YK ಎಸ್.ಎಸ್.ಎಲ್.ಸಿ

Yakub Koyyur
GHS nada
Belthangady taluk
D.K. – 574214
Email:
yhokkila@gmail.com

ಗಣಿತ

ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮ

ಭಾಗ –2

ಸಂಪೂರ್ಣಪರಿಹಾರ

ಹೊಸ ಪಠ್ಯ ಆಧಾರಿತ

Available in:ykoyyur.blogspot.com

ಪರಿವಿಡಿ

ಭಾಗ –1

9 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು

ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ ಅಥವಾ ಡಿಗ್ರಿ

$p(x)$ ಎಂಬುದು x ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾದರೆ, $p(x)$ ದಲ್ಲಿನ x ದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಸೂಚಿಯನ್ನು ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ನ ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ ಅಥವಾ ಡಿಗ್ರಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$4x + 2$ ಎಂಬುದು x ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 1 ಆಗಿದೆ.
ಡಿಗ್ರಿ 1 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ **ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$2y^2 - 3y + 4$ ಎಂಬುದು y ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿದೆ.
ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು **ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

x ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.
ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $a \neq 0$ ಆಗಿದೆ.

$5x^3 - 4x^2 + 2 - \sqrt{2}$ ಎಂಬುದು x ಚರಾಕ್ಷರುವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 3 ಆಗಿದೆ.
ಡಿಗ್ರಿ 3 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು **ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಒಂದು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು $ax^3 + bx^2 + cx + d$
ಇಲ್ಲಿ a, b, c, d ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಆಗಿದೆ.

[$7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ ಎಂಬುದು u ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 6 ಆಗಿದೆ.]

ಚರಾಕ್ಷರವು ಋಣಾತ್ಮಕ ಘಾತ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅಥವಾ ಅದರ ಘಾತಾಂಕವು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ: $\sqrt{x} + 1$, $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{x^3+x^2-1}$

$p(x)$ ಎಂಬುದು x ನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು k ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, $p(x)$ ನಲ್ಲಿ x ಗೆ k ಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಬೆಲೆಯನ್ನು $x = k$ ಆದಾಗ $p(x)$ ನ ಬೆಲೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು $p(k)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: $x = -1$ ಆದಾಗ $p(x) = x^2 - 3x - 4$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

$p(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 4 = 0$

ಹಾಗೆಯೇ, $p(4) = (4)2 - 3(4) - 4 = 0$

$p(-1) = 0$ ಮತ್ತು $p(4) = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, -1 ಮತ್ತು 4ನ್ನು ಎಂಬ $x^2 - 3x - 4$ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

k ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು, $p(k) = 0$ ಆದರೆ k ಯನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

k ಎಂಬುದು $p(x) = ax + b$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಯಾದರೆ, ಆಗ $p(k) = ak + b = 0$ ಅಂದರೆ $k = -\frac{b}{a}$

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax + b$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಯು $-\frac{b}{a}$

9.2 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಅರ್ಥ:

k ಎಂಬುದು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು $p(x)$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆದಾಗ $p(k) = 0$ ಆದರೆ k ಯನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯತೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಬಹಳಷ್ಟು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿವೆ.

(i) ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

ಉದಾಹರಣೆ: $y = 2x + 3$

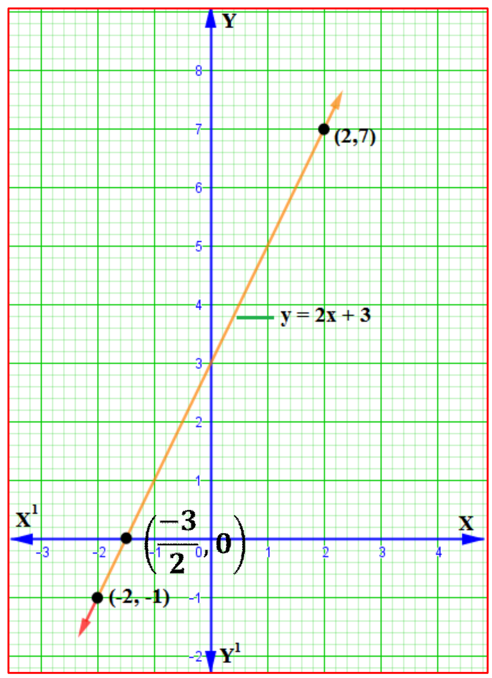
x	-2	2
y	-1	7

$y = 2x + 3$ರ ನಕ್ಷೆಯು $(-2, -1)$ ಮತ್ತು $(2, 7)$ ಈ ಬಿಂದುಗಳಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

$y = 2x + 3$ ರ ನಕ್ಷೆಯು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore \frac{-3}{2}$ ಎಂಬುವುದು $y = 2x + 3$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಯಾಗಿದೆ.

∴ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax + b$ $(a \neq 0)$ ಎಂಬುದು ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಇದು $y = ax + b$ ನಕ್ಷೆಯು x– ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ x ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

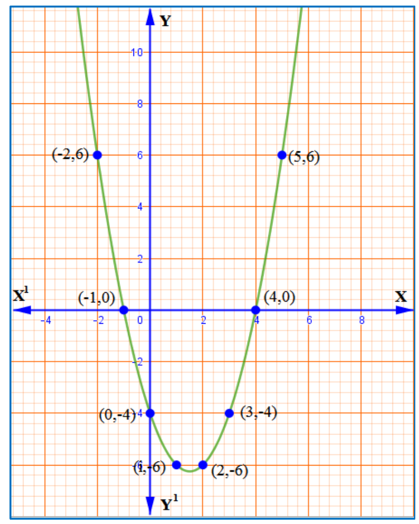


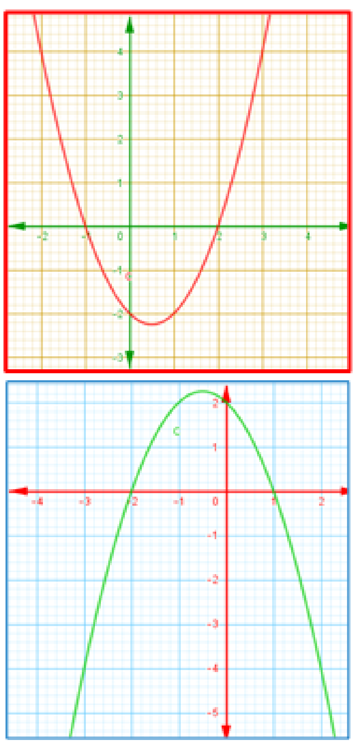
(i) ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

ಉದಾಹರಣೆ: $y = x^2 - 3x - 4$

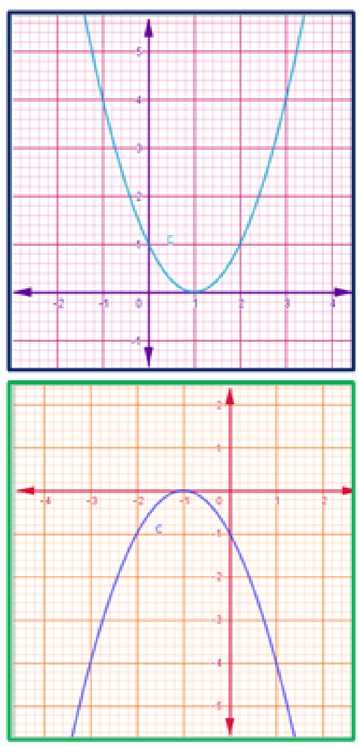
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿದಾಗ ನಾವು ವಕ್ರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿರಬಹುದು ಇಲ್ಲವೇ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿರಬಹುದು. ಅಂತಹ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪರವಲಯ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. $y = x^2 - 3x - 4$ರ ನಕ್ಷೆಯು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ x ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು –1 ಮತ್ತು 4 ಆಗಿವೆ.ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^2 - 3x - 4$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $y = x^2 - 3x - 4$ ರ ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ. ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ನಿಖರವಾಗಿಯೂ $y = ax^2 + bx + c$ ಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಪರವಲಯವು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ x - ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

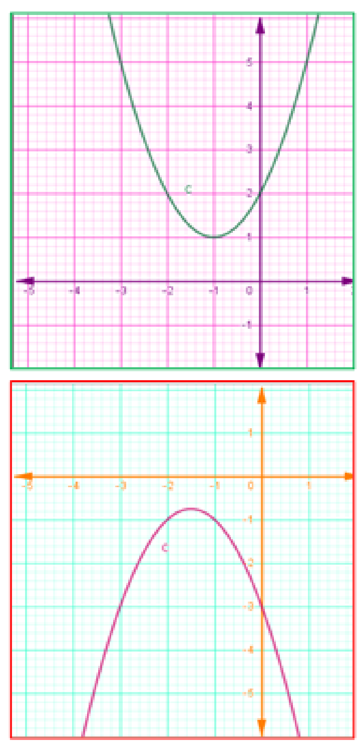




ಚಿತ್ರ 9.3



ಚಿತ್ರ 9.4



ಚಿತ್ರ 9.5

ಪ್ರಕರಣ (i): ಇಲ್ಲಿ, ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಇವು $ax^2 + bx + c$ ಯ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 9.3ನ್ನು ನೋಡಿ).

ಪ್ರಕರಣ (ii) : ಇಲ್ಲಿ, ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು.(ಚಿತ್ರ 9.4ನೋಡಿ) ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಕರಣ (i)ರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಇಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$ ಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಕರಣ (iii): ಇಲ್ಲಿ ನಕ್ಷೆಯು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ x - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ x - ಅಕ್ಷದ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅದು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ (ಚಿತ್ರ 9.5ನ್ನು ನೋಡಿ). ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$ ಯು ಯಾವುದೇ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

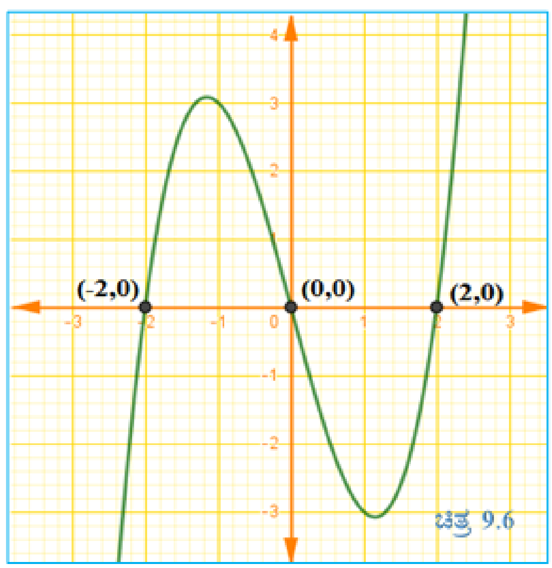
ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಎರಡು ಸಮನಾದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು (ಅಂದರೆ ಒಂದೇ ಶೂನ್ಯತೆ) ಹೊಂದಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದೇ ಇರಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಗರಿಷ್ಠ 2 ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು.

ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

ಉದಾಹರಣೆ: $y = x^3 - 4x$

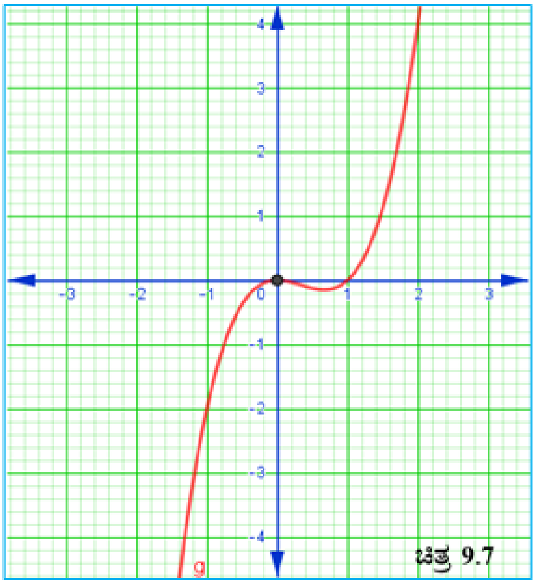
x	-2	-1	0	1	2
y	0	3	0	-3	0

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ −2, 0 ಮತ್ತು 2 ಇವು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^3 - 4x$ ದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ. −2, 0 ಮತ್ತು 2 ಇವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ $y= x^3-4x$ದ ನಕ್ಷೆಯು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ X – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ. ವಕ್ರರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಛೇದಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ x –ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಮಾತ್ರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

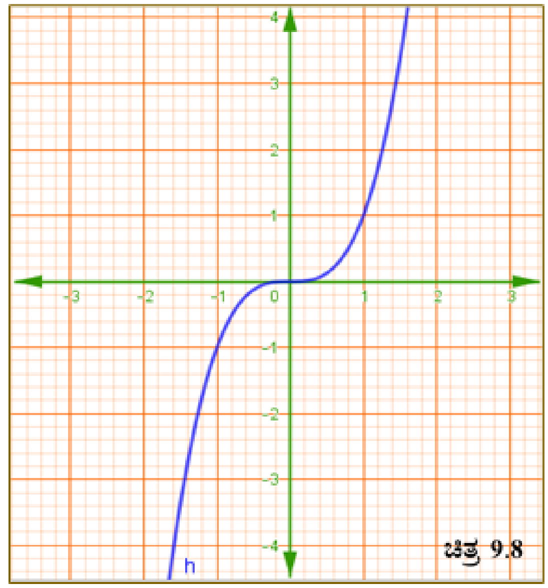


ಚಿತ್ರ 9.6

ಚಿತ್ರ 9.7ರಲ್ಲಿ $y = x^3 – x^2$ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 9.8ರಲ್ಲಿ $y = x^3$ನ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. $y = x^3$ ನ ನಕ್ಷೆಯು x –ಅಕ್ಷವನ್ನು ಏಕೈಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. $y = x^3 – x^2$ ನಕ್ಷೆಯು x –ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.



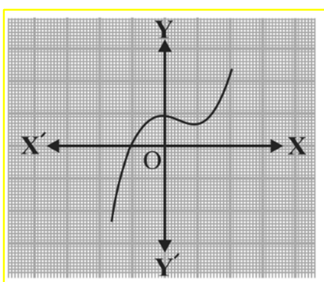
ಚಿತ್ರ 9.7



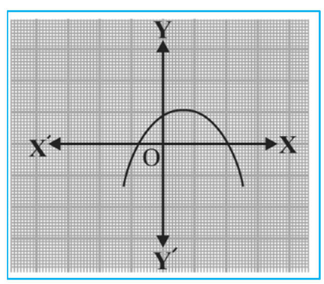
ಚಿತ್ರ 9.8

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ, ಯಾವುದೇ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಗರಿಷ್ಠ 3 ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಡಿಗ್ರಿ 3 ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಗರಿಷ್ಠ 3 ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

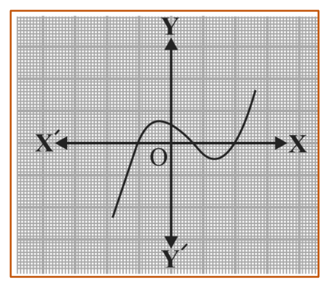
ಉದಾಹರಣೆ 1: ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಚಿತ್ರ 9.9ರಲ್ಲಿನ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಸಹ $y = p(x)$ ದ ನಕ್ಷೆಯಾಗಿದ್ದು, ಇಲ್ಲಿ $p(x)$ ಎಂಬುದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಕ್ಷೆಗೂ $p(x)$ ದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



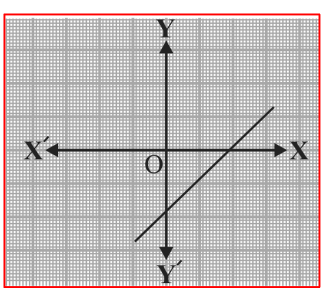
(i)



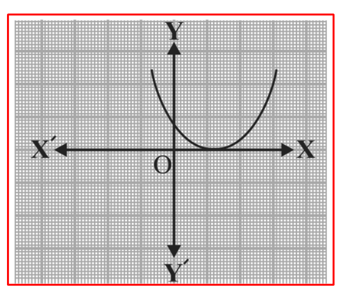
(ii)



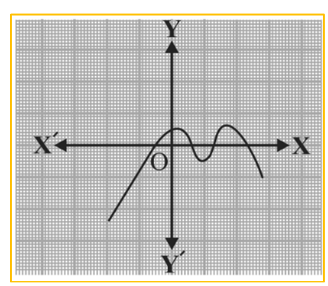
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

ಪರಿಹಾರ:

(i) ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ ಅದು ಕೇವಲ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದೆ.

(ii) ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿದೆ

(iii) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(iv) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(v) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(vi) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1. $y = p(x)$ ದ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಚಿತ್ರ 9.10ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ್ದು, ಇಲ್ಲಿ $p(x)$ ಎಂಬುದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ $p(x)$ ದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

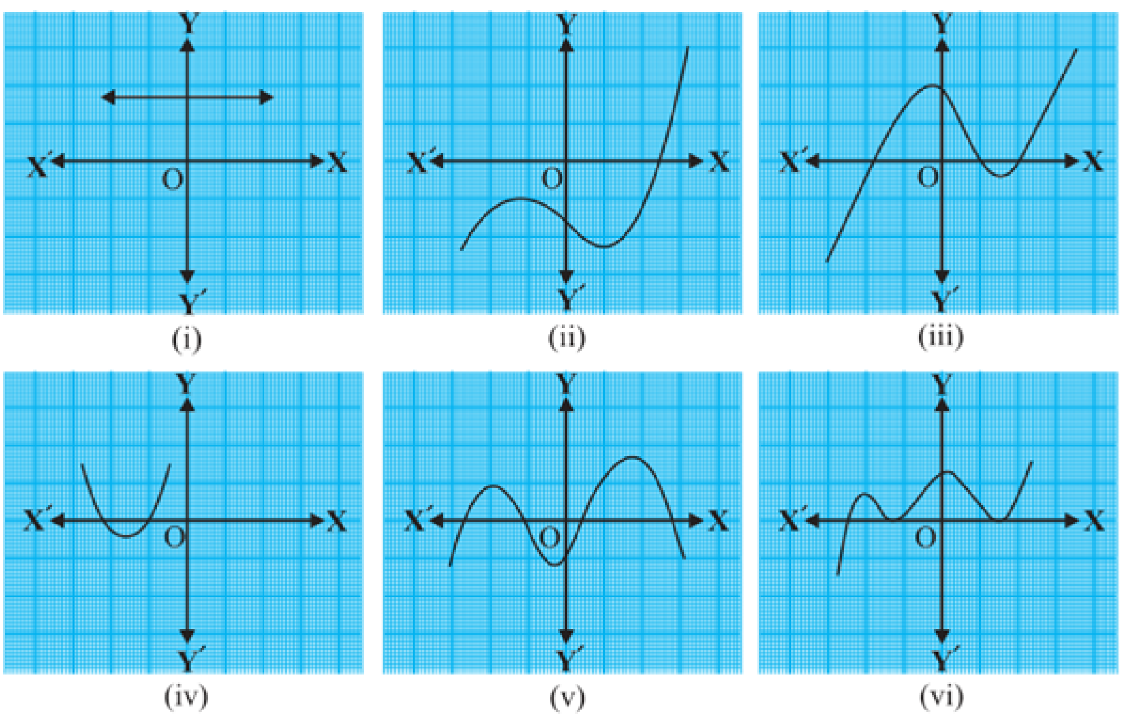


Fig. 9.10

ಪರಿಹಾರ

2. $y = p(x)$ ದ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಚಿತ್ರ 9.10ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ್ದು, ಇಲ್ಲಿ $p(x)$ ಎಂಬುದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ $p(x)$ ದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

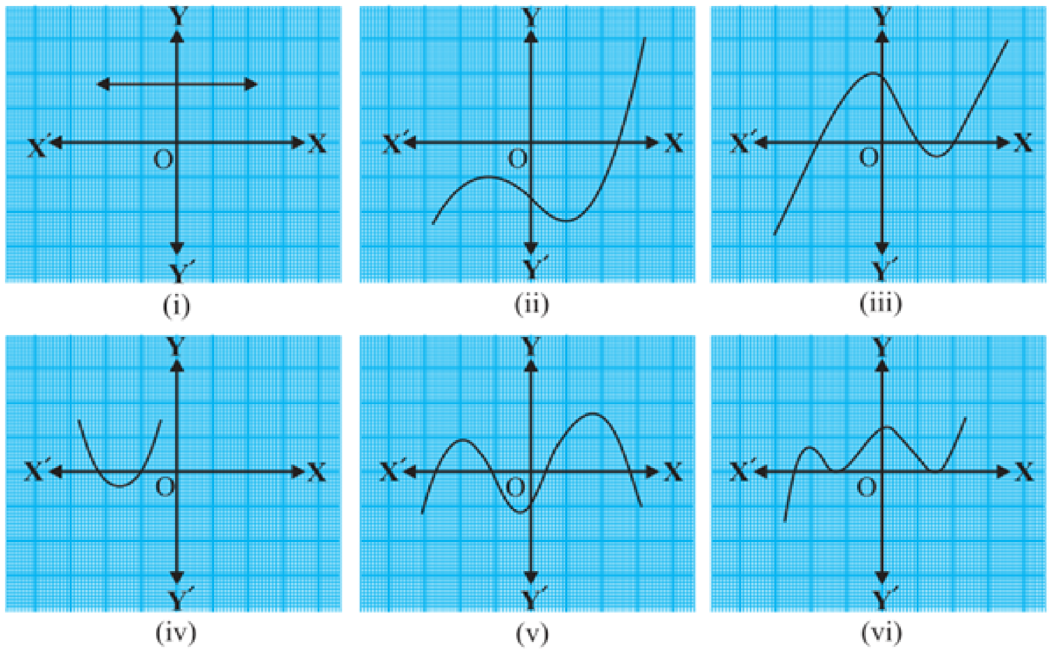


Fig. 9.10

(i) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 0 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ.
(ii) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 1 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.
(iii)ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 3 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.
(iv)ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 2 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.
(v) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 4 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.
(vi)ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 3 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

9.3. ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಹಾಗೂ ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ

α ಮತ್ತು β ಗಳು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $(x - \alpha)$ ಮತ್ತು $(x - \beta)$ ಗಳು $p(x)$ದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $\boxed{\alpha + \beta = \frac{-b}{a}}$ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $\boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$

ಉದಾಹರಣೆ 2: $x^2 + 7x + 10$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: $x^2 + 7x + 10 = x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x(x + 5) + 2(x + 5)$

$= (x + 2)(x + 5)$

$\therefore x = -2$ ಅಥವಾ $x = -5$ ಆದಾಗ $x^2 + 7x + 10$ ರ ಬೆಲೆಯು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, -2 ಮತ್ತು -5 ಇವು $x^2 + 7x + 10$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= (-2) + (-5) = -7 = \frac{-7}{1} = \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಉದಾಹರಣೆ 3: $x^2 - 3$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$\therefore x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{3}$ ಇವು $x^2 - 3$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಈಗ, ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \sqrt{3} + -\sqrt{3} = 0 = \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಹಾಗೂ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ -3 ಮತ್ತು 2 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $ax^2 + bx + c$ ಯು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ α ಮತ್ತು βಗಳು ಅದರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

