (ದತ್ತ)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$ (AAA ಸಮರೂಪತೆ ನಿಧಾರಕ ಗುಣ)

(ii) ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳಲ್ಲಿ,

$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RP} = \frac{CA}{PQ}$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta QRP$ (SSS ಸಮರೂಪತೆ ನಿಧಾರಕ ಗುಣ)

(iii) ΔLMP ಮತ್ತು ΔDEFಗಳಲ್ಲಿ,

LM=2.7, MP=2, LP =3, EF = 5, DE = 4, DF= 6

$\frac{MP}{DE} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{PL}{DF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{LM}{EF} = \frac{2.7}{5} = \frac{27}{50}$

ಇಲ್ಲಿ, $\frac{MP}{DE} = \frac{PL}{DF} \neq \frac{LM}{EF}$

$\therefore \Delta LMP$ ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಲ್ಲ

(iv) ΔMNL ಮತ್ತು ΔQPRಗಳಲ್ಲಿ,

$\frac{MN}{QP} = \frac{ML}{QR} = \frac{1}{2}$; $\angle M = \angle Q = 70°$

$\therefore \Delta MNL \sim \Delta QPR$ (SAS ಸಮರೂಪತೆ ನಿಧಾರಕ ಗುಣ)

(v) ΔABC ಮತ್ತು ΔDEFಗಳಲ್ಲಿ,

AB=2.5, BC=3, $\angle A$= 80°,EF=6, DF=5,$\angle F$=80°

$\Rightarrow \frac{AB}{DF} = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು, $\frac{BC}{EF}$

ಇಲ್ಲಿ ಸಮರೂಪ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ ಕೊಟ್ಟಿಲ್ಲ $\Rightarrow \angle B \neq \angle F$

$\Rightarrow \Delta ABC$ ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಲ್ಲ.

(vi) ΔDEFಯಲ್ಲಿ, $\angle D + \angle E + \angle F = 180°$

$\Rightarrow 70° + 80° + \angle F = 180° \Rightarrow \angle F = 30°$

ΔPQRನಲ್ಲಿ, $\angle P + \angle Q + \angle R = 180$

$\Rightarrow$ $\angle P + 80° + 30° = 180° \Rightarrow \angle P = 70°$

ΔDEF ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle D = \angle P = 70°; \angle F = \angle Q = 80°;\angle F = \angle R = 30°$

$\Rightarrow \Delta DEF \sim \Delta PQR$ (AAA ಸಮರೂಪತೆ ನಿಧಾರಕ ಗುಣ)

2. ಚಿತ್ರ 6.35 ರಲ್ಲಿ $\Delta OBA \sim \Delta ODC$, $\angle BOC = 125^0$ ಮತ್ತು $\angle CDO = 70$ ಆದರೆ $\angle DOC$, $\angle DCO$ ಮತ್ತು $\angle OAB$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

DOB ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ

$\therefore \angle DOC + \angle COB = 180°$

$\Rightarrow \angle DOC = 180° - 125° = 55°$

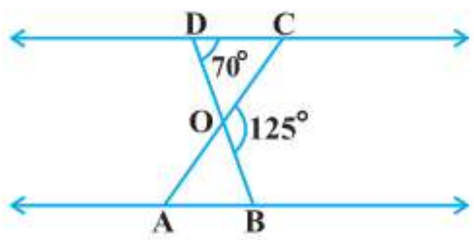
ΔDOCಯಲ್ಲಿ, $\angle DCO + \angle CDO + \angle DOC = 180°$

$\Rightarrow \angle DCO + 70° + 55° = 180°$

$\Rightarrow \angle DCO = 180^0 - 125° = 55^0$

ಆದರೆ, $\Delta ODC \sim \Delta OBA$. (ದತ್ತ)

$\therefore \angle OAB = \angle OCD$ [ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಕೋ.] $\Rightarrow \angle OAB = 55°$



ಚಿತ್ರ 6.35

3. ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ , AB||DC ಕರ್ಣಗಳಾದ AC ಮತ್ತು BD ಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸುತ್ತವೆ. ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

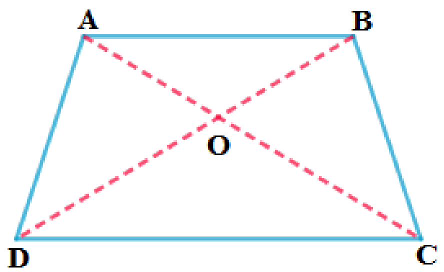
ΔBOA ಮತ್ತು ΔDOC ಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle ABO = \angle CDO$ [AB || CD,ಅಂತರ್ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು]

$\angle BAO = \angle DCO$ [AB || CD,ಅಂತರ್ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು]

$\angle BOA = \angle DOC$ [ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು]

$\therefore \Delta BOA \sim \Delta DOC$ [AAA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ]



$\therefore \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$ [ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾಹುಗಳು]

$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ [ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗೊಳಿಸಿದಾಗ]

4. ಚಿತ್ರ 6.36 ರಲ್ಲಿ $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ ಮತ್ತು $\angle 1 = \angle 2$ ಆದರೆ $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ΔPQRನಲ್ಲಿ,

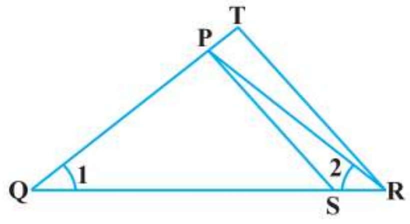
$\angle PQR = \angle PRQ$ (ದತ್ತ)

$\therefore PQ = PR$ --------------------(1)

ಆದರೆ, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ (ದತ್ತ)

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ

$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PQ}$ -------------------------(2)



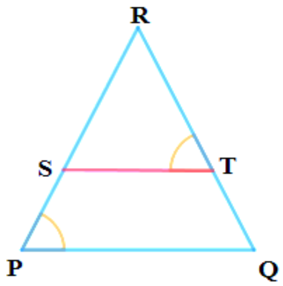
ಚಿತ್ರ 6.36

ΔPQS ಮತ್ತು ΔTQRಗಳಲ್ಲಿ,

$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PQ}$ [ಸಮೀಕರಣ (2)] $\angle Q = \angle Q$ $\therefore \Delta PQS \sim \Delta TQR$ [SAS ಸ.ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ]

5. $\angle P = \angle RTS$ ಆಗಿರುವಂತೆ S ಮತ್ತು T ಗಳು ΔPQR ನ PR ಮತ್ತು QR ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಆದರೆ $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:



ΔRPQ ಮತ್ತು ΔRSTಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle RTS = \angle QPS$ (ದತ್ತ)

$\angle R = \angle R$ (ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ)

$\therefore \Delta RPQ \sim \Delta RTS$ (AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

6. ಚಿತ್ರ 6.37 $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ ರಲ್ಲಿ ಆದರೆ $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

ಪರಿಹಾರ:

$\Delta ABE \cong \Delta ACD$ (ದತ್ತ)

$\therefore$ AB = AC----------------------(1)

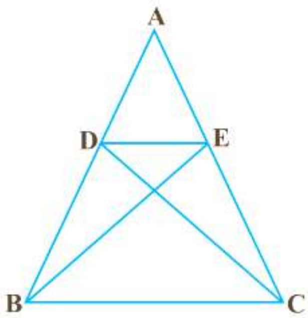
ಮತ್ತು AD = AE----------------------(2)

[ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು]

ΔADE ಮತ್ತು ΔABCಗಳಲ್ಲಿ,

ಸಮೀಕರಣ (2)ನ್ನು (1)ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$



ಚಿತ್ರ 6.37

$\angle A = \angle A$ [ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ]

$\therefore \Delta ADE \sim \Delta ABC$ [SAS ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ]

7. ಚಿತ್ರ 6.38 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಯ ಎತ್ತರಗಳಾದ AD ಮತ್ತು CE ಗಳು ಪರಸ್ಪರ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ

i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$

iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

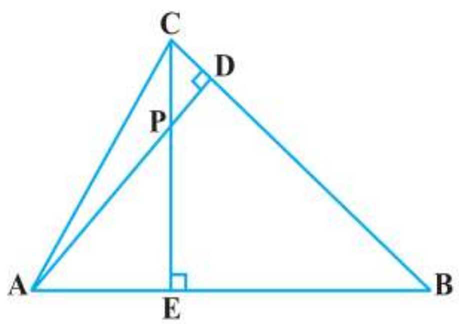
(i) **ΔAEP ಮತ್ತು ΔCDP ಗಳಲ್ಲಿ,**

$\angle AEP = \angle CDP = 90°$

$\angle APE = \angle CPD$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

ಆದ್ದರಿಂದ, AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ

$\Delta AEP \sim \Delta CDP$



ಚಿತ್ರ 6.38

(ii) ΔABD ಮತ್ತು ΔCBE ಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle ADB = \angle CEB = 90°$

∠ABD = ∠CBE (ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

ಆದ್ದರಿಂದ, AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ

ΔABD ~ ΔCBE

(iii) **ΔAEP ಮತ್ತು ΔADB ಗಳಲ್ಲಿ,**

∠AEP = ∠ADB = 90^0

∠PAE = ∠DAB (ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

ಆದ್ದರಿಂದ, AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ

ΔAEP ~ ΔADB

(iv) **ΔPDC ಮತ್ತು ΔBEC ಗಳಲ್ಲಿ,**

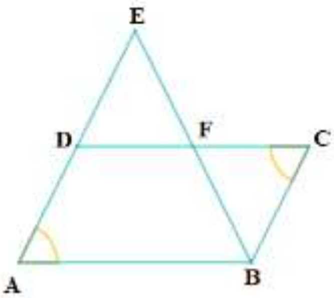
∠PDC = ∠BEC = 90°

∠PCD = ∠BCE (ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

ಆದ್ದರಿಂದ, AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ

ΔPDC ~ ΔBEC

8. ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಂಆ ಬಾಹುವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ E ಬಿಂದುವಿದೆ ಮತ್ತು BE ಮತ್ತು CD ಗಳು ಪರಸ್ಪರ F ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ ΔABE ~ ΔCFB ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಪರಿಹಾರ: ΔABE ಮತ್ತು ΔCFBಗಳಲ್ಲಿ

∠A = ∠C (ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

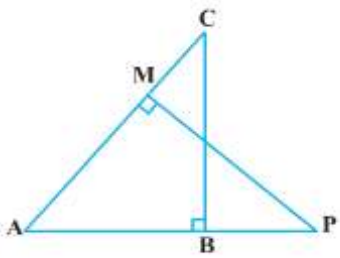
∠AEB = ∠CBF (AE || BC,ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

ಆದ್ದರಿಂದ, AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ

ΔABE ~ ΔCFB

8. ಚಿತ್ರ 6.39 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔAMP ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ B ಮತ್ತು M ಗಳಲ್ಲಿ ಲಂಬ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಆದರೆ:

i) ΔABC ~ ΔAMP ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 6.39

(i) **ΔABC ಮತ್ತು ΔAMP ಗಳಲ್ಲಿ,** ∠A = ∠A (ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

∠ABC = ∠AMP = 90°

ಆದ್ದರಿಂದ, AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ

∴ ΔABC ~ ΔAMP

(ii) ΔABC ~ ΔAMP (ಸಾಧಿಸಿದೆ)

ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳು ಸಮ,

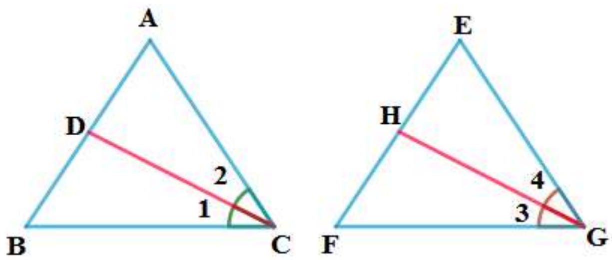
ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

9. CD ಮತ್ತು GH ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ACB ಮತ್ತು EGF ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಗಳಾಗಿರುವಂತೆ D ಮತ್ತು H ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔEFG ಯ ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು FE ಮೇಲೆ ಇವೆ. ΔABC ~ ΔEFG ಆದರೆ

i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

ii) ΔDCB ~ ΔHGE

iii) ΔDCA ~ ΔHGF ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಪರಿಹಾರ: (i) **ΔABC ~ ΔFEG [ದತ್ತ]**

∴ ∠A = ∠F, ∠ACB = ∠FGE

[ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು]

CD ಯು ∠ACB ಯ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ, GH ಯು ∠FGE

∴ ∠ACD = ∠FGH

ΔACD ಮತ್ತು ΔFGH ಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle A = \angle F$

$\angle ACD = \angle FGH$

ಆದ್ದರಿಂದ, AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ

$\Delta ACD \sim \Delta FGH$

$\Rightarrow \frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(ii) $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ [ದತ್ತ]

$\therefore \angle B = \angle E$, ಮತ್ತು $\angle ACB = \angle FGE$ [ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು]

CD ಯು $\angle ACB$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ, GH ಯು

$\angle FGE$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ

$\therefore \angle DCB = \angle HGE$

ಈಗ ΔDCB ಮತ್ತು ΔHGE ಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle DCB = \angle HGE$; $\angle B = \angle E$

ಆದ್ದರಿಂದ, AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ

$\therefore \Delta DCB \sim \Delta HGE$

(iii) $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ [ದತ್ತ]

$\therefore \angle A = \angle F, \angle ACB = \angle FGE$

[ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು]

CD ಯು $\angle ACB$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ, GH ಯು $\angle FGE$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ

$\therefore \angle ACD = \angle FGH$

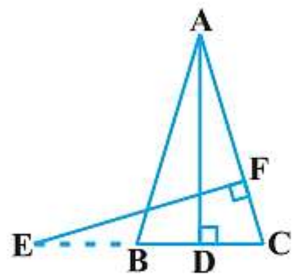
ಈಗ, ΔDCA ಮತ್ತು ΔHGF,

$\angle ACD = \angle FGH$; $\angle A = \angle F$

ಆದ್ದರಿಂದ, AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ

$\therefore \Delta DCA \sim \Delta HGF$

10. ಚಿತ್ರ 6.40 ಯಲ್ಲಿ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABCಯಲ್ಲಿ AB = AC, E ಯು CB ಯನ್ನು ವೃದ್ದಿಸಿದ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು $AD \perp BC$, $EF \perp AC$ ಆದರೆ $\Delta ABD \sim \Delta ECF$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 6.40

ಪರಿಹಾರ: ABC ಯು ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ

$AB = AC \Rightarrow \angle B = \angle C$ [ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು]

$\Rightarrow \angle ABD = \angle ECF$

ΔABD ಮತ್ತು ΔECF ಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle ADB = \angle EFC = 90^0$ [$AD \perp BC$, $EF \perp AC$]

$\Rightarrow \angle ABD = \angle ECF$

ಆದ್ದರಿಂದ, AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ

$\therefore \Delta ABD \sim \Delta ECF$

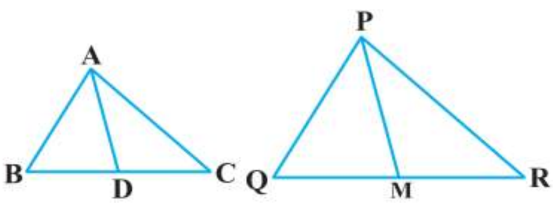
11. ಚಿತ್ರ 6.41 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಯ ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು BC ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆ AD ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔPQR ನ ಬಾಹುಗಳಾದ PQ ಮತ್ತು QR ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆ PM ನೊಂದಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ದತ್ತ: ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳಲ್ಲಿ,

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM}$

ಸಾಧನೀಯ: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ಸಾಧನೆ: $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM}$



ಚಿತ್ರ 6.41

$\frac{AB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR} = \frac{AD}{PM}$ ----------- (1)

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$ (D ಯು BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು. M ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು)

$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta PQM$ [SSS ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ]

$\therefore \angle ABD = \angle PQM$ [ಸ.ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು]

$\Rightarrow \angle ABC = \angle PQR$

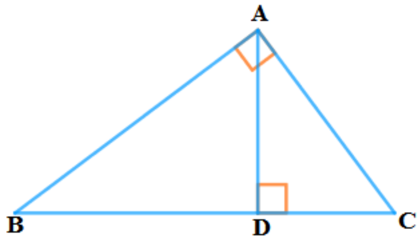
ಈಗ ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳಲ್ಲಿ,

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$

$\angle ABC = \angle PQR$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ [SAS ಸ. ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ]

12. ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle ADC = \angle BAC$ ಆಗುವಂತೆ D ಯು BC ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ $CA^2 = CB.CD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ΔADC ಮತ್ತು ΔBAC ಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle ADC = \angle BAC$ (ದತ್ತ)

$\angle ACD = \angle BCA$ (ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ)

ಆದ್ದರಿಂದ, AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ

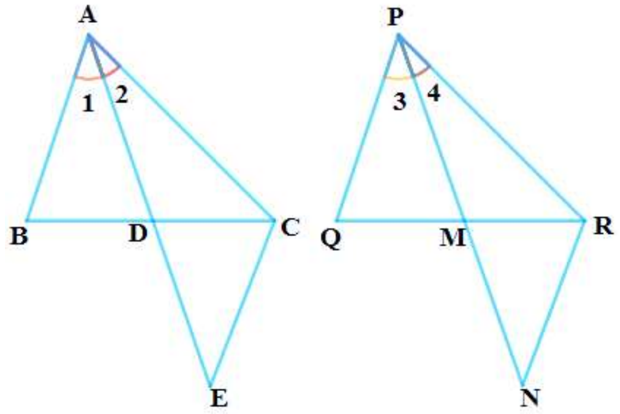
$\therefore \Delta ADC \sim \Delta BAC$

ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

$\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA}$

$\Rightarrow CA^2 = CB.CD$

13. ΔABC ಯು ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು AC ಗಳು ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆ AD ಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔPQR ನ ಬಾಹುಗಳಾದ PQ ಮತ್ತು PR ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆ PM ನೊಂದಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ದತ್ತ: ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳಲ್ಲಿ, ADಯು BC ಯ ಮತ್ತು PM, QR ಗೆಳೆದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು.