$\therefore \alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a}$ ಮತ್ತು $\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 1$ ಆದರೆ, ಆಗ $b = 3$ ಮತ್ತು $c = 2$

ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $= x^2 + 3x + 2$

ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವೆ ಸಂಬಂಧ:

α, β, γ ಗಳು $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ಎಂಬ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ, ಆಗ,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}; \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}; \quad \alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.2

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s - 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

   (iv) $4u^2 - 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಹಾಗೂ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

   (iv) $1, 1$ (v) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

ಪರಿಹಾರ

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s - 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 - 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

(i) $x^2 - 2x - 8$

$= x^2 - 4x + 2x - 8$

$= (x - 4) + 2(x - 4)$

$= (x - 4)(x + 2)$

$\Rightarrow x = 4$ ಮತ್ತು $x = -2$ ಗಳು $x^2 - 2x - 8$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= 4 + (-2) = 2 = \frac{-(-2)}{1} = \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= (4))(-2) = -8 = \frac{-8}{1} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(ii) $4s^2 - 4s + 1$

$= 4s^2 - 2s - 2s + 1$

$= 2s(s - 1) - 1(2s - 1)$

$= (2s - 1)(2s - 1)$

$\Rightarrow s = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $s = \frac{1}{2}$ಗಳು $4s^2 - 4s + 1$ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \frac{-(-4)}{4} = \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(iii) $6x^2 - 3 - 7x$

$= 6x^2 - 7x - 3$

$= 6x^2 - 9x + 2x - 3$

$= 3x(2x - 3) + 1(2x - 3)$

$= (3x + 1)(2x - 3)$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು $x = \frac{3}{2}$ಗಳು $6x^2 - 3 - 7x$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} = 1 = \frac{-2+9}{6} = \frac{7}{6} = \frac{-(-7)}{6}\ \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{-3}{6} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(iv) $4u^2 + 8u$

$= 4u^2 + 8u + 0$

$= 4u(u + 2)$

$\Rightarrow u = 0$ ಮತ್ತು $u = -2$ ಗಳು $4u^2 + 8u$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= 0 + (-2) = -2 = \frac{-(8)}{4} = \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 0 \times -2 = 0 = \frac{0}{4} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(v) $t^2 - 15$

$= t^2 - 0.t - 15$

$= (t - \sqrt{15})(t + \sqrt{15})$

$\Rightarrow t = \sqrt{15}$ ಮತ್ತು $t = -\sqrt{15}$ ಗಳು $t^2 - 15$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ = $\sqrt{15}$ + (-$\sqrt{15}$) = 0 = $\frac{0}{1}$ = $\frac{-\text{x ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $\sqrt{15}$ x (-$\sqrt{15}$)= -15 = $\frac{-15}{1}$ = $\frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(vi) $3x^2 - x - 4$

$= 3x^2 - 4x + 3x - 4$

$= x(3x - 4)+1(3x - 4)$

$= (3x - 4)(x + 1)$

$\Rightarrow x = \frac{4}{3}$ ಮತ್ತು $x = -1$ ಗಳು $3x^2 - x - 4$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ = $\frac{4}{3}$ + (-1) = $\frac{4-3}{3}$ = $\frac{1}{3}$ = $\frac{-(-1)}{3}$ $\frac{-\text{x ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $\frac{4}{3}$ + (-1) = -$\frac{4}{3}$ = $\frac{-4}{1}$ = $\frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಹಾಗೂ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\frac{1}{4}$, -1 (ii) $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ (iii) 0, $\sqrt{5}$

(iv) 1, 1 (v) $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ (vi) 4, 1

(i) $\frac{1}{4}$, -1

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು ß ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + ß = \frac{1}{4} = \frac{-(-1)}{4} = \frac{-b}{a}$

$\alpha ß = -1 = \frac{-4}{4} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 4, b = -1$ ಮತ್ತು $c = -4$

∴ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $4x^2 - x - 4$

(ii) $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು ß ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + ß = \sqrt{2} = \frac{-(3\sqrt{2})}{3} = \frac{-b}{a}$

$\alpha ß = \frac{1}{3} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 3, b = -3\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $c = 1$

∴ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $3x^2 - 3\sqrt{2} + 1$

(iii) 0, $\sqrt{5}$

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು ß ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + ß = 0 = \frac{0}{4} = \frac{-b}{a}$

$\alpha ß = \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 1, b = 0$ ಮತ್ತು $c = \sqrt{5}$

∴ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^2 + \sqrt{5}$

(iv) 1, 1

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು ß ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + \beta = 1 = \frac{-(-1)}{1} = \frac{-b}{a}$

$\alpha\beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 1, b = -1$ ಮತ್ತು $c = 1$

$\therefore$ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^2 - x + 1$

(v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + \beta = -\frac{1}{4} = \frac{-1}{4} = \frac{-b}{a}$

$\alpha\beta = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 4, b = 1$ ಮತ್ತು $c = 1$

$\therefore$ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $4x^2 + x + 1$

(vi) 4,1

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + \beta = 4 = \frac{-(-4)}{1} = \frac{-b}{a}$

$\alpha\beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 1, b = -4$ ಮತ್ತು $c = 1$

$\therefore$ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^2 - 4x + 1$

9.4 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿ

$x^3 - 3x^2 - x + 3$ ಇದರ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯು 1 ಆದರೆ, ಅದರ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವು $(x - 1)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ನ್ನು $(x - 1)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ $x^2 - 2x - 3$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ, $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು $= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು 1, –1 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: $2x^2 + 3x + 1$ ನ್ನು $x + 2$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾದಾಗ ಅಥವಾ ಶೇಷದ ಡಿಗ್ರಿಯು ಭಾಜಕದ ಡಿಗ್ರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಆದಾಗ ನಾವು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $(2x - 1)$ ಮತ್ತು ಶೇಷವು 3 ಆಗಿದೆ.

$x + 2$	$2x^2 + 3x + 1$	$2x - 1$
	$2x^2 + 4x$	
	$- x + 1$	
	$- x - 2$	
	$+ 3$	

$(2x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 3x - 2 + 3$

$= 2x^2 + 3x + 1$

⇒ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ x ಭಾಗಲಬ್ಧ + ಶೇಷ

ಉದಾಹರಣೆ 7: $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ನ್ನು $1 + 2x + x^2$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

$1 + 2x + x^2$	$3x^3 + x^2 + 2x + 5$	$3x - 5$
	$3x^3 + 6x^2 + 3x$	
	$-5x^2 - x + 5$ $-5x^2 - 10x - 5$	
	$9x + 10$	

ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಭಾಜಕದ ಪದಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಡಿಗ್ರಿಯ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪದಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ ಬರೆಯುವುದನ್ನು, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ

$(x^2 + 2x + 1)(3x - 5) + (9x + 10) = 3x^3 + x^2 + 2x + 5$

$\Rightarrow$ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ x ಭಾಗಲಬ್ಧ + ಶೇಷ

$p(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿದ್ದು, $g(x) \neq 0$ ಆದಾಗ

$$\boxed{p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)}$$

$q(x)$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು $r(x)$ ಶೇಷ

ಇಲ್ಲಿ $r(x) = 0$ ಅಥವಾ $r(x)$ ದ ಡಿಗ್ರಿ < $g(x)$ ದ ಡಿಗ್ರಿ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8: $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ ನ್ನು $x - 1 - x^2$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಡೆಸಲು, ಮೊದಲು ನಾವು ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಭಾಜಕಗಳೆರಡನ್ನೂ ಅವುಗಳ ಡಿಗ್ರಿಯ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮ ದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ,

ಭಾಜ್ಯ = $-x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ ಮತ್ತು

ಭಾಜಕ = $-x^2 + x - 1$.

$-x^2 + x - 1$	$-x^3 + 3x^2 - 3x + 5$	$x - 2$
	$-x3 + x^2 - x$	
	$2x^2 - 2x + 5$ $2x^2 - 2x + 2$	
	3	

$\therefore$ ಭಾಗಲಬ್ಧ $= x - 2$, ಶೇಷ $= 3$

ಭಾಜಕ x ಭಾಗಲಬ್ಧ + ಶೇಷ $= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$

$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

= ಭಾಜ್ಯಈ ರೀತಿ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9: $\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{2}$ ಇವು $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ ರ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ, ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{2}$ ಇವು ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$(x - 2)(x + 2) = x^2 - 2$ ಇದು ದತ್ತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಈಗ ದತ್ತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನಾವು $x^2 - 2$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

$x^2 - 2$	$2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$	$2x^2 - 3x + 1$
	$-2x^4 + 4x^2$	
	$-3x^3 + x^2 + 6x - 2$ $-3x^3 + 6x$	
	$+ x^2 - 2$ $+ x^2 - 2$	
	0	

ಭಾಗಲಬ್ಧ = $2x^2 - 3x + 1$

ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ,

$2x^2 - 2x - x + 1$

$= 2x(x - 1) - 1(2x - 1)$

$= (2x - 1)(x - 1)$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = 1$ ಇವು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

$\therefore \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{2},$ ಮತ್ತು 1 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ p(x) ನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ g(x) ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ $g(x) = x^2 - 2$
   (ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ $g(x) = x^2 + 1 - x$
   (iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6$ $g(x) = 2 - x^2$
2. ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಹಾಗೂ ಮೊದಲನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

   (i) $t^2 - 3$ $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$
   (ii) $x^2 + 3x + 1$ $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$
   (iii) $x^3 - 3x + 1$ $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$
3. $\sqrt{\frac{5}{3}}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ ಇವು $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ ರ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ನ್ನು g(x) ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $x - 2$ ಮತ್ತು $-2x + 4$ ಆದರೆ g(x) ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವ p(x), g(x), q(x) ಮತ್ತು r(x) ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.

   (i) p(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ = q(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ
   (ii) g(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ = r(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ
   (iii) r(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ = 0

ಪರಿಹಾರ

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ p(x) ನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ g(x) ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ $g(x) = x^2 - 2$
(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ $g(x) = x^2 + 1 - x$
(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6$ $g(x) = 2 - x^2$

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ $g(x) = x^2 - 2$

$x^2 - 2$	$x^3 - 3x^2 + 5x - 3$	$x - 3$
	$x^3 - 0 - 2x$	
	$-3x^2 + 7x - 3$	
	$-3x^2 + 0 + 6$	
	$+7x - 9$	

ಭಾಗಲಬ್ಧ = $x - 3$ ಮತ್ತು ಶೇಷ = $7x - 9$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ $g(x) = x^2 + 1 - x$

$x^2 - x + 1$	$x^4 + 0.x^3 - 3x^2 + 4x + 5$	$x^2 + x - 3$
	$x^4 - x^3 + x^2$	
	$x^3 - 4x^2 + 4x$	
	$x^3 - x^2 + x$	
	$- 3x^2 + 3x + 5$	
	$- 3x^2 + 3x - 3$	
	8	

ಭಾಗಲಬ್ಧ = $x^2 + x - 3$ ಮತ್ತು ಶೇಷ = 8

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6$ $g(x) = 2 - x^2$

$- x^2 + 2$	$x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 5x + 6$	$-x^2 - 2$
	$x^4 + 0 - 2x^2$	
	$2x^2 - 5x + 6$	
	$2x^2 + 0 - 4$	
	$- 5x + 10$	

2. ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಹಾಗೂ ಮೊದಲನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $t^2 - 3$ $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$
(ii) $x^2 + 3x + 1$ $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$
(iii) $x^3 - 3x + 1$ $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

(i) $t^2 - 3$ $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

$t^2 - 3$	$2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$	$2t^2 + 3t + 4$
	$2t^4 + 0 - 6t^2$	
	$+ 3t^3 + 4t^2 - 9t$	
	$+ 3t^3 + 0 - 9t$	
	$+4t^2 + 0 - 12$	
	$+4t^2 + 0 - 12$	
	0	

ಶೇಷವು 0 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ

(ii) $x^2 + 3x + 1$ $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

$x^2 + 3x + 1$	$3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$	$3x^2 - 4x + 2$
	$3x^4 + 9x^3 + 3x^2$	
	$- 4x^3 - 10x^2 + 2x$	
	$- 4x^3 - 12x^2 - 4x$	
	$+2x^2 + 6x + 2$	
	$+2x^2 + 6x + 2$	
	0	

ಶೇಷವು 0 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ

(iii) $x^3 - 3x + 1$ $\quad x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

$x^3 - 3x + 1$	$x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$	$x^2 - 1$
	$x^5 - 3x^3 + x^2$	
	$- x^3 + 0 + 3x + 1$	
	$- x^3 + 0 + 3x - 1$	
	2	

ಶೇಷವು 2 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

3. $\sqrt{\frac{5}{3}}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ ಇವು $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ ರ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\sqrt{\frac{5}{3}}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ ಇವು $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ ರ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

$\therefore \left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ ಮತ್ತು $\left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ ಗಳು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿವೆ.