ಮತ್ತು $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$

ಸಾಧನೀಯ: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ರಚನೆ: AD = DE ಆಗುವಂತೆ AD ಯನ್ನು E ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ, CE ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ,

ಹಾಗೆಯೇ, PM = MN ಆಗುವಂತೆ PMನ್ನು N ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ, RN ಸೇರಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ: ΔABD ಮತ್ತು ΔCDE ಗಳಲ್ಲಿ,

AD = DE [∵ರಚನೆ]

BD = DC [∵ AD ಮಧ್ಯರೇಖೆ]

∠ADB = ∠CDE [∵ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು]

∴ ΔABD ≅ ΔCDE [∵ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ]

⇒ AB = CE [ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ.] -----------------(i)

ಇದೇ ರೀತಿ, ΔPQM ಮತ್ತು ΔMNR ಗಳಲ್ಲಿ,

PM = MN [∵ರಚನೆ]

QM = MR [∵PM ಮಧ್ಯರೇಖೆ]

∠PMQ = ∠NMR [∵ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು]

∴ ΔPQM = ΔMNR [∵ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ]

⇒ PQ = RN [ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ.]----------------(ii)

ಆದರೆ, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$

$\Rightarrow \frac{CE}{RN} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$ [(i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ]

$\Rightarrow \frac{CE}{RN} = \frac{AC}{PR} = \frac{2AD}{2PM}$

$\Rightarrow \frac{CE}{RN} = \frac{AC}{PR} = \frac{AE}{PN}$ [∵ 2AD = AE ಮತ್ತು 2PM = PN]

∴ ΔACE ~ ΔPRN [SSS ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ]

∴ ∠2 = ∠4

ಇದೇ ರೀತಿ ∠1 = ∠3

∴ ∠1 + ∠2 = ∠3 + ∠4

⇒ ∠A = ∠P ------------------------(iii)

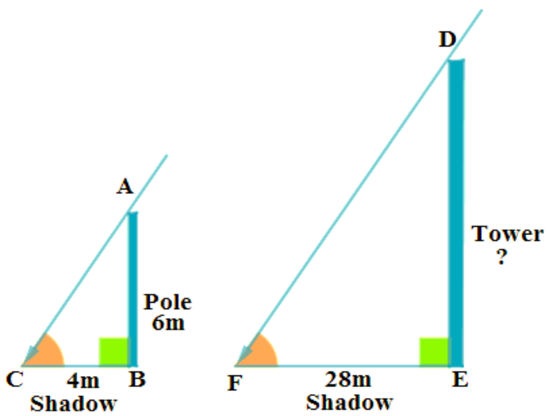
ಈಗ, ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳಲ್ಲಿ,

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ [∵ ದತ್ತ]

∠A = ∠P [(iii)ರಿಂದ]

∴ ΔABC ~ ΔPQR [SAS ಸ.ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ]

14. ಎತ್ತರದ ನೇರವಾದ ಕಂಬವು ನೆಲದ ಮೇಲೆ 4m ಉದ್ದದ ನೆರಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಟ್ಟಡವು 28 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ನೆರಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವೇನು?



ನೇರವಾದ ಕಂಬದ ಉದ್ದ = AB = 6m

ಕಂಬದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ = BC = 4 m

ಗೋಪುರದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ = EF = 28 m

ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = DE = h m ಆಗಿರಲಿ

ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳಲ್ಲಿ ,

∠C = ∠F (ಸೂರ್ಯನಿಂದ ಏಕ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನ)

∠B = ∠E = 90°

ಆದ್ದರಿಂದ, AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ

ΔABC ~ ΔDEF

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$,(ಸಮರೂಪಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ)

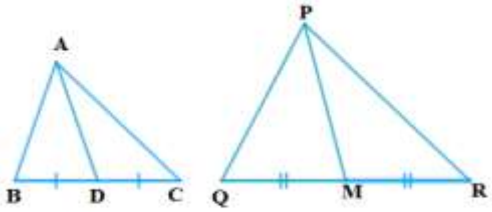
$\therefore \frac{6}{h} = \frac{4}{28} \Rightarrow h = 6\times\frac{6x28}{4}$

$\Rightarrow h = 6 \times 7$

$\Rightarrow h = 42$ m

∴ **ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = 42 m.**

15. AD ಮತ್ತು PM ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ನ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳಾಗಿದ್ದು ΔABC ~ ΔPQR ಆದರೆ $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ΔABC ~ ΔPQR

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$ --------------- (1)

ಹಾಗೂ ∠A = ∠P, ∠B = ∠Q, ∠C = ∠R ---------------- **(2)**

AD ಮತ್ತು PM ಗಳು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು

∴ BD = $\frac{BC}{2}$ ಮತ್ತು QM = $\frac{QR}{2}$ -------------------**(3)**

From equations **(i)** and **(iii)**, we get

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR} = \frac{BD}{QM}$ ----------------(4)

ΔABD ಮತ್ತು ΔPQM ಗಳಲ್ಲಿ,

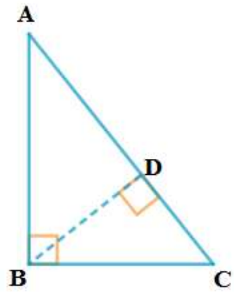
∠B = ∠Q [(2) ರಿಂದ]

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$ [(iv)ರಿಂದ]

∴ ΔABD ~ ΔPQM (SAS ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ)

$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$

ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಶೃಂಗದಿಂದ ವಿಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ವಿಭಾಗಿಸುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮರೂಪ ಅಲ್ಲದೆ ಅವುಗಳು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



****

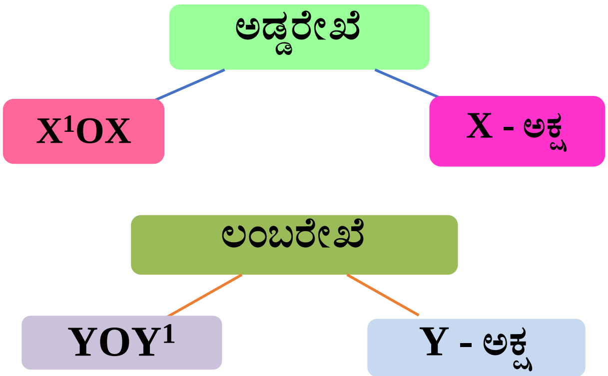
7 ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

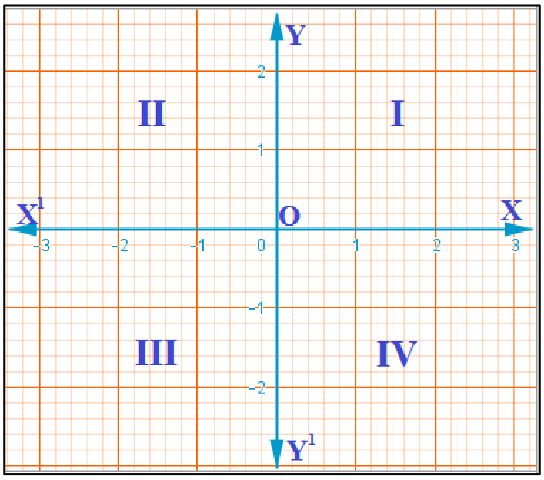
ಕಲಿಕಾಂಶಗಳು:

1. ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳು
2. ದೂರ ಸೂತ್ರ
3. ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ
4. ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರ
5. ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸೂತ್ರ

ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು $X^{I}OX$ ಮತ್ತು YOY^{I}

ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳು :





ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದು $'O'$ (Origin) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳು ಸಮತಲವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಚತುರ್ಥಕಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ,

i. $y-$ ಅಕ್ಷದಿಂದ ಆ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಲಂಬದೂರವನ್ನು ಆ ಬಿಂದುವಿನ $x-$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಥವಾ ಕ್ಷಿತಿಜದೂರ ಎನ್ನುವರು.

ii. $x-$ ಅಕ್ಷದಿಂದ ಆ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಲಂಬದೂರವನ್ನು ಆ ಬಿಂದುವಿನ $y-$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಥವಾ ಲಂಬದೂರ ಎನ್ನುವರು.

P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು $P(x, y)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(0, 0)$

x ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(x, 0)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(0, y)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ನಕ್ಷೆ ರಚಿಸುವಿಕೆ

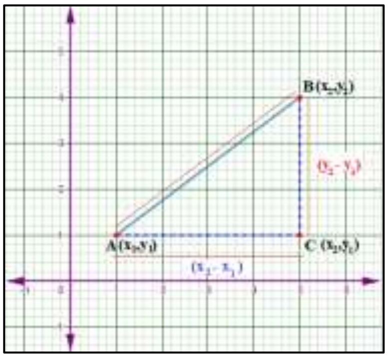
ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ $ax + by = c$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದ **ನಕ್ಷೆಯು ಸರಳ ರೇಖೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.**

ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ

$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)}$ **ಆಗಿರುತ್ತದೆ.**

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯು ಪರವಲಯವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ



x –ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $= x_2 - x_1$

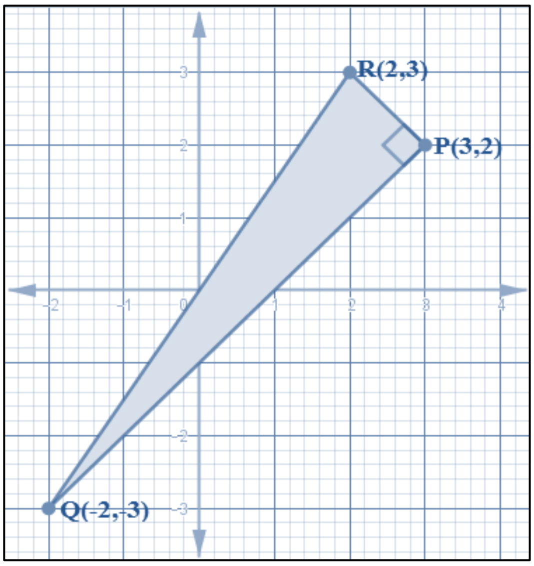
y –ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ

ದೂರ $= y_2 - y_1$

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಇರುವ ದೂರ $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

ಉದಾಹರಣೆ1: (3, 2), (–2, –3) ಮತ್ತು (2, 3) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ತ್ರಿಭುಜ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆಯೆ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ, ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಧವನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿ.



$P(3,2)$, $Q(-2,-3)$, $R(2,3)$

ಸೂತ್ರ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$PQ = \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2}$

$= \sqrt{(5)^2 + (5)^2} = \sqrt{25+25} \quad = \sqrt{\mathbf{50}}$

$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{\mathbf{52}}$

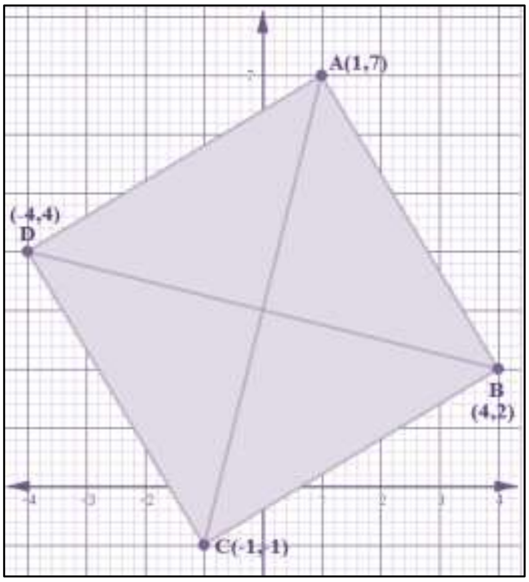
$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{\mathbf{2}}$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ದೂರಗಳ ಮೊತ್ತವು, ಮೂರನೇ ದೂರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದರಿಂದ, P, Q ಮತ್ತು R ಬಿಂದುಗಳು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

$\mathbf{PQ^2 + PR^2 = QR^2}$ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮದ ಪ್ರಕಾರ

PQR ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ.

ಉದಾಹರಣೆ2: (1, 7), (4, 2), (–1, –1) ಮತ್ತು (–4, 4) ಬಿಂದುಗಳು ಚೌಕದ ಶೃಂಗಗಳು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಪರಿಹಾರ: A (1, 7), B (4, 2), C (-1, -1) ಮತ್ತು D (-4, 4)

$\mathbf{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-7)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25}$

$= \sqrt{\mathbf{34}}$

$\mathbf{BC} = \sqrt{(-1-4)^2 + (-1-2)^2}$

$= \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9}$

$= \sqrt{\mathbf{34}}$

$\mathbf{CD} = \sqrt{(-4-(-1))^2 + (4-(-1))^2}$

$= \sqrt{(-4+1)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2} = \sqrt{9+25}$

$= \sqrt{\mathbf{34}}$

$\mathbf{DA} = \sqrt{(1-(-4))^2+(7-4)^2} = \sqrt{(1+4)^2+(3)^2}$

$= \sqrt{(5)^2+(3)^2} = \sqrt{25+9}$

$= \sqrt{\mathbf{34}}$

ಕರ್ಣ $\mathbf{AC} = \sqrt{(-1-1)^2+(-1-7)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-8)^2}$

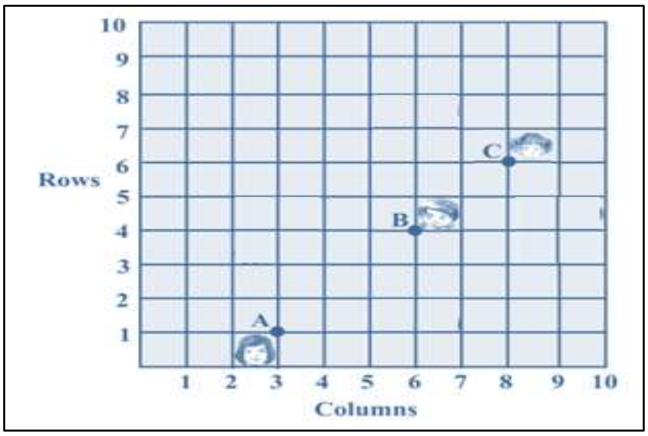
$= \sqrt{4+64} = \sqrt{\mathbf{68}}$

ಕರ್ಣ $\mathbf{BD} = \sqrt{(-4-4)^2+(4-2)^2} = \sqrt{(-8)^2+(2)^2}$

$= \sqrt{64+4} = \sqrt{\mathbf{68}}$

AB = BC = CD = DA ಮತ್ತು **ಕರ್ಣ AC = ಕರ್ಣ BD** ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, **ABCD ಒಂದು ಚೌಕ.**

ಉದಾಹರಣೆ 3:ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಡೆಸ್ಕುಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ 7.6 ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಅಶೀಮಾ, ಭಾರತಿ ಮತ್ತು ಕ್ಯಾಮೆಲಾ ಕ್ರಮವಾಗಿ A (3, 1), B (6, 4) ಮತ್ತು C (8, 6) ರಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿದ್ದಾರೆ. ಆ ಮೂರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿದ್ದಾರೆಂದು ನಿಮಗೆ ಅನಿಸುತ್ತದೆಯೆ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಕೊಡಿ.



$\mathbf{AB} = \sqrt{(6-3)^2+(4-1)^2}$

$= \sqrt{(3)^2+(3)^2}$

$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$= \sqrt{9\times 2} = \mathbf{3\sqrt{2}}$

$\mathbf{BC} = \sqrt{(8-6)^2+(6-4)^2}$

$= \sqrt{(2)^2+(2)^2}$

$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$= \sqrt{4\times 2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$

$\mathbf{AC} = \sqrt{(8-3)^2+(6-1)^2}$

$= \sqrt{(5)^2+(5)^2}$

$= \sqrt{25+25}$

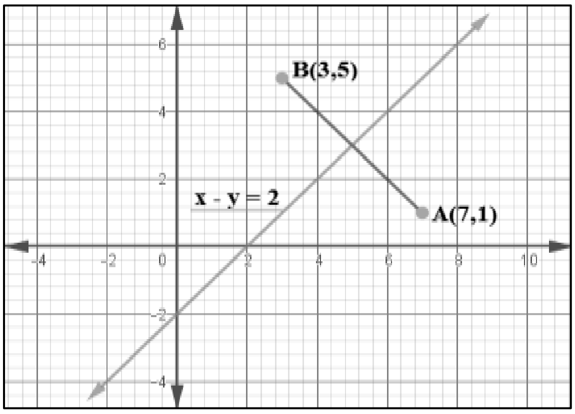
$= \sqrt{50}$

$= \sqrt{25\times 2} = \mathbf{5\sqrt{2}}$

$\mathbf{AB+BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಅವರು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿದ್ದಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ4: (x, y) ಬಿಂದುವು (7, 1) ಮತ್ತು (3, 5) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, *x* ಮತ್ತು y ಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



P (x, y) ಬಿಂದುವು A (7, 1) ಮತ್ತು B (3, 5) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

PA = PB ಆದ್ದರಿಂದ $PA^2 = PB^2$

$PA = \sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}$

$PB = \sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}$

$AP^2 = BP^2 \Rightarrow \left(\sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}\right)^2$

$= \left(\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}\right)^2$

$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$

$[x^2+7^2-2(x)(7)] + [y^2+1^2-2(y)(1)] = [x^2+3^2-2(x)(3)] + [y^2+5^2-2(y)(5)]$

$x^2+49-14x+y^2+1-2y = x^2+9-6x+y^2+25-10y$

$x^2-x^2-14x+6x+y^2-y^2-2y+10y = 34-50$

$-8x+8y = -16 \quad \div -8$

$\Rightarrow x-y = 2$ ಇದು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಬಂಧ. **$x - y = 2$ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ.**

A ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವು AB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ

ಉದಾಹರಣೆ5: A (6, 5) ಮತ್ತು B (-4, 3) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ y - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

y – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವು $(0, y)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. P $(0, y)$ ಯು A ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. PA = PB

$(6 - 0)^2 + (5 - y)^2 = (-4 - 0)^2 + (3 - y)^2$

$36 + 5^2 + y^2 - 2(5)(y) = 16 + 3^2 + y^2 - 2(3)(y)$

$36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

$y^2 - y^2 - 10y + 6y = 25 - 61$

$-4y = -36$

$y = \frac{-36}{-4} = 9$ ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಿಂದು $(0, 9)$

$PA = \sqrt{(6 - 0)^2 + (5 - 9)^2} = \sqrt{(6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$

$PB = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (3 - 9)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1) **ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

i) (2, 3), (4, 1) ii) (-5, 7), (-1, 3) iii) (a, b), (-a, -b)

i) $(x_1, y_1) = (2, 3)$, $(x_2, y_2) = (4, 1)$

x_1	y_1	x_2	y_2
2	3	4	1

ಸೂತ್ರ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d = \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{4 + 4} = \sqrt{2 \times 4}$

$\mathbf{d = 2\sqrt{2}}$ **ಮೂಲಮಾನಗಳು**

ii) $(x_1, y_1) = (-5, 7)$, $(x_2, y_2) = (-1, 3)$

x_1	y_1	x_2	y_2
-5	7	-1	3

ಸೂತ್ರ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d = \sqrt{(-1 - [-5)^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2}$

$d = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{2 \times 16} = 4\sqrt{2}$ **ಮೂಲಮಾನಗಳು**

iii) $(x_1, y_1) = (a, b)$, $(x_2, y_2) = (-a, -b)$

x_1	y_1	x_2	y_2
a	b	-a	-b

ಸೂತ್ರ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d = \sqrt{(-a - a)^2 + (-b - b)^2}$

$d = \sqrt{(-2a)^2 + (-2b)^2}$

$d = \sqrt{4a^2 + 4b^2}$

$d = \sqrt{4(a^2 + b^2)}$

$\Rightarrow \mathbf{d = 2\sqrt{a^2 + b^2}}$ **ಮೂಲಮಾನಗಳು**

2) **(0, 0) ಮತ್ತು (36, 15) ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಿಮಗೀಗ, ವಿಭಾಗ 7.2 ರಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾದ A ಮತ್ತು B ನಗರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆ?**

$(x, y) = (36, 15)$

$d = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{36^2 + 15^2}$

$= \sqrt{1296 + 225}$

$= \sqrt{1521}$

$\Rightarrow \mathbf{d = 39}$ ಮೂಲಮಾನಗಳು

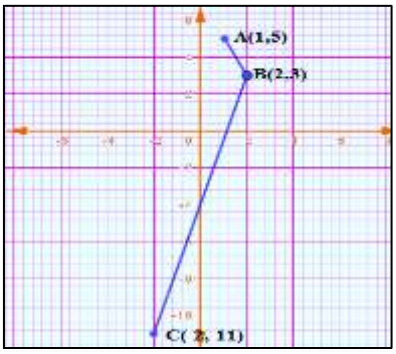
A ಮತ್ತು B ನಗರಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ನಗರ A ಯು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸುವುದಾದರೆ ನಗರ B ಯು (36,15) ರಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ನಗರಗಳ **ನಡುವಿನ ದೂರ 39 ಕಿ.ಮೀ** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