$\Rightarrow \left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right) = x^2 - \frac{5}{3}$ ನಿಂದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$x^2 - \frac{5}{3}$	$3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$	$3x^2 + 6x + 3$
	$3x^4 + 0 - 5x^2$	
	$+ 6x^3 + 3x^2 - 10x$	
	$+ 6x^3 + 0 - 10x$	
	$+3x^2 + 0 - 5$	
	$+3x^2 + 0 - 5$	
	0	

$3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1)$

$(x^2 + 2x + 1)$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ,

$= x^2 + x + x + 1$

$= x(x + 1) + 1(x + 1)$

$= (x + 1)(x + 1)$

$\Rightarrow 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು $3\left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)(x + 1)(x + 1)$

ಆದ್ದರಿಂದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $\sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}, -1$ ಮತ್ತು -1

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ನ್ನು $g(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $x - 2$ ಮತ್ತು $-2x + 4$ ಆದರೆ $g(x)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಭಾಜ್ಯ $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$

ಭಾಜಕ $g(x) = ?$

ಭಾಗಲಬ್ಧ $q(x) = x - 2$

ಶೇಷ $r(x) = -2x + 4$

$P(x) = g(x).q(x) + r(x)$

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = g(x).(x - 2) + (-2x + 4)$
$\Rightarrow g(x).(x - 2) = x^3 - 3x^2 + x + 2 - (-2x + 4)$
$\Rightarrow g(x).(x - 2) = x^3 - 3x^2 + x + 2 + 2x - 4$
$\Rightarrow g(x).(x - 2) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$
$\Rightarrow g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{x - 2}$

$x - 2$	$x^3 - 3x^2 + 3x - 2$	$x^2 - x + 1$
	$x^3 - 2x^2$	
	$-x^2 + 3x$	
	$-x^2 + 2x$	
	$+x - 2$	
	$+x - 2$	
	0	

$\therefore g(x) = x^2 - x + 1$

5. **ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವ p(x), g(x), q(x) ಮತ್ತು r(x) ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.**

(i) p(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ = q(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ

(ii) g(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ = r(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ

(iii) r(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ = 0

(i) $p(x) = 6x^2 + 2x + 2$

$g(x) = 2$
$q(x) = 3x^2 + x + 1$
$r(x) = 0$
$\Rightarrow$ p(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ = q(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ = 2
ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ,
$g(x) \times q(x) + r(x) = 2(3x^2 + x + 1) + 0$
$g(x) \times q(x) + r(x) = 6x^2 + 2x + 2 = P(x)$
$\Rightarrow p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$
$\therefore$ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.

(ii) $p(x) = x^3 + x$

$g(x) = x^2$
$q(x) = x$ ಮತ್ತು $r(x) = x$
g(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ = r(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ = 1
ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ,
$g(x) \times q(x) + r(x) = (x^2) \times x + x$
$g(x) \times q(x) + r(x) = x^3 + x = p(x)$
$\Rightarrow p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$
$\therefore$ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.

(iii) $p(x) = x^3 + 1$

$g(x) = x^2$
$q(x) = x$ ಮತ್ತು $r(x) = 1$
r(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ = 0
ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ,

$g(x) \times q(x) + r(x) = (x^2) \times x + 1$
$\Rightarrow g(x) \times q(x) + r(x) = x^3 + 1 = P(x)$
$\Rightarrow p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$
$\therefore$ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.

ಸಾರಾಂಶ:

1. ಡಿಗ್ರಿ 1, 2 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ, ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
2. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ, x ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ a, b,c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $a \neq 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
3. ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ನಿಖರವಾಗಿ $y = p(x)$ ದ ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ x - ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.
4. ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಗರಿಷ್ಠ 2 ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತುಒಂದು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಗರಿಷ್ಠ 3 ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು.
5. α ಮತ್ತು β ಗಳು $ax^2 + bx + c$ ಎಂಬ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ, ಆಗ
$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ ಮತ್ತು $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
6. α, β ಮತ್ತು γ ಗಳು $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ಎಂಬ ಒಂದು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ, ಆಗ

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$
$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

7. ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯ ಹೇಳಿಕೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ. ಯಾವುದೇ ದತ್ತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ಹಾಗೂ ಯಾವುದೇ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $g(x)$ ಗಳಿಗೆ
$p(x) = g(x).\ q(x) + r(x)$ ಆಗುವಂತೆ $q(x)$ ಮತ್ತು $r(x)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ $r(x) = 0$ ಅಥವಾ $r(x)$ ದ ಡಿಗ್ರಿ $<$ $g(x)$ ದ ಡಿಗ್ರಿ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

10 ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಕರಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. $p(x)$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆದರೆ $p(x) = 0$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಆಗುತ್ತದೆ.

$p(x) = 0$ ರೂಪದ, $p(x)$ ಎಂಬುದು ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ 2 ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶರೂಪ:

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0\,,}$ $a \neq 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಲಕ್ಷಣಗಳೆಂದರೆ,

- ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
- ಚರಾಕ್ಷರದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತ 2 ನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.
- ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪ $ax^2 + bx + c = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
  ಇಲ್ಲಿ a ಯು x^2 ನ ಸಹಗುಣಕ, b ಯು x ನ ಸಹಗುಣಕ, c ಯು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದೆ.
  ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
- ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರದ ಘಾತಗಳು ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮಿಶ್ರ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ : ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ $ax^2 + bx + c = 0$ ದಲ್ಲಿ $a \neq 0,\ b \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಮಿಶ್ರ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $x^2 - 3x - 5 = 0$, $x^2 + 5x + 6 = 0$, $x + \frac{1}{x} = 5$, $(2x - 5)^2 = 81$

ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ : ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಚರಾಕ್ಷರವು 2 ನೇ ಘಾತದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಕಂಡುಬಂದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುವರು.

ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪ: $ax^2 + c = 0\ [a \neq 0]$

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

(i) ಜಾನ್ ಮತ್ತು ಜೀವಂತಿ ಇವರಿಬ್ಬರ ಬಳಿ ಇರುವ ಒಟ್ಟು ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 45 ಆಗಿದೆ. ಇವರಿಬ್ಬರೂ ತಲಾ 5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡರೆ ಇವರ ಬಳಿ ಇರುವ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 124 ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಅವರ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಒಂದು ಗುಡಿ ಕೈಗಾರಿಕೆಯು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆಟಿಕೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಆಟಿಕೆಯ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು, (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) 55ರಿಂದ, ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸಿದ ಆಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿನದಲ್ಲಿ, ಆಟಿಕೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಒತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು ರೂ750 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆ ದಿನ ಉತ್ಪಾದಿಸಿದ ಆಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

ಪರಿಹಾರ :

(i) ಜಾನ್‌ನ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು x ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ ಜೀವಂತಿಯ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 45 – x [∵ಅವರಿಬ್ಬರ ಬಳಿ ಇರುವ ಒಟ್ಟು ಗೋಲಿಗಳು 45]

5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಜಾನ್‌ನ ಬಳಿ ಉಳಿದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = x – 5

5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಜೀವಂತಿಯ ಬಳಿ ಉಳಿದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 45 – x – 5 = 40 – x

∴ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = 124

$(x - 5)(40 - x) = 124$

$\Rightarrow 40x - x^2 - 200 + 5x = 124$

$\Rightarrow -x^2 + 45x - 200 = 124$

$\Rightarrow -x^2 + 45x - 324 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 45x + 324 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಜಾನ್‌ನ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $x^2 - 45x + 324 = 0$ ಯನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಗಣಿತೀಯ ರೂಪವಾಗಿದೆ.

(ii) ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಆಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗಿರಲಿ

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ದಿನದ ಪ್ರತಿ ಆಟಿಕೆಯ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) = 55 – x ಆದ್ದರಿಂದ,

ಆ ದಿನದ ಒಟ್ಟು ಆಟಿಕೆಗಳ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) = x (55 – x)

∴ $x(55 - x) = 750$

$\Rightarrow 55x - x^2 = 750$

$\Rightarrow -x^2 + 55x - 750 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 55x + 750 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಆಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $x^2 - 55x - 750 = 0$ ಯನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಗಣಿತೀಯ ರೂಪವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

(iii) $x(2x + 3) = x^2 + 1$ (iv) $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

(i) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$

$x^2 - 4x + 4 + 1 = 2x - 3$

$x^2 - 4x - 2x + 5 + 3 = 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(ii) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

$x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$x^2 - x^2 + x + 8 + 4 = 0$

$x + 12 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.

(iii) $x(2x + 3) = x^2 + 1$

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$

$2x^2 - x^2 + 3x - 1 = 0$

$x^2 + 3x - 1 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(iv) $(x+2)^3 = x^3 - 4$

$x^3 + 2^3 + 3(x)(2)^2 + 3x^2(2) = x^3 - 4$
$x^3 + 8 + 12x + 6x^2 = x^3 - 4$
$x^3 - x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 4 = 0$
$6x^2 + 12x + 12 = 0 \div 6$
$x^2 + 2x + 2 = 0$
ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$ (ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$
(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$ (iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$
(v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ (vi) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$
(vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ (viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

(i) ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ನಿವೇಶನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $528m^2$ ಆಗಿದೆ. ನಿವೇಶನದ ಉದ್ದವು (ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ) ಅದರ ಅಗಲದ ಎರಡಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಆ ನಿವೇಶನದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

(ii) ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 306 ಆಗಿದೆ. ನಾವು ಆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

(iii) ರೋಹನನ ತಾಯಿಯು ಅವನಿಗಿಂತ 26 ವರ್ಷ ದೊಡ್ಡವಳಾಗಿದ್ದಾಳೆ. 3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) ಗುಣಲಬ್ಧವು 360 ಆಗುತ್ತದೆ. ನಾವು ರೋಹನನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

(iv) ಒಂದು ರೈಲು ಏಕರೂಪದ ಜವದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿ, 480km ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಜವವು 8km/h ಕಡಿಮೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅಷ್ಟೇ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ರೈಲು 3 ಘಂಟೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿತ್ತು. ನಾವು ರೈಲಿನ ಜವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

ಪರಿಹಾರ

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$ (ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$
(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$ (iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$
(v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ (vi) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$
(vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ (viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$

$x^2 + 2x + 1 = 2x - 6$
$x^2 + 2x - 2x + 1 + 6 = 0$
$x^2 + 7 = 0$
ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

$x^2 - 2x = -6 + 2x$

$x^2 - 2x - 2x + 6 = 0$

$x^2 - 4x + 6 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$

$x^2 + x - 2x - 2 = x^2 + 3x - x - 3$

$x^2 - x - 2 = x^2 + 2x - 3$

$x^2 - x^2 - x - 2x - 2 + 3 = 0$

$-3x + 3 = 0 \times -1$

$3x - 1 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.

(iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

$2x^2 + x - 6x - 3 = x^2 + 5x$

$2x^2 - 5x - 3 = x^2 + 5x$

$2x^2 - x^2 - 5x - 5x - 3 = 0$

$x^2 - 10x - 3 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(v) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$

$2x^2 - 6x - x + 3 = x^2 - x + 5x - 5$

$2x^2 - 7x + 3 = x^2 + 4x - 5$

$2x^2 - x^2 - 7x - 4x + 3 + 5 = 0$

$x^2 - 11x + 8 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

$x^2 + 3x + 1 = x^2 - 2(x)(2) + 2^2$

$x^2 - x^2 + 3x + 4x + 1 - 4 = 0$

$7x - 3 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.

(vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

$x^3 + 2^3 + 3(x)(2)^2 + 3x^2(2) = 2x^3 - 2x$

$x^3 + 8 + 12x + 6x^2 = 2x^3 - 2x$

$x^3 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 2x + 8 = 0$

$-x^3 + 6x^2 + 14x + 8 = 0 \times -1$

$x^3 - 6x^2 - 14x - 8 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.

(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

$x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 2^3 + 3(x)(2)^2 - 3x^2(2)$
$x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 8 + 12x - 6x^2$ ೞ
$x^3 - x^3 - 4x^2 + 6x^2 - x - 12x + 1 + 8 = 0$
$2x^2 - 13x + 9 = 0$
ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

2. **ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.**

(i) ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ನಿವೇಶನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $528m^2$ ಆಗಿದೆ. ನಿವೇಶನದ ಉದ್ದವು (ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ) ಅದರ ಅಗಲದ ಎರಡಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಆ ನಿವೇಶನದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಅಗಲ $b = x$ m ಆಗಿರಲಿ
$\Rightarrow$ ಉದ್ದ $l = (2x + 1)$m
ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= l \times b$
$\Rightarrow 528 = x(2x + 1)$
$\Rightarrow 528 = 2x^2 + x$
$\Rightarrow 2x^2 + x - 528 = 0$

(ii) ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 306 ಆಗಿದೆ. ನಾವು ಆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು x ಮತ್ತು $(x + 1)$ ಆಗಿರಲಿ.
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ದ $= 306$
$\Rightarrow x(x + 1) = 306$
$\Rightarrow x^2 + x - 306 = 0$

(iii) ರೋಹನನ ತಾಯಿಯು ಅವನಿಗಿಂತ 26 ವರ್ಷ ದೊಡ್ಡವಳಾಗಿದ್ದಾಳೆ. 3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) ಗುಣಲಬ್ಧವು 360 ಆಗುತ್ತದೆ. ನಾವು ರೋಹನನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

ರೋಹನ್‌ನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು $= x$ ಆಗಿರಲಿ
ತಾಯಿಯ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು $= x + 26$
3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ
ರೋಹನ್‌ನ ವಯಸ್ಸು $= x + 3$
ತಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸು $= x + 26 + 3 = x + 29$
3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣಲಬ್ದ $= 360$
$\therefore (x + 3)(x + 29) = 360$
$x^2 + 29x + 3x + 87 = 360$
$x^2 + 32x - 273 = 0$

(iv) ಒಂದು ರೈಲು ಏಕರೂಪದ ಜವದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿ, 480km ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಜವವು 8km/h ಕಡಿಮೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅಷ್ಟೇ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ರೈಲು 3 ಘಂಟೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿತ್ತು. ನಾವು ರೈಲಿನ ಜವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

ರೈಲಿನ ಜವ $= x\ km/h$ ಆಗಿರಲಿ.
$480\ km$ ಚಲಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲ $= \frac{480}{x}\ hrs$
8 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ಚಲಿಸಿದಾಗ ರೈಲಿನ ಜವ $= (x - 8)km/h$
$480\ km$ ಚಲಿಸಲು 3 ಘಂಟೆ ಜಾಸ್ತಿಯಾದ್ದರಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲ $= \left(\frac{480}{x} + 3\right) hrs$
ರೈಲಿನ ಜವ $= x\ km/h$ ಆಗಿರಲಿ.

$480\,km$ ಚಲಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲ $= \frac{480}{x}\,hrs$

8 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ಚಲಿಸಿದಾಗ ರೈಲಿನ ಜವ $= (x-8)km/h$

$480\,km$ ಚಲಿಸಲು 3 ಘಂಟೆ ಜಾಸ್ತಿಯಾದ್ದರಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲ $= \frac{480}{x-8}\,hrs$

$\Rightarrow \frac{480}{x} + 3 = \frac{480}{x-8}$

$\Rightarrow 480(x-8) + 3x(x-8) = 480x$

$\Rightarrow 480x - 3840 + 3x^2 - 24x = 480x$

$\Rightarrow 3840 + 3x^2 - 24x = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 24x + 3840 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 1280 = 0$

10.3 ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

ನೆನಪಿಡಿ: $ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$2x^2 - 5x + 3 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 0$

$\Rightarrow 2x(x-1) - 3(x-1) =$

$\Rightarrow (x-1)(2x-3) = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0, \quad 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow x = 1, \ 2x = 3$

$x = 1, \ x = \frac{3}{2}$

ಮೊದಲ ಪದ = $2x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $= +3$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $+6x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ = $-5x$
ಗುಣಲಬ್ಧ = $+6x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-5x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$-5x = -2x - 3x$

ಉದಾಹರಣೆ 4: $6x^2 - x - 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$6x^2 - x - 2 = 0$

$6x^2 - 4x + 3x - 2 = 0$

$2x(3x-2) + 1(3x-2) = 0$

$(2x+1)(3x-2) = 0$

$2x + 1 = 0, 3x - 2 =$

$2x = -1, 3x = 2$

$x = \frac{-1}{2}, x = \frac{2}{3}$

ಮೊದಲ ಪದ = $6x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $= -2$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $-12x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ = $-x$
ಗುಣಲಬ್ಧ = $-12x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$-x = -4x + 3x$

ಉದಾಹರಣೆ 5 : $3x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 2 = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\mathbf{3x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 2 = 0}$

$3x^2 - \sqrt{6}\,x - \sqrt{6}\,x + 2 = 0$

$(\sqrt{3})^2 x^2 - \sqrt{2}.\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}.\sqrt{3}\,x + (\sqrt{2})^2 = 0$

$\sqrt{3}\,x(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) = 0$

$(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2})(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) = 0$

$(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) = 0, \ (\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) = 0$

$\sqrt{3}\,x = \sqrt{2}, \ \sqrt{3}\,x = \sqrt{2}$

$x = \sqrt{\frac{2}{3}}, \ x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

ಮೊದಲ ಪದ = $3x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $= +2$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $6x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ = $-2\sqrt{6}\,x$
ಗುಣಲಬ್ಧ = $6x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-2\sqrt{6}\,x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$-2\sqrt{6}\,x = \sqrt{6}\,x - \sqrt{6}\,x$

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ವಿಭಾಗ 10.1 ರಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾದ ಪ್ರಾರ್ಥನಾ ಮಂದಿರದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಧರ್ಮದರ್ಶಿಯೊಬ್ಬರು ಒಂದು ಪ್ರಾರ್ಥನಾ ಮಂದಿರವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬಯಸುತ್ತಾರೆ ಹಾಗೂ ಇದರ ಒಳಾಂಗಣ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $300m^2$ ಆಗಿದ್ದು, ಉದ್ದವು ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 1m ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತಾರೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆ ಮಂದಿರದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಎಷ್ಟಿರಬೇಕು?

$2x^2 + x - 300 = 0$

$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$

$2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$

$(x - 12)(2x + 25) =$

$x - 12 = 0, \quad 2x + 25 = 0$

$x = 12, \quad 2x = -25$

$x = \frac{-25}{2} = -12.5$

ಅಗಲ $= x = 12\,m$

ಉದ್ದ $= 2x + 1 = 2(12) + 1 = 24 + 1 = 25\,m$

ಮೊದಲ ಪದ $= 2x^2$, ಕಡೆಯ ಪದ $= -300$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -600x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ $= +x$
ಗುಣಲಬ್ಧ $= -600x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $+x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$+x = -24x + 25x$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1. ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$
   (iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$
   (v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$
2. ಉದಾಹರಣೆ1 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.
3. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 27 ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ 182 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು 365 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರವು ಅದರ ಪಾದಕ್ಕಿಂತ 7cm ಕಡಿಮೆ ಇದೆ. ಅದರ ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು 13cm ಆದರೆ ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಗುಡಿ ಕೈಗಾರಿಕೆಯು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಡಿಕೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿನದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಮಡಿಕೆಯ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ), ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಮಡಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 3 ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಲಾಯಿತು. ಆ ದಿನದ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು ರೂ 90 ಆದರೆ ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಮಡಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿ ಮಡಿಕೆಯ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

1. ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

(i) $\boldsymbol{x^2 - 3x - 10 = 0}$

$x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$

$x(x - 5) + 2(x - 5) = 0$

$(x - 5)(x + 2) = 0$

$(x - 5) = 0, (x + 2) = 0$

$x = 5, x = -2$

ಮೊದಲ ಪದ $= x^2$, ಕಡೆಯ ಪದ $= -10$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -10x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ $= -3x$
ಗುಣಲಬ್ಧ $= -10x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-3x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$-3x = -5x + 2x$

(ii) $2x^2+x-6=0$

$2x^2+x-6=0$

$2x^2+4x-3x-6=0$

$2x(x+2)-3(x+2)=0$

$(x+2)(2x-3)=0$

$x+2=0, 2x-3=0$

$x=-2, 2x=3$

$x=-2, x=\frac{3}{2}$

ಮೊದಲ ಪದ $=2x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=-6$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $-12x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ = $+x$
ಗುಣಲಬ್ಧ = $-12x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $+x$
ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$+x=+4x-3x$

(iii) $\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0$

$\sqrt{2}x^2+2x+5x+5\sqrt{2}=0$

$\sqrt{2}x(x+\sqrt{2})+5(x+\sqrt{2})=0$

$(\sqrt{2}x+5)(x+\sqrt{2})=0$

$\sqrt{2}x+5=0,\ x+\sqrt{2}=0$

$\sqrt{2}x=-5,\ x=-\sqrt{2}$

$x=\frac{-5}{\sqrt{2}},\quad x=-\sqrt{2}$

ಮೊದಲ ಪದ $=+\sqrt{2}x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=+5\sqrt{2}$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $+10x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ = $+7x$
ಗುಣಲಬ್ಧ = $+10x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $+7x$
ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$+7x=+2x+5x$

(iv) $2x^2-x+\frac{1}{8}=0$

$16x^2-8x+1=0$

$16x^2-4x-4x+1=$

$4x(4x-1)-1(4x-1)=0$

$(4x-1)(4x-1)=0$

$4x-1=0,\qquad 4x-1=0$

$4x=1, 4x=1$

$x=\frac{1}{4},\ x=\frac{1}{4}$

ಮೊದಲ ಪದ $=+16x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=+1$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $+16x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ = $-8x$
ಗುಣಲಬ್ಧ = $+16x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-8x$
ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$-8x=-4x-4x$