3) **(1, 5), (2, 3) ಮತ್ತು (−2, −11) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವೇ ಎಂದು ನಿರ್ಣಯಿಸಿ**

A (1, 5), B (2, 3) ಮತ್ತು C (-2, -11)

$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-5)^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{\mathbf{5}}$



$BC = \sqrt{(-2-2)^2 + (-11-3)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-14)^2}$

$= \sqrt{16+196}$

$= \sqrt{\mathbf{212}}$

$AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (-11-5)^2}$

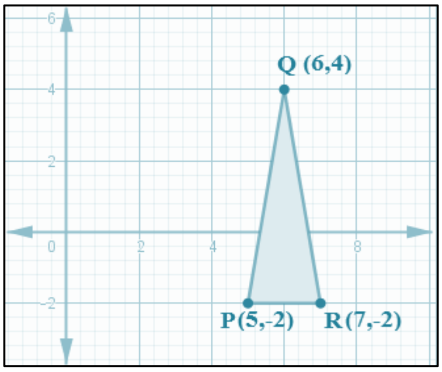
$= \sqrt{(-3)^2 + (-16)^2}$

$= \sqrt{9+256} = \sqrt{\mathbf{265}}$

$AB + BC \neq AC$ $\therefore$ **ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.**

4) **(5, −2), (6, 4) ಮತ್ತು (7, −2) ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.**

ಸೂತ್ರ $\mathbf{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$



$PQ = \sqrt{(6-5)^2 + (4-(-2))^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (6)^2}$

$= \sqrt{1+36}$

$= \sqrt{\mathbf{37}}$ --------- (i)

$QR = \sqrt{(7-6)^2 + (-2-4)^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{1+36}$

$= \sqrt{\mathbf{37}}$ ------(ii)

$PR = \sqrt{(7-5)^2 + (-2-[-2])^2}$

$= \sqrt{(2)^2 + (0)^2}$

$= \sqrt{4}$

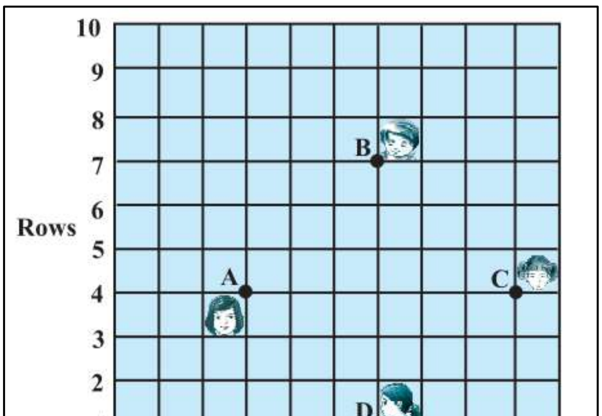
$= \mathbf{2}$ ----------------------(iii)

(i), (ii), (iii) $\Rightarrow PQ = QR$, ತ್ರಿಭುಜದ 2 ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ

$\therefore$ PQR ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ

5) **ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಮಂದಿ ಗೆಳತಿಯರು ಚಿತ್ರ 7.8 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ A, B, C ಮತ್ತು D ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿರುತ್ತಾರೆ. ಚಂಪಾ ಮತ್ತು ಚಮೇಲಿ ತರಗತಿಯೊಳಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತಾರೆ. ಕೆಲವು ನಿಮಿಷ ಅವರನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಚಂಪಾ ಚಮೇಲಿಯಲ್ಲಿ ಕೇಳುತ್ತಾಳೆ. "ABCD ಒಂದು ಚೌಕವೆಂದು ನಿನಗೆ ಅನಿಸುತ್ತಿಲ್ಲವೆ?" ಎಂದು. ಚಮೇಲಿ ಒಪ್ಪುವುದಿಲ್ಲ. ದೂರಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವರಿಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಯಾರು ಸರಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

ನಾಲ್ಕು ಮಂದಿ ಗೆಳತಿಯರು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿರುವ ಸ್ಥಾನದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು A(3,4) , B(6, 7) , C(9,4), D(6,1)



$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (7-4)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{9+8}$

$= \sqrt{18}$

$= \mathbf{3\sqrt{2}}$ -------- **(i)**

$BC = \sqrt{(9-6)^2+(4-7)^2}$

$= \sqrt{(3)^2+(-3)^2}$

$= \sqrt{9+9}$

$= \sqrt{18}$

$= \mathbf{3\sqrt{2}}$ --------**(ii)**

$CD = \sqrt{(6-9)^2+(1-4)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(-3)^2}$

$= \sqrt{9+9}$

$= \sqrt{18}$

$= 3\sqrt{2}$ -------(iii)

$DA = \sqrt{(6-3)^2+(1-4)^2}$

$= \sqrt{(3)^2+(-3)^2}$

$= \sqrt{9+9}$

$= \sqrt{18}$

$= \mathbf{3\sqrt{2}}$ ---------**(iv)**

$AB = BC = CD = DA$

ಕರ್ಣ $AC = \sqrt{(9-3)^2+(4-4)^2} = \sqrt{(6)^2+(0)^2} = \sqrt{36} = 6$ --------(v)

ಕರ್ಣ $BD = \sqrt{(6-6])^2+(7-1)^2} = \sqrt{(0)^2+(6)^2} = \sqrt{36} = 6$ --------(vi)

$\Rightarrow AC = BD$

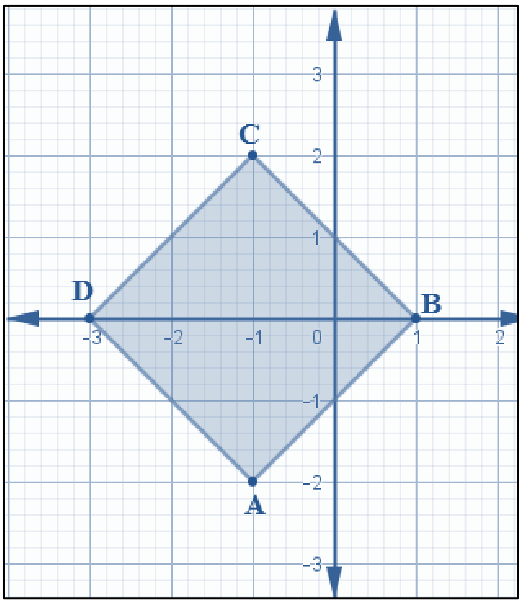
ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ $AB = BC = CD = DA$, ಕರ್ಣಗಳು ಸಮ $AC = DB$

∴ ABCD ಒಂದು ಚೌಕವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಚಂಪಾ ಹೇಳಿದ್ದು ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

6) ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಉಂಟಾಗುವುದಾದರೆ, ಉಂಟಾದ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಧವನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿ ಮತ್ತು ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

i) (-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0) ii) (-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4) iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

ಪರಿಹಾರ: i) $\mathbf{A(-1,-2)}$, $\mathbf{B(1,0)}$, $\mathbf{C(-1,2)}$, $\mathbf{D(-3,0)}$



$\mathbf{AB} = \sqrt{\left(1-(-1)\right)^2+\left(0-(-2)\right)^2}$

$= \sqrt{(1+1)^2+(0+2)^2}$

$= \sqrt{(2)^2+(2)^2}$

$= \sqrt{4+4}$

$= \sqrt{8}$

$= \sqrt{4\times 2}$

$= \mathbf{2\sqrt{2}}$

$\mathbf{BC} = \sqrt{(-1-1)^2+(2-0)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2+(2)^2}$

$= \sqrt{4+4}$

$= \sqrt{8}$

$= \sqrt{4\times 2}$

$= \mathbf{2\sqrt{2}}$

$\mathbf{CD} = \sqrt{\left(-3-(-1)\right)^2+(0-2)^2}$

$= \sqrt{(-3+1)^2+(-2)^2}$
$= \sqrt{(-2)^2+(-2)^2}$
$= \sqrt{4+4}$
$= \sqrt{8}$
$= \sqrt{4\times 2}$
$= \mathbf{2\sqrt{2}}$

DA $= \sqrt{\left(-3-(-1)\right)^2+\left(0-(-2)\right)^2}$
$= \sqrt{(-3+1)^2+(2)^2}$
$= \sqrt{4+4}$
$= \sqrt{8}$
$= \sqrt{4\times 2}$
$= \mathbf{2\sqrt{2}}$
$\Rightarrow$ **AB = BC = CD = DA**

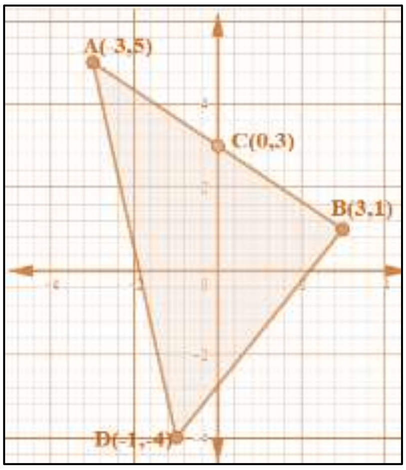
ಕರ್ಣ **AC** $= \sqrt{\left(-1-(-1)\right)^2+\left(2-(-2)\right)^2}$
$= \sqrt{(-1+1)^2+(2+2)^2}$
$= \sqrt{(0)^2+(4)^2}$
$= \sqrt{16}$
$= \mathbf{4}$

ಕರ್ಣ **BD** $= \sqrt{(-3-1)^2+(0-0)^2}$
$= \sqrt{(-4)^2+(0)^2}$
$= \sqrt{16}$
$= \mathbf{4}$

ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ (**AB = BC = CD = DA**) , ಕರ್ಣಗಳು ಸಮ (**AC = DB**)

∴ **ABCD** ಒಂದು ಚೌಕವಾಗಿದೆ.

ii) A(-3, 5), B(3, 1), C(0, 3), D(-1, -4)



AB $= \sqrt{\left(3-(-3)\right)^2+\left(1-(-3)\right)^2}$
$= \sqrt{(3+3)^2+(1+3)^2}$
$= \sqrt{(6)^2+(4)^2}$
$= \sqrt{36+16}$
$= \mathbf{\sqrt{52}}$

BC $= \sqrt{(0-3)^2+(3-1)^2}$
$= \sqrt{(-3)^2+(2)^2}$
$= \sqrt{9+4}$
$= \mathbf{\sqrt{13}}$

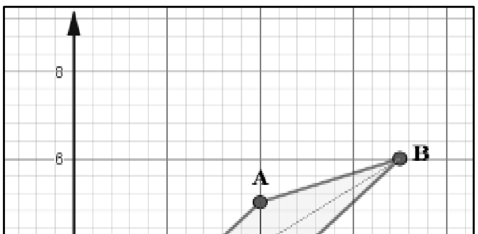
AC $= \sqrt{\left(0-(-3)\right)^2+(3-5)^2}$
$= \sqrt{(3)^2+(-2)^2}$
$= \sqrt{9+4}$
$= \mathbf{\sqrt{13}}$

AC + BC $= \mathbf{\sqrt{13}+\sqrt{13} = 2\sqrt{13} = \sqrt{52}}$ **= AB**

ಇಲ್ಲಿ **A,B,C** ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

iii) A(4, 5), B(7, 6), C(4, 3), D(1, 2)



ಸೂತ್ರ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$AB = \sqrt{(7-4)^2+(6-5)^2}$

$= \sqrt{(3)^2+(1)^2}$

$= \sqrt{9+1}$

$= \mathbf{\sqrt{10}}$

$BC = \sqrt{(4-7)^2+(3-6)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(-3)^2}$

$= \sqrt{9+9}$

$= \sqrt{18}$

$= \sqrt{9 \times 2}$

$= \mathbf{3\sqrt{2}}$

$CD = \sqrt{(1-4)^2+(2-3)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(-1)^2}$

$= \sqrt{9+1}$

$= \mathbf{\sqrt{10}}$

$DA = \sqrt{(1-4)^2+(2-5)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(-3)^2}$

$= \sqrt{9+9}$

$= \sqrt{18}$

$= \sqrt{9 \times 2}$

$= \mathbf{3\sqrt{2}}$

$\mathbf{AB = CD}$, $\mathbf{BC = DA}$

$AC = \sqrt{(4-4)^2+(3-5)^2}$

$= \sqrt{(0)^2+(-2)^2}$

$= \sqrt{0+4}$

$= \sqrt{4}$

$= \mathbf{2}$

$BD = \sqrt{(1-7)^2+(2-6)^2}$

$= \sqrt{(-6)^2+(-4)^2}$

$= \sqrt{36+16}$

$= \sqrt{52}$

$= \sqrt{4 \times 13}$

$= \mathbf{2\sqrt{13}}$

$\mathbf{AC \neq DB}$

ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ $AB = CD$, & $BC = DA$ ಕರ್ಣಗಳು ಸಮವಲ್ಲ $AC \neq DB$

∴ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

7) **(2, −5) ಮತ್ತು (−2, 9) ರಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ X − ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

X - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವು $(x, 0)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

P (x, 0) ಯು A(2, -5) ಮತ್ತು B(-2, 9) ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

AP = BP

$(x-2)^2 + (0-(-5))^2 = (x-(-2))^2 + (0-9)^2$

$(x-2)^2 + 5^2 = (x+2)^2 + (-9)^2$

$x^2 + 2^2 - 2(x)(2) + 25 = x^2 + 2^2 + 2(x)(2) + 81$

$-4x + 25 = 4x + 81$

$\Rightarrow -4x - 4x = 81 - 25$

$-8x = 56$

$\Rightarrow x = \frac{56}{-8} = -7$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಿಂದು $(-7, 0)$

8) **P (2, -3) ಮತ್ತು Q (10, y) ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 10 ಮಾನಗಳಾದರೆ, y ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

$(x_1, y_1) = (2, -3)$, $(x_2, y_2) = (10, y)$, $d = 10$

x_1	y_1	x_2	y_2
2	-3	10	y

ಸೂತ್ರ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$10 = \sqrt{(10-2)^2 + (y-(-3))^2} = \sqrt{(8)^2 + (y+3)^2}$

$10^2 = 64 + (y+3)^2 \Rightarrow 100 - 64 = (y+3)^2$

$(y+3)^2 = 36 \Rightarrow y + 3 = \pm\sqrt{36} \Rightarrow y + 3 = \pm 6$

$y = 6 - 3 = 3$ or $x = -6 - 3 = -9$

9) **Q (0, 1) ಬಿಂದುವು P (5, -3) ಮತ್ತು R (*x*, 6) ರಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, *x* ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. QR ಮತ್ತು PR ದೂರಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

Q (0, 1) ಬಿಂದುವು P (5, -3) ಮತ್ತು R (*x*, 6) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ.

PQ = QR ಆದ್ದರಿಂದ $PQ^2 = PR^2$

$PQ = \sqrt{(5-0)^2 + (-3-1)^2}$

$= \sqrt{(5)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{25 + 16}$

$= \sqrt{\mathbf{41}}$

$QR = \sqrt{(x-0)^2 + (6-1)^2}$

$= \sqrt{(x)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{\mathbf{x^2 + 25}}$

$PQ^2 = PR^2$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + 25}\right)^2$

$= \left(\sqrt{41}\right)^2$

$x^2 + 25 = 41$

$\Rightarrow x^2 = 41 - 25$

$\Rightarrow x^2 = 16$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{16}$

$\Rightarrow \mathbf{x = \pm 4}$

R ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(4, 6)$ ಅಥವಾ $(-4, 6)$

R ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (4,6) ಆದಾಗ

QR $= \sqrt{(4-0)^2 + (6-1)^2}$

$= \sqrt{(4)^2 + (5)^2} = \sqrt{16 + 25}$

$= \sqrt{\mathbf{41}}$

PR $= \sqrt{(4-5)^2 + (6-(-3))^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (6+3)^2}$

$= \sqrt{1 + 81}$

$= \sqrt{\mathbf{82}}$

R ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(-4, 6)$ ಆದಾಗ

QR $= \sqrt{(-4-0)^2 + (6-1)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{16 + 25}$

$= \sqrt{\mathbf{41}}$

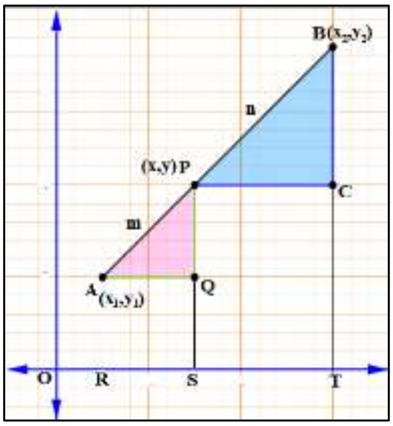
$\mathbf{PR} = \sqrt{(-4-5)^2+(6-(-3))^2}$
$= \sqrt{(-9)^2+(6+3)^2}$
$= \sqrt{81+81}$
$= \sqrt{81\times 2}$
$= \mathbf{9\sqrt{2}}$

10) **(*x*, y) ಬಿಂದುವು (3, 6) ಮತ್ತು (-3, 4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

P (*x*, y) ಬಿಂದುವು A (3, 6) ಮತ್ತು B (-3, 4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ.
PA = PB ಆದ್ದರಿಂದ $PA^2 = PB^2$
$PA = \sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}$;
$PB = \sqrt{(x-(-3))^2+(y-4)^2}$
$AP^2 = BP^2$
$\Rightarrow\left(\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-(-3))^2+(y-4)^2}\right)^2$
$(x-3)^2 + (y-6)^2 = (x+3)^2 + (y-4)^2$
$x^2+3^2-2(x)(3)+y^2+6^2-2(y)(6) = x^2+3^2+2(x)(3)+y^2+4^2-2(y)(4)$
$x^2+9-6x+y^2+36-12y = x^2+9+6x+y^2+16-8y$
$x^2-x^2-6x-6x+y^2-y^2-12y+8y = 25-45$
$-12x-4y = -20 \quad \div -4$
$\mathbf{3x+y-5=0}$ **ಇದು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಬಂಧ.**
$3x+y-5=0$ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ.
A ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವು AB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ

ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರ

$A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು P ಬಿಂದುವು m: n ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು



$$P(x,y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

P ಬಿಂದು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದಾಗ $m:n = 1:1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
P ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$P(x,y) = \left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)$$

ಉದಾಹರಣೆ 6: (4, -3) ಮತ್ತು (8, 5) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ 3 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

x_1	y_1	x_2	y_2
4	-3	8	5

$(x_1,y_1) = (4,-3), \ (x_2,y_2) = (8,5), m_1:m_2 = 3:1$
$x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2} = \frac{3(8)+1(4)}{3+1} = \frac{24+4}{4} = \frac{28}{4} = \mathbf{7}$
$y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2} = \frac{3(5)+1(-3)}{3+1} = \frac{15-3}{4} = \frac{12}{4} = \mathbf{3}$
ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಿಂದು $(7,3)$

ಉದಾಹರಣೆ7: A (-6, 10) ಮತ್ತು B (3, -8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು (-4, 6) ಬಿಂದುವು ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ?