(v) $100x^2-20x+1=0$

$100x^2-20x+1=0$

$100x^2-10x-10x+1=0$

$10x(10x-1)-1(10x-1)=0$

$(10x-1)(10x-1)=0$

$10x-1=0, 10x-1=0$

$10x=1, 10x=1$

$x=\frac{1}{10},\ x=\frac{1}{10}$

ಮೊದಲ ಪದ $=+100x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=+1$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $+100x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ = $-20x$
ಗುಣಲಬ್ಧ = $+100x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-20x$
ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$-20x=-10x-10x$

2. ಉದಾಹರಣೆ1 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

(i) ಜಾನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $=x$

ಜೀವನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $=45-x$

5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡ ನಂತರ

ಜಾನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $=x-5$

ಜೀವನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $=45-x-5=40-x$

ಅವರ ಗೋಲಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $=124$

$\therefore (x-5)(40-x)=124$

$40x-x^2-200+5x=124$

$-x^2 + 45x - 200 - 124 = 0$
$-x^2 + 45x - 324 = 0 \times -1$
$\mathbf{x^2 - 45x + 324 = 0}$
$x^2 - 36x - 9x + 324 = 0$
$x(x - 36) - 9(x - 36) = 0$
$(x - 36)(x - 9) = 0$
$(x - 36) = 0, \quad (x - 9) = 0$
$x = 36, \quad x = 9$

ಮೊದಲ ಪದ $= +x^2$, ಕಡೆಯ ಪದ $= +324$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= +324x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ $= -45x$
ಗುಣಲಬ್ಧ $= +324x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-45x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$-45x = -36x - 9x$

ಜಾನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= x = 36$
ಜೀವನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 45 - x = 45 - 36 = 9$
ಅಥವಾ
ಜಾನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= x = 9$
ಜೀವನ್‌ನ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 45 - x = 45 - 9 = 36$

(ii) ಗೊಂಬೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= x$
ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗೊಂಬೆ ತಯಾರಿಸಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ $= (55 - x)$ ರೂ
ಒಟ್ಟು ಗೊಂಬೆಗಳ ಬೆಲೆ $= 750$ ರೂ
$\therefore x(55 - x) = 750$
$55x - x^2 = 750$
$-x^2 + 55x - 750 = 0 \times -1$
$\mathbf{x^2 - 55x + 750 = 0}$
$x^2 - 25x - 30x + 750 = 0$
$x(x - 25) - 30(x - 25) = 0$
$(x - 25)(x - 30) = 0$
$(x - 25) = 0, \quad (x - 30) = 0$
$x = 25, \quad x = 30$
ಗೊಂಬೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 25 ಅಥವಾ 30

ಮೊದಲ ಪದ $= +x^2$, ಕಡೆಯ ಪದ $= +750$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= +750x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ $= -55x$
ಗುಣಲಬ್ಧ $= +750x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-55x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$-55x = -25x - 30x$

3. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 27 ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ 182 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $= x$ ಆದರೆ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $= 27 - x$ ಆಗುತ್ತದೆ.
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 182$
$\therefore x(27 - x) = 182$
$27x - x^2 = 182$
$-x^2 + 27x - 182 = 0 \times -1$
$\mathbf{x^2 - 27x + 182 = 0}$
$x^2 - 13x - 14x + 182 = 0$
$x(x - 13) - 14(x - 13) = 0$
$(x - 13)(x - 14) = 0$
$(x - 13) = 0, \quad (x - 14) = 0$
$x = 13, x = 14$

ಮೊದಲ ಪದ $= +x^2$, ಕಡೆಯ ಪದ $= +182$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= +182x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ $= -27x$
ಗುಣಲಬ್ಧ $= +182x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-27x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$-27x = -13x - 14x$

ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $= 13$ ಆದರೆ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $=$
$27 - 13 = 14$ ಆಗುತ್ತದೆ.
ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $= 14$ ಆದರೆ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $= 27 - 14 = 13$ ಆಗುತ್ತದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ 13 ಮತ್ತು 14

4. ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು 365 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗಿರಲಿ, ಮತ್ತೊಂದು ಕ್ರಮಾಗತ ಧನಸಂಖ್ಯೆ $= x+1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$x^2 + (x+1)^2 = 365$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 35$

$2x^2 + 2x + 1 - 365 = 0$

$2x^2 + 2x - 364 = 0 \div 2$

$\mathbf{x^2 + x - 182 = 0}$

$x^2 + 14x - 13x - 182 = 0$

$x(x+14) - 13(x+14) = 0$

$(x+14)(x-13) = 0$

$(x+14) = 0, (x-13) = 0$

$x = -14 , x = 13$

$\therefore x + 1 = 13 + 1 = 14$

ಕ್ರಮಾಗತ ಎರಡು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 13, 14 ಆಗಿವೆ.

ಮೊದಲ ಪದ $=+x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=-182$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -182x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ $= +x$
ಗುಣಲಬ್ಧ $= -182x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $+x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$+\ x = +14x - 13x$

5. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರವು ಅದರ ಪಾದಕ್ಕಿಂತ 7cm ಕಡಿಮೆ ಇದೆ. ಅದರ ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು 13cm ಆದರೆ ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ $BC = x\ cm$

ಎತ್ತರ $AB = (x-7)cm$

ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ

$BC^2 + AB^2 = AC^2$

$x^2 + (x-7)^2 = 13^2$

$x^2 + x^2 + 7^2 - 2(x)(7) = 169$

$2x^2 - 14x + 49 - 169 = 0$

$2x^2 - 14x - 120 = 0 \div 2$

$\mathbf{x^2 - 7x - 60 = 0}$

$x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$

$x(x-12) + 5(x-12) = 0$

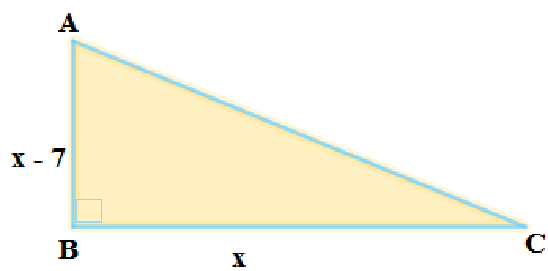
$(x-12)(x+5) = 0$

$(x-12) = 0, \quad (x+5) = 0$

$x = 12, \ x = -5$

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ $BC = x = 12\ cm$

ಎತ್ತರ $AB = (x-7) = 12 - 7 = 5cm$



ಮೊದಲ ಪದ $=+x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=-60$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -60x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ $= -7\ x$
ಗುಣಲಬ್ಧ $= -60x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-7x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$-7x = -12x + 5x$

6. ಒಂದು ಗುಡಿ ಕೈಗಾರಿಕೆಯು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಡಿಕೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿನದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಮಡಿಕೆಯ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ), ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಮಡಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 3 ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಲಾಯಿತು. ಆ ದಿನದ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು ರೂ 90 ಆದರೆ ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಮಡಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿ ಮಡಿಕೆಯ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮಡಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= x$

ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ $= (2x+3)$ ರೂ

$\therefore x(2x+3) = 90$

$\mathbf{2x^2 + 3x - 90 = 0}$

$2x^2 + 15x - 12x - 90 = 0$

$x(2x+15) - 6(2x+15) = 0$

$(2x+15)(x-6)=0$
$(2x+15)=0, (x-6)=0$
$2x=-15, \ x=6$
$x=\frac{-15}{2}, x=6$
ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $=x=6$
ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ $=(2x+3)$
$=2(6)+3=12+3=15$ ರೂ

ಮೊದಲ ಪದ $=+2x^2$,ಕಡೆಯ ಪದ $=-90$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $-90x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ = $+3x$
ಗುಣಲಬ್ಧ = -90 ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $+3x$
ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$+3x = +15x - 12x$

10.4 ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ:

$3x^2-5x+2=0$ ವರ್ಗಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

$3x^2-5x+2=0 \qquad \times 3$
$9x^2-15x+6=0$
$9x^2-15x=-6$
ಎರಡೂ ಕಡೆ b^2ನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು
$(3x)^2-2(3x)\left(\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-6+\left(\frac{5}{2}\right)^2$
$\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2=-6+\frac{25}{4}$
$\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{-24+25}{4}$
$\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$
$\left(3x-\frac{5}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$
$\left(3x-\frac{5}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}$
$3x=\pm\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$
$3x=\frac{\pm 1+5}{2}$
$x=\frac{1+5}{6}, \ x=\frac{-1+5}{6}$
$x=\frac{6}{6}, \ x=\frac{4}{6}$
$x=1, \ x=\frac{2}{3}$

$2ab = 15x$
$2(3x)b = 15x$
$b=\frac{15x}{6x}=\frac{5}{2}$
$b^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$

ಉದಾಹರಣೆ 7 : ಉದಾಹರಣೆ 3ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

$2x^2-5x+3=0$ ವರ್ಗಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

$2x^2-5x+3=0 \qquad \times 2$
$4x^2-10x+6=0$
$4x^2-10x=-6$
ಎರಡೂ ಕಡೆ b^2ನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು
$(2x)^2-2(2x)\left(\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-6+\left(\frac{5}{2}\right)^2$
$\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2=-6+\frac{25}{4}$
$\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{-24+25}{4}$

$2ab = 10x$
$2(2x)b = 15x$
$b=\frac{10x}{4x}=\frac{5}{2}$
$b^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\left(2x-\frac{5}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

$\left(2x-\frac{5}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}$

$2x=\pm\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$

$2x=\frac{\pm1+1}{2}$

$x=\frac{1+5}{4},\ x=\frac{-1+5}{4}$

$x=\frac{6}{4},\ x=\frac{4}{4}$

$x=\frac{3}{2},\ x=1$

ಉದಾಹರಣೆ 8:$5x^2$ - 6x - 2 = 0 ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

$5x^2$ - 6x - 2 = 0 x 5

$25x^2-30x-10=0$ ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

$25x^2-30x=10$

ಎರಡೂ ಕಡೆ b^2ನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು

$25x^2-30x+(3)^2=10+(3)^2$

$(5x)^2-2(5x)(3)+(3)^2=10+9$

$(5x-3)^2=19$

$(5x-3)=\pm\sqrt{19}$

$5x=3\pm\sqrt{19}$

$x=\frac{3\pm\sqrt{19}}{5}$

$x=\frac{3+\sqrt{19}}{5},\quad x=\frac{3-\sqrt{19}}{5}$

$2ab=30x$

$2(5x)b=30x$

$b=\frac{30x}{10x}=3$

$b^2=(3)^2$

ಉದಾಹರಣೆ 9: $4x^2+3x+5=0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$4x^2+3x+5=0$

$4x^2+3x=-5$

ಎರಡೂ ಕಡೆ b^2ನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು

$(2x)^2-2(2x)\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)^2=-5+\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$\left(2x-\frac{3}{4}\right)^2=-5+\frac{9}{16}$

$\left(2x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{-80+9}{16}$

$\left(2x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{-71}{16}<0$

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಮೂಲಗಳು ಊಹಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ.