$P(x,y) = (-4,6), \ A(x_1, y_1) = (-6,10), B(x_2, y_2) = (3,-8), m_1 = ?, m_2 = ?$
$(x,y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$

$$(-4,6) = \left(\frac{m_1(3) + m_2\ (-6)}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1(-8) + m_2\ (10)}{m_1+m_2}\right)$$

$$-4 = \frac{3m_1-6\,m_2}{m_1+m_2} \text{ ಅಥವಾ } \quad 6 = \frac{-8m_1+10\,m_2}{m_1+m_2}$$

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6\,m_2$$
$$-4m_1 - 3m_1 = -6\,m_2 + 4m_2$$
$$-7m_1 = -2m_2$$
$$\frac{m_1}{m_1} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7} \quad \Rightarrow \mathbf{m_1 : m_2 = 2 : 7}$$

ಈ ಅನುಪಾತವು $y-$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಕ್ಕೂ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶಿಲಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

$$\frac{-8m_1+10\,m_2}{m_1+m_2} = \frac{-8(2)+10\,(7)}{2+7} = \frac{-16+70}{9} = \frac{54}{9} = 6$$

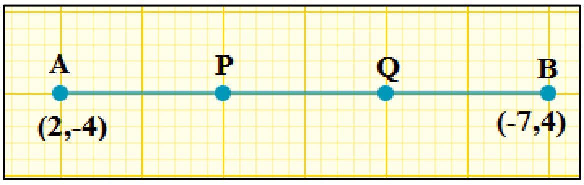
∴ $(-4, 6)$ ಬಿಂದುವು A (-6,10) ಮತ್ತು B (3,-8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 2: 7ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8: A (2, -2) ಮತ್ತು B (-7, 4) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರೈಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳ (ಅಂದರೆ, ಮೂರು ಸಮ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಬಿಂದುಗಳು) ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

P ಮತ್ತು Q ಗಳು AB ಯ ತ್ರೈಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ AP = PQ = QB

ಆದ್ದರಿಂದ P ಯು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ 1 : 2 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೂಲಕ P ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$A(x_1, y_1) = (2, -2)\,, B(x_2, y_2) = (-7, 4)$$
$$m_1 = 1, \quad m_2 = 2$$
$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$$
$$= \left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \ \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right)$$
$$= \left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3}\right) = \left(\frac{-3}{3}, \frac{0}{3}\right)$$
$$\mathbf{= (-1, 0)}$$



Q ಯು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ 2 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೂಲಕ Q ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$A(x_1, y_1) = (2, -2)\,, B(x_2, y_2) = (-7, 4)$$
$$m_1 = 2, \quad m_2 = 1$$
$$Q(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$$
$$= \left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \ \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right)$$
$$= \left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{-12}{3}, \ \frac{6}{3}\right) \mathbf{= (-4, \quad 2)}$$

ಆದ್ದರಿಂದ A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರೈಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (-1, 0) ಮತ್ತು (-4, 2)

ಉದಾಹರಣೆ 9: (5, -6) ಮತ್ತು (-1, -4) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು y - ಅಕ್ಷವು ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಛೇದಕ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$y-$ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(0, y)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅನುಪಾತವು $k : 1$ ಆಗಿರಲಿ.

$$A(x_1, y_1) = (5, -6)\,,\ B(x_2, y_2) = (-1, -4), m_1 = k, \quad m_2 = 1$$
$$(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$$
$$(0, y) = \left(\frac{k(-1) + 1(5)}{k+1}\ ,\ \frac{k(-4) + 1\ (-6)}{k+1}\right)$$
$$\Rightarrow 0 = \frac{-k+5}{k+1}$$
$$\Rightarrow -k + 5 = 0$$
$$\Rightarrow k = 5 \text{ ಅನುಪಾತವು } 5 : 1$$

$y = \frac{5(-4)+1\ (-6)}{5+1} = \frac{-20-6}{5+1} = \frac{-26}{6} = \frac{-13}{3}$

∴ **ಛೇದಕ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು** $\left(\mathbf{0},\ \frac{-13}{3}\right)$

ಉದಾಹರಣೆ 10: A (6, 1), B (8, 2), C (9, 4) ಮತ್ತು D (p, 3) ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅನುಕ್ರಮ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ, p ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ಪರಿಹಾರ: ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು = BD ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

ಮಧ್ಯಬಿಂದುನಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $= \left(\frac{x_2+x_1}{2}\ ,\ \frac{y_2+y_1}{2}\right)$

$\left(\frac{9+6}{2}\ ,\ \frac{4+1}{2}\right) = \left(\frac{p+8}{2}\ ,\ \frac{3+2}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{15}{2} = \frac{p+8}{2}$

$30 = 2p + 16$

$\Rightarrow\ 2p = 30 - 16$

$\Rightarrow\ p = \frac{14}{2} \Rightarrow \mathbf{p = 7}$

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

1) (−1, 7) ಮತ್ತು (4, −3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 2 : 3 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x_1	y_1	x_2	y_2
-1	7	4	-3

$m_1 : m_2 = 2 : 3 \quad (x_1,\ y_1) = (-1,\ 7),\ (x_2,\ y_2) = (4, -3)\ ,$

$(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$

$= \left(\frac{2(4)+3(-1)}{2+3}, \frac{2(-3)+3(7)}{2+3}\right)$

$= \left(\frac{8-3}{5}, \frac{-6+21}{5}\right)$

$= \left(\frac{5}{5},\ \ \frac{15}{5}\right) = (1, 3)$

$\mathbf{(x, y) = (1\ , 3)}$

(-1, 7) ಮತ್ತು (4, -3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 2 : 3 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (1,3)

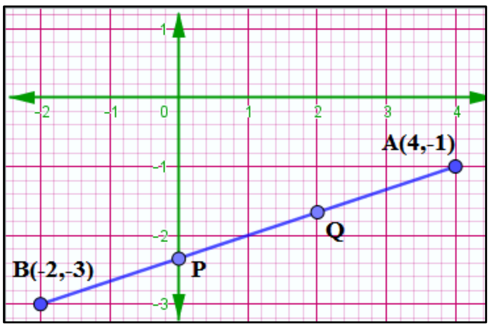
2) (4, −1) ಮತ್ತು (−2, −3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರೈಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

P ಮತ್ತು Q ಗಳು AB ಯ ತ್ರೈಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ AP = PQ = QB

x_1	y_1	x_2	y_2
-1	7	4	-3

ಆದ್ದರಿಂದ P ಯು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ 1 : 2 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೂಲಕ P ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು



$A(x_1, y_1) = (4, -1)\ ,\ \ B(x_2, y_2) = (-2, -3),$

$m_1 = 1,\quad m_2 = 2$

$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$

$= \left(\frac{1(-2)+2(4)}{1+2}, \frac{1(-3)+2(-1)}{1+2}\right)$

$= \left(\frac{-2+8}{3}, \frac{-3-2}{3}\right) = \left(\frac{6}{3},\ \ \frac{-5}{3}\right)$

$\mathbf{= \left(2,\ \ \frac{-5}{3}\right)}$

Q ಯು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ 2 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೂಲಕ

Q ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

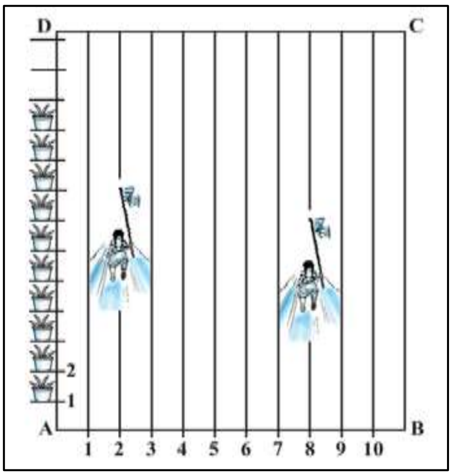
$A(x_1, y_1) = (4, -1)\ ,\ B(x_2, y_2) = (-2, -3)\ ;\ \ m_1 = 2,\quad m_2 = 1$

$Q(x,y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$

$= \left(\frac{2(-2)+1(4)}{2+1},\ \frac{2(-3)+1(-1)}{2+1}\right)$

$= \left(\frac{-4+4}{3},\frac{-6-1}{3}\right)= \left(\frac{0}{3},\ \ \frac{-7}{3}\right) = \left(\mathbf{0},\ \ \frac{-7}{3}\right)$

3) ಕ್ರೀಡಾದಿನದ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸಲು, ಆಯತಾಕಾರದ ನಿಮ್ಮ ಶಾಲಾ ಮೈದಾನ ABCD ಯಲ್ಲಿ, 1m ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಸೀಮೆಸುಣ್ಣದ ಪುಡಿಯಿಂದ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. AD ಯ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಪರಸ್ಪರ 1m ಅಂತರದಲ್ಲಿ 100 ಹೂವಿನ ಕುಂಡಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 7.12 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ನಿಹಾರಿಕಾಳು AD ಯ $\frac{1}{4}$ ರಷ್ಟು ದೂರವನ್ನು ಓಡಿ, 2ನೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹಸಿರು ಬಾವುಟವನ್ನು ನೆಡುತ್ತಾಳೆ. ಪ್ರೀತ್ AD ಯ $\frac{1}{5}$ ರಷ್ಟು ದೂರವನ್ನು 8ನೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಓಡಿ, ಕೆಂಪು ಬಾವುಟವನ್ನು ನೆಡುತ್ತಾಳೆ. ಎರಡು ಬಾವುಟಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು? ರಶ್ಮಿಯು, ಈ ಇಬ್ಬರ ಬಾವುಟಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ನೀಲಿ ಬಾವುಟವನ್ನು ನೆಡಬೇಕೆಂದಾದರೆ, ಅವಳು ತನ್ನ ಬಾವುಟವನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ನೆಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?