$2ab=3x$

$2(2x)b=3x$

$b=\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}$

$b^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2$

ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು:

$ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗಪೂರ್ಣ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$ax^2 + bx = -c$ ಎರಡೂ ಕಡೆ $4a$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ ಎರಡೂ ಕಡೆ b^2 ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

$(2ax)^2 + 2(2ax)(b) + b^2 = b^2 - 4ac$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ಉದಾಹರಣೆ 10: ಅಭ್ಯಾಸ 10.1 ರ ಪ್ರಶ್ನೆ 2(i) ನ್ನು ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ನಿವೇಶನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $528m^2$ ಆಗಿದೆ. ನಿವೇಶನದ ಉದ್ದವು (ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ) ಅದರ ಅಗಲದ ಎರಡಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಆ ನಿವೇಶನದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಅಗಲ $b = x\,m$ ಆಗಿರಲಿ

$\Rightarrow$ ಉದ್ದ $l = (2x + 1)m$

ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= l \times b$

$\Rightarrow 528 = x(2x + 1)$

$\Rightarrow 528 = 2x^2 + x$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 528 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 2,\quad b = 1,\quad c = -528$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(1)\pm\sqrt{(1)^2-4(2)(-528)}}{2(2)}$

$x = \frac{-1\pm\sqrt{1+4224}}{4}$

$x = \frac{-1\pm\sqrt{4225}}{4}$

$x = \frac{-1\pm 65}{4}$

$x = \frac{-1+65}{4}$ or $x = \frac{-1-65}{4}$

$x = \frac{64}{4}$ or $x = \frac{-66}{4}$

$x = 16$ or $x = -\frac{33}{2}$

$\Rightarrow$ನಿವೇಶನದ ಅಗಲ = 16m ಮತ್ತು ಉದ್ದ = $2x16 + 1 = 32 + 1 = 33m$

ಉದಾಹರಣೆ 11: ಎರಡು ಕ್ರಮಾಗತ ಬೆಸ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು 290 ಆದರೆ ಆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕ್ರಮಾನುಗತ ಧನ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು x ಮತ್ತು $x+2$ ಆಗಿರಲಿ.

$x^2 + (x+2)^2 = 290$

$x^2 + x^2 + 2^2 + 2(x)(2) = 290$

$2x^2 + 4x + 4 - 290 = 0$

$2x^2 + 4x - 286 = 0 \qquad \div 2$

$x^2 + 2x - 143 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -143$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2-4(1)(-143)}}{2(1)}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+572}}{2}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2}$

$x = \frac{-2 \pm 24}{2}$

$x = \frac{-2+24}{2}, x = \frac{-2-24}{2}$

$x = \frac{22}{2}, \quad x = \frac{-26}{2}$

$x = 11, \quad x = -13$

ಕ್ರಮಾನುಗತ ಧನ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು 11 ಮತ್ತು 13 ಆಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 12: ಅಗಲವು ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ 3m ಕಡಿಮೆ ಇರುವಂತಹ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದರ ಅಗಲವು ಈಗಾಗಲೇ ನಿರ್ಮಿತವಾಗಿರುವ, 12m ಎತ್ತರದ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಪಾದವಾಗಬೇಕಿದೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕಿಂತ 4 m^2 ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕಿದೆ (ಚಿತ್ರ 10.3 ನ್ನು ನೋಡಿ). ಈ ರೀತಿ ನಿರ್ಮಿಸುವ ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಅಗಲ x m ಆಗಿರಲಿ ಆದ್ದರಿಂದ

ಅದರ ಉದ್ದ = $(x+3)$ m ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $x(x+3)m^2 = (x^2+3x)m^2$.

ಈಗ, ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ = x m

ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x$ m

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಪ್ರಕಾರ, $x^2 + 3x = 6x + 4$

$\therefore$ **$x^2 - 3x - 4 = 0$**

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 1, \quad b = -3, \quad c = -4$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

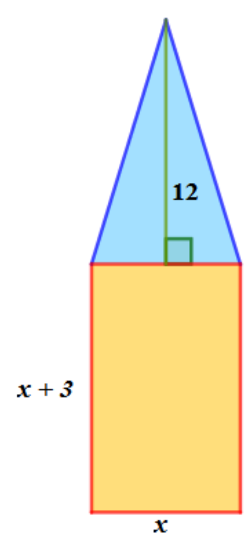


Fig 10.3

$x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$

$x = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}$

$x = \frac{3\pm\sqrt{25}}{2}$

$x = \frac{3\pm5}{2}$

$x = \frac{3+5}{2}$, $x = \frac{3-5}{2}$

$x = \frac{8}{2}$, $x = \frac{-2}{2}$

$x = 4$, $x = -1$

∴ ಉದ್ಯಾನವನದ ಅಗಲ = x = 4m ಮತ್ತು ಅದರ ಉದ್ದ = x + 3 = 4 + 3 = 7m.

ಉದಾಹರಣೆ 13: ಈ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 3, \quad b = -5, \quad c = +2$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(3)(2)}}{2(3)}$

$x = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}$

$x = \frac{5\pm\sqrt{1}}{6}$

$x = \frac{5\pm1}{6}$

$x = \frac{6}{6}$ or $x = \frac{4}{6}$

$x = 1$ or $x = \frac{2}{3}$

(ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 1, \quad b = 4, \quad c = +5$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(4)\pm\sqrt{(4)^2-4(1)(5)}}{2(1)}$

$x = \frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}$

$x = \frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}$

$x = \frac{-4\pm2\sqrt{-1}}{2}$

ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಅಲ್ಲ.

(iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 2, \quad b = -2\sqrt{2}, \quad c = +1$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-2\sqrt{2})\pm\sqrt{(-2\sqrt{2})^2-4(2)(1)}}{2(2)}$

$x = \frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{8-8}}{4}$

$x = \frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{0}}{4}$

$x = \frac{2\sqrt{2}}{4}$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

ಉದಾಹರಣೆ 14: ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ,

(i) $x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 3 \quad x \neq 0, x \neq 2$

(i) $x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$

$x + \frac{1}{x} = 3$ ಎರಡೂ ಕಡೆ x ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$x^2 + 1 = 3x$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 1, \quad b = -3, \quad c = 1$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$

$x = \frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}$

$x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \qquad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3$

$\frac{x-2-x}{x(x-2)} = 3$

$\frac{-2}{x^2-2x} = 3$

$-2 = 3x^2 - 6x$

$3x^2 - 6x + 2 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 3, \quad b = -6, \quad c = 2$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(3)(2)}}{2(3)}$

$x = \frac{6\pm\sqrt{36-24}}{6}$

$x = \frac{6\pm\sqrt{12}}{6}$

$x = \frac{6\pm\sqrt{4\times3}}{6}$

$x = \frac{6\pm2\sqrt{3}}{6}$

$x = \frac{2(3\pm\sqrt{3})}{6}$

$x = \frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

$x = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

ಉದಾಹರಣೆ 15: ಒಂದು ಮೋಟಾರು ದೋಣಿಯ ಜವವು ನಿಶ್ಚಲ ನೀರಿನಲ್ಲಿ 18km/h ಆಗಿದೆ. ಆ ದೋಣಿಯು ಪ್ರವಾಹಕ್ಕೆ ಎದುರಾಗಿ 24 km ದೂರ ಚಲಿಸಲು, ಅದು ಪ್ರವಾಹದೊಡನೆ ಮೊದಲಿನ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಹಿಂದಿರುಗಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಘಂಟೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರವಾಹದ ಜವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರವಾಹದ ಜವ $= x$ km/h

ಪ್ರವಾಹಕ್ಕೆ ಎದುರಾಗಿ ದೋಣಿಯ ವೇಗ $= (18 - x)$km/h

ಪ್ರವಾಹಕ್ಕೆ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ದೋಣಿಯ ವೇಗ $= (18 + x)$km/h

ಪ್ರವಾಹಕ್ಕೆ ಎದುರಾಗಿ ಚಲಿಸಲು ದೋಣಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ $= \frac{24}{18-x}$ ಗಂಟೆ

ಪ್ರವಾಹಕ್ಕೆ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಚಲಿಸಲು ದೋಣಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ $= \frac{24}{18+x}$ ಗಂಟೆ

$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$, .

$24(18 + x) - 24(18 - x) = 1(18 - x)(18 + x)$

$432 + 24x - 432 + 24x = 324 - x^2$

$48x = 324 - x^2$

$- x^2 + 324 - 48 = 0$ x (-1)

$x^2 + 48x - 324 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 1$, $b = 48$, $c = -324$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(48)\pm\sqrt{(-48)^2-4(1)(-324)}}{2(1)}$

$x = \frac{-48\pm\sqrt{2304+1296}}{2}$

$x = \frac{-48\pm\sqrt{3600}}{2}$

$x = \frac{-48\pm60}{2}$

$x = \frac{-48+60}{2}$, $x = \frac{-48-60}{2}$

$x = \frac{12}{2}$, $x = \frac{-108}{2}$

$x = 6$, $x = -54$

ಪ್ರವಾಹದ ಜವ $= x = 6\ km/h$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.3

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$
   (iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ (iv) $2x^2 + x + 4 = 0$
2. ಪ್ರಶ್ನೆ 1ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $x + \frac{1}{x} = 3, \quad x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, \quad x \neq -4, \ 7$
4. ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದಿನ ರೆಹಮಾನನ ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು 5 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ಅವನ ವಯಸ್ಸು ಇವುಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಮೊತ್ತ $\frac{1}{3}$ ಆದರೆ ಅವನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಕಿರು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಶಿಫಾಲಿಯು ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 30 ಆಗಿದೆ. ಅವಳು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ 2 ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ 3 ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಆ ಅಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 210 ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಅವಳು ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಹೊಲದ ಕರ್ಣವು ಅದರ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹುವಿಗಿಂತ 60 m ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಅದರ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವು ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹುವಿಗಿಂತ 30 m ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಹೊಲದ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 180 ಆಗಿದೆ. ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎಂಟರಷ್ಟಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಂದು ರೈಲು 360 km ದೂರವನ್ನು ಏಕರೂಪ ಜವದೊಂದಿಗೆ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಜವವು 5 km/h ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಷ್ಟೇ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ಅದು 1 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿತ್ತು. ರೈಲಿನ ಜವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ
9. ಎರಡು ನಲ್ಲಿಗಳು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಒಂದು ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು $9\frac{3}{8}$ ಘಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸುತ್ತವೆ. ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ನಲ್ಲಿಯು ಕಡಿಮೆ ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ನಲ್ಲಿಗಿಂತ 10 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಪ್ರತಿ ನಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. ಒಂದು ಎಕ್ಸ್‌ಪ್ರೆಸ್ ರೈಲು ಮೈಸೂರು ಮತ್ತು ಬೆಂಗಳೂರಿನ ನಡುವಿನ 132 ಕಿಮೀ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ಪ್ಯಾಸೆಂಜರ್ ರೈಲಿಗಿಂತ 1 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ಸಮಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ (ಮಧ್ಯಂತರ ನಿಲ್ದಾಣಗಳಲ್ಲಿ ರೈಲು ನಿಲ್ಲುವ ಸಮಯವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿಲ್ಲ). ಎಕ್ಸ್‌ಪ್ರೆಸ್ ರೈಲಿನ ಸರಾಸರಿ ಜವವು ಪ್ಯಾಸೆಂಜರ್ ರೈಲಿನ ಸರಾಸರಿ ಜವಕ್ಕಿಂತ 11 km/h ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡೂ ರೈಲುಗಳ ಸರಾಸರಿ ಜವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$
(iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ (iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
$2x^2 - 7x = -3 \times 2$
$4x^2 - 14x = -6$

ಎರಡೂ ಕಡೆ b^2ನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು

$4x^2 - 14x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$(2x)^2 - 2(2x)(\frac{7}{2}) + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -6 + \frac{49}{4}$

$\left(2x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{-24+49}{4}$

$\left(2x - \frac{7}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$

$2x - \frac{7}{2} = \pm\frac{5}{2}$

$2x = \pm\frac{5}{2} + \frac{7}{2}$

$2x = \frac{\pm 5 + 7}{2}$

$x = \frac{\pm 5 + 7}{4}$, $2x = 1$

$x = \frac{5+7}{4}$, $x = \frac{-5+7}{4}$

$x = \frac{12}{4}$, $x = \frac{2}{4}$

$x = 3$, $x = \frac{1}{2}$

$2ab = 14x$

$2(2x)b = 14x$

$b = \frac{14x}{4x} = \frac{7}{2}$

$b^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$

(ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

$2x^2 + x = 4$ $\times 2$

$4x^2 + 2x = 8$

ಎರಡೂ ಕಡೆ b^2ನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು

$4x^2 + 2x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$(2x)^2 + 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8 + \frac{1}{4}$