ನಿಹಾರಿಕಾಳು 2 ನೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಓಡಿ ಹಸಿರು ಬಾವುಟ ನೆಟ್ಟ ದೂರ $= \frac{1}{4} \times AD$

$= \frac{1}{4} \times 100\ = 25\ m$

ಪ್ರೀತ್ 8 ನೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಓಡಿ ಕೆಂಪು ಬಾವುಟ ನೆಟ್ಟ ದೂರ $= \frac{1}{5} \times AD$

$= \frac{1}{5} \times 100$

$= 20\ m$

ಹಸಿರು ಬಾವುಟದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ $= (2,25) = (x_1, y_1)$

ಕೆಂಪು ಬಾವುಟದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ $= (8,20) = (x_2, y_2)$

x_1	y_1	x_2	y_2
2	25	8	20

ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $\mathbf{d} = \sqrt{(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})^2 + (\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1})^2}$

$d = \sqrt{(8-2)^2 + (20-25)^2}$

$= \sqrt{(6)^2 + (-5)^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}\ m$

ರಶ್ಮಿಯು ಈ ಎರಡು ಬಾವುಗಟಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ನೀಲಿ ಬಾವುಟ ನೆಡುವುದಾದರೆ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$(x,y) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}\ ,\ \frac{y_2 + y_1}{2}\right) = \left(\frac{8+2}{2}\ ,\ \frac{20+25}{2}\right)$

$= \left(\frac{10}{2}\ ,\ \frac{45}{2}\right) = (\mathbf{5}\ , \mathbf{22.5})$

4) (–3, 10) ಮತ್ತು (6, –8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು (–1, 6) ರಿಂದ ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$P(x,y) = (-1,6),\ \ A(x_1,\ y_1) = (-3,10)\ ,\ B(x_2,\ y_2) = (6,-8)\ , m_1 = ?,\ \ \ m_2 = ?$

x_1	y_1	x_2	y_2
-3	10	6	-8

$(x,y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$

$(-1,6) = \left(\frac{m_1 6) + m_2\ (-3)}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1(-8) + m_2\ (10)}{m_1+m_2}\right)$

$-1 = \frac{6m_1 - 3\ m_2}{m_1+m_2}$ ಅಥವಾ $6 = \frac{-8m_1 + 10\ m_2}{m_1+m_2}$

$-m_1 - m_2 = 6m_1 - 3\ m_2$

$\Rightarrow\ -m_1 - 6m_1 = -3\ m_2 + m_2$

$\Rightarrow\ -7m_1 = -2m_2$

$\frac{m_1}{m_1} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

$\Rightarrow\ m_1 : m_2 = 2:7$ ಈ ಅನುಪಾತವು $y-$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಕ್ಕೂ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶಿಲಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

$\frac{-8m_1 + 10\ m_2}{m_1+m_2} = \frac{-8(2) + 10\ (7)}{2+7} = \frac{-16+70}{9} = \frac{54}{9} = 6$

ಆದ್ದರಿಂದ $(-4,6)$ ಬಿಂದುವು A (-6, 10) ಮತ್ತು B (3, -8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $2:7$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

5) A (1, -5) ಮತ್ತು B (-4, 5) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು *x* – ಅಕ್ಷದಿಂದ ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$x-$ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(x,0)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅನುಪಾತವು $k:1$ ಆಗಿರಲಿ.

$A(x_1,y_1) = (1,-5)$, $\quad B(x_2,y_2) = (-4,5)$ $\qquad m_1 = k, \quad m_2 = 1$

$(x,y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$

$(x,0) = \left(\frac{k(-4)+1(1)}{k+1}\ ,\ \frac{k(5)+1\ (-5)}{k+1}\right)$

$\Rightarrow\ 0 = \frac{5k-5}{k+1}$

$\Rightarrow 5k-5 = 0\ \Rightarrow 5k = 5$

$\Rightarrow k = 1$ ಅನುಪಾತವು $1:1$

$x = \frac{1(-4)+1(1)}{1+1} = \frac{-4+1}{2} = \frac{-3}{2}$

$\therefore$ **ಛೇದಕ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು** $\left(\frac{-3}{2},\ 0\right)$

6) (1, 2), (4, y), (*x*, 6) ಮತ್ತು (3, 5) ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅನುಕ್ರಮ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು = BD ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

ಮಧ್ಯಬಿಂದುನಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $= \left(\frac{x_2+x_1}{2}\ ,\ \frac{y_2+y_1}{2}\right)$

$\left(\frac{x+1}{2}\ ,\ \frac{6+2}{2}\right) = \left(\frac{3+4}{2}\ ,\ \frac{5+y}{2}\right)$

$\left(\frac{x+1}{2}\ ,\ \frac{8}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\ ,\ \frac{5+y}{2}\right)$

$\frac{x+1}{2} = \frac{7}{2}\ ,\ \frac{5+y}{2} = \frac{8}{2}$

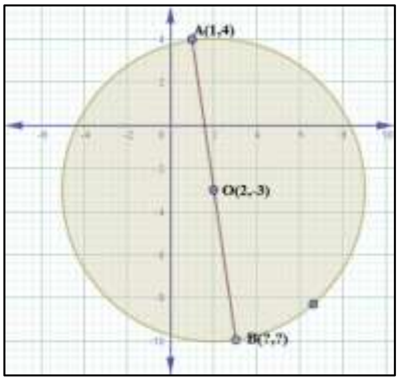
$\Rightarrow x+1 = 7,\ \ 5+y = 8$

$\Rightarrow\ x = 7-1,\ \ y = 8-5$

$\mathbf{x = 6,\ \ y = 3}$

7) AB ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ (2, -3) ಮತ್ತು B ಯು (1, 4) ಆದರೆ, A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವು ವ್ಯಾಸದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



$\therefore (x,y) = (2,-3),\ \ A(x_1,y_1) = ?\ , B(x_2,y_2) = (1,4)$

$(x,y) = \left(\frac{x_2+x_1}{2}\ ,\ \frac{y_2+y_1}{2}\right)$

$(2,-3) = \left(\frac{1+x_1}{2}\ ,\ \frac{4+y_1}{2}\right)$

$\frac{1+x_1}{2} = 2,\ \frac{4+y_1}{2} = -3$

$1\ +\ x_1 = 4,\ \ 4\ +\ y_1 = -6$

$x_1 = 4-1,\ \ y_1 = -6-4$

$x_1 = 3,\ y_1 = -10$

$\therefore$ A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(3,-10)$

8) A ಮತ್ತು B ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (-2, -2) ಮತ್ತು (2, -4) ಆಗಿದ್ದು AP = $\frac{3}{7}$ AB ಆಗುವಂತೆ ರೇಖಾಖಂಡ AB ಯ ಮೇಲೆ ಇರುವ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$AP:PB = 3:4$

P ಯು AB ಯನ್ನು 3:4 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

x_1	y_1	x_2	y_2
-2	-2	2	-4

$Q(x,y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$

$= \left(\frac{3(2)+4(-2)}{3+4},\ \ \frac{3(-4)+4(-2)}{3+4}\right)$

$= \left(\frac{6-8}{7}, \frac{-12-8}{7}\right) = \left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7}\right)$

9) A (-2, 2) ಮತ್ತು B (2, 8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 4 ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ,

x_1	y_1	x_2	y_2
-2	2	2	8

X ಬಿಂದುವು A B ಯನ್ನು 1:3 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿರುತ್ತದೆ.

X ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$

$= \left(\frac{1(2)+3(-2)}{1+3}, \frac{1(8)+3(2)}{1+3}\right)$

$= \left(\frac{2-6}{4}, \frac{8+6}{4}\right) = \left(\frac{-4}{4}, \frac{14}{4}\right) = \left(\mathbf{-1}, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\right)$

Y ಬಿಂದುವು A B ಯನ್ನು ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

Y ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(x, y) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$

$= \left(\frac{2-2}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{10}{2}\right) = (\mathbf{0}, \mathbf{5})$

Z ಬಿಂದುವು A B ಯನ್ನು 3:1 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿರುತ್ತದೆ.

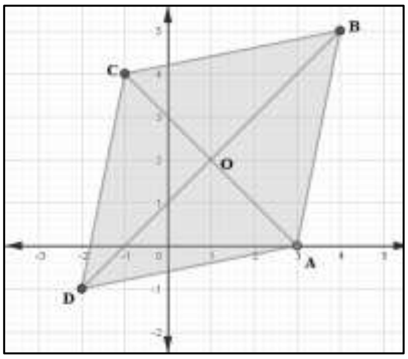
Z ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$

$= \left(\frac{3(2)+1(-2)}{3+1}, \frac{3(8)+1(2)}{3+1}\right)$

$= \left(\frac{6-2}{4}, \frac{24+2}{4}\right) = \left(\frac{4}{4}, \frac{26}{4}\right) = \left(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{2}}\right)$

10) ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಅನುಕ್ರಮ ಶೃಂಗಗಳು (3, 0), (4, 5), (–1, 4) ಮತ್ತು (–2,–1) ಆದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[ಸುಳುಹು: ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}$ (ಕರ್ಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ)]



ಕರ್ಣ $\mathbf{AC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-0)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{16 + 16}$

$= \sqrt{16 \times 2}$

$= \mathbf{4\sqrt{2}}$

ಕರ್ಣ $\mathbf{BD} = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-5)^2}$

$= \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{36 + 36}$

$= \sqrt{36 \times 2}$

$= \mathbf{6\sqrt{2}}$

ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}$

$= \frac{24(\sqrt{2})^2}{2}$

$= 12(2)$

$=$ **24 ಚದರ ಮಾನಗಳು**

****