$\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{32+1}{4}$

$\left(2x + \frac{1}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{33}{4}}$

$2x + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{33}}{2}$

$2x = \pm\frac{\sqrt{33}}{2} + \frac{1}{2}$

$2x = \frac{\pm\sqrt{33} - 1}{2}$

$x = \frac{\pm\sqrt{33} - 1}{4}$

$x = \frac{\sqrt{33}-1}{4}$, $x = \frac{-\sqrt{33}-1}{4}$

$2ab = 2x$

$2(2x)b = 2x$

$b = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$

$b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

(iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}\,x + 3 = 0$

$4x^2 + 4\sqrt{3}\,x = -3$

$4x^2 + 4\sqrt{3}x + (\sqrt{3})^2 = -3 + (\sqrt{3})^2$

$(2x)^2 + 2(2x)(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 = -3 + 3$

$(2x + \sqrt{3})^2 = 0$

$(2x + \sqrt{3}) = 0, \quad (2x + \sqrt{3}) = 0$

$2x = -\sqrt{3}, \; 2x = -\sqrt{3}$

$x = \frac{-\sqrt{3}}{2}\;, \; x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$2ab = \mathbf{4}\sqrt{3}x$
$2(2x)b = \mathbf{4}\sqrt{3}x$
$b = \frac{4\sqrt{3}x}{4x} = \sqrt{3}$
$b^2 = (\sqrt{3})^2$

(iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

$2x^2 + x = -4 \qquad \times 2$

$4x^2 + 2x = -8$

ಎರಡೂ ಕಡೆ b^2ನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು

$(2x)^2 - 2(2x)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = -8 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 = -8 + \frac{1}{16}$

$\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{-128+1}{16}$

$\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{-127}{16} < 0$

$2ab = 2x$
$2(2x)b = \mathbf{2}x$
$b = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$
$b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಮೂಲಗಳು ಊಹಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ.

2 ಪ್ರಶ್ನೆ 1ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\mathbf{2x^2 - 7x + 3 = 0}$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 2, \quad b = -7, \quad c = 3$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2-4(2)(3)}}{2(2)}$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4}$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$

$x = \frac{7 \pm 5}{4}$

$x = \frac{7+5}{4}, \quad x = \frac{7-5}{4}$

$x = \frac{12}{4}\;, \; x = \frac{2}{4}$

$x = 3\;, \; x = \frac{1}{2}$

(ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 2, \quad b = 1, \quad c = -4$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2-4(2)(-4)}}{2(2)}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{2}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$

$x = \frac{-1+\sqrt{33}}{2}, \quad x = \frac{-1-\sqrt{33}}{2}$

(iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 4, \quad b = 4\sqrt{3}, \quad c = +3$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(4\sqrt{3}) \pm \sqrt{(4\sqrt{3})^2-4(4)(3)}}{2(4)}$

$x = \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{16\times3-48}}{8}$

$x = \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{48-48}}{8}$

$x = \frac{-4\sqrt{3} \pm 0}{8},$

$x = \frac{-4\sqrt{3}}{8}, x = \frac{-4\sqrt{3}}{8}$

$x = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \quad x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 2, \quad b = 1, \quad c = 4$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2-4(2)(4)}}{2(2)}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-32}}{4}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-31}}{4}$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ.

3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x + \frac{1}{x} = 3, \quad x \neq 0$ **(ii)** $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, \quad x \neq -4, \; 7$

(i) $x - \frac{1}{x} = 3, \quad x \neq 0$

$x - \frac{1}{x} = 3$ ಎರಡೂ ಕಡೆ x ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$x^2 - 1 = 3x$

$x^2 - 3x - 1 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 1, \quad b = -3, \quad c = -1$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}, \quad x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

(ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, \quad x \neq -4, \ 7$

$30(x-7) - 30(x+4) = 11(x+4)(x-7)$

$30x - 210 - 30x - 120 = 11(x^2 + 4x - 7x - 28)$

$-330 = 11x^2 - 11(3x) - 11(28)$

$-330 = 11x^2 - 33x - 308$

$-330 = 11x^2 - 33x - 308$

$11x^2 - 33x + 22 = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 1, \quad b = -3, \quad c = 2$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$

$x = \frac{3 \pm 1}{2}$

$x = \frac{3+1}{2}, \quad x = \frac{3-1}{2}$

$x = \frac{4}{2}, \quad x = \frac{2}{2}$

4. ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದಿನ ರೆಹಮಾನನ ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು 5 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ಅವನ ವಯಸ್ಸು ಇವುಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಮೊತ್ತ $\frac{1}{3}$ ಆದರೆ ಅವನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ರೆಹಮಾನ್‌ನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು $= x$ ವರ್ಷಗಳು

3 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ರೆಹಮಾನ್‌ನ ವಯಸ್ಸು $= (x-3)$ ವರ್ಷಗಳು

5 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆತನ ವಯಸ್ಸು $= (x+5)$ ವರ್ಷಗಳು

ಇದರ ಮೊತ್ತ $= \frac{1}{3}$

$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{3}$, .
$3(x+5)+3(x-3)=(x-3)(x+5)$
$3x+15+3x-9=x^2+2x-15$
$6x+15-9=x^2+2x-15$
$x^2+2x-15=6x+6$
$x^2-4x-21=0$
$x^2-7x+3x-21=0$
$x(x-7)+3(x-7)=0$
$(x-7)(x+3)=0$
$x-7=0\,,\ \ x+3=0$
$x=7,\quad x=-3$
ರೆಹಮಾನ್‌ನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು $=7$ ವರ್ಷಗಳು

5. ಒಂದು ಕಿರು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಶಿಫಾಲಿಯು ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 30 ಆಗಿದೆ. ಅವಳು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ 2 ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ 3 ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಆ ಅಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 210 ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಅವಳು ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳು $=\mathrm{x}$ ಆದರೆ ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು $=30-\mathrm{x}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ನಿಬಂಧನೆಯ ಪ್ರಕಾರ
$(x+2)(30-x-3)=210$
$(x+2)(27-x)=210$
$27x-x^2+54-2x-210=10$
$-x^2+25x-156=0 \qquad\qquad \times\ -1$
$x^2-25x+156=0$
$x^2-12x-13x-156=0$
$x(x-12)-13(x-12)=0$
$(x-12)(x-13)=0$
$x-12=0\,,\ \ x-13=0$
$x=12,\quad x=13$
ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳು $=12$ ಆದರೆ ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು $=30-12=18$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳು $=13$ ಆದರೆ ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು $=30-\mathbf{13}=\mathbf{17}$ **ಆಗಿರುತ್ತದೆ.**

6. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಹೊಲದ ಕರ್ಣವು ಅದರ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹುವಿಗಿಂತ **60 m** ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಅದರ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವು ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹುವಿಗಿಂತ **30 m** ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಹೊಲದ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆಯತದ ಚಿಕ್ಕಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ $=\mathrm{x\,m}$
ಆಯತದ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ $=(x+30)\mathrm{m}$
ಆಯತದಲ್ಲಿನ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ $=(x+60)\mathrm{m}$
ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ $=\sqrt{x^2+(x+30)^2}$
$\sqrt{x^2+(x+30)^2}=x+60$
$x^2+(x+30)^2=(x+60)^2$
$x^2+x^2+2(x)(30)+(30)^2=x^2+2(x)(60)+(60)^2$
$2x^2+60x+900=x^2+120x+3600$
$2x^2-x^2+60x-120x+900-3600=0$
$x^2-60x-2700=0$
$x^2-90x+30x-2700=0$

$x(x-90)+30(x-90)=0$
$(x-90)(x+30)=0$
$(x-90)=0,\ (x+30)=0$
$x=90,\ \ x=-30$
ಆಯತದ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ $=(x+30)=90+30=120$ m

7. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 180 ಆಗಿದೆ. ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎಂಟರಷ್ಟಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಚಿಕ್ಕಸಂಖ್ಯೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ x ಮತ್ತು y ಆಗಿರಲಿ.
ನಿಬಂಧನೆಯ ಪ್ರಕಾರ
$x^2-y^2=180$ ಮತ್ತು $y^2=8x$
$x^2-8x-180=0$
$x^2-18x+10x-180=0$
$x(x-18)+10(x-18)=0$
$(x-18)(x+10)=0$
$x-18=0,\quad x+10=0$
$x=18,\quad x=-10$
ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ $x=18$
$\therefore\ y^2=8x=8\times 18=144 \Rightarrow y=\pm\sqrt{144}=\pm 12$
$\therefore$ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆ $=\pm 12$
ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 18 ಮತ್ತು 12 ಅಥವಾ 18 ಮತ್ತು –12

8. ಒಂದು ರೈಲು 360 km ದೂರವನ್ನು ಏಕರೂಪ ಜವದೊಂದಿಗೆ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಜವವು 5 km/h ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಷ್ಟೇ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ಅದು 1 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿತ್ತು. ರೈಲಿನ ಜವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ರೈಲಿನ ವೇಗ $=x$ km/h
360 ಕಿ.ಮೀ ಚಲಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಮಯ $=\frac{360}{x}$ h
ಜವವು 5 km/h ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದ ಸಮಯ $=\frac{360}{x+5}$ h
$\Rightarrow \frac{360}{x}=\frac{360}{x+5}+1$
$\Rightarrow 360(x+5)=360x+x(x+5)$
$\Rightarrow 360x+1800=360x+x^2+5x$
$\Rightarrow 360x+1800=360x+x^2+5x$
$x^2+5x-1800=0$
$x^2+45x-40x-1800=0$
$x(x+45)-40(x+45)=0$
$(x+45)(x-40)=0$
$x+45=0,\quad x-40=0$
$x=-45,\ \ x=40$
ರೈಲಿನ ವೇಗ $=40$ km/h

9. ಎರಡು ನಲ್ಲಿಗಳು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಒಂದು ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು $9\frac{3}{8}$ ಘಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸುತ್ತವೆ. ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ನಲ್ಲಿಯು ಕಡಿಮೆ ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ನಲ್ಲಿಗಿಂತ 10 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಪ್ರತಿ ನಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಚಿಕ್ಕ ನಲ್ಲಿಯು ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ $=x$ h

ದೊಡ್ಡ ನಲ್ಲಿಯು ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ $= (x-10)$ h

ಚಿಕ್ಕ ನಲ್ಲಿಯ 1 ಘಂಟೆಯಲ್ಲಿ ತುಂಬುವ ಟ್ಯಾಂಕನ ಭಾಗ $= \frac{1}{x}$

ದೊಡ್ಡ ನಲ್ಲಿಯ 1 ಘಂಟೆಯಲ್ಲಿ ತುಂಬುವ ಟ್ಯಾಂಕನ ಭಾಗ $= \frac{1}{x-10}$

ಎರಡೂ ನಲ್ಲಿಗಳು ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ $= 9\frac{3}{8} = \frac{75}{8}$

ಎರಡೂ ನಲ್ಲಿಗಳು 1 ಘಂಟೆಯಲ್ಲಿ ತುಂಬುವ ಟ್ಯಾಂಕನ ಭಾಗ $= \frac{1}{\frac{75}{8}} = \frac{8}{75}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{8}{75}$

$75(x-10) + 75x = 8(x)(x-10)$

$75x - 750 + 75x = 8x^2 - 80x$

$8x^2 - 80x - 150x + 750 = 0$

$8x^2 - 230x + 750 = 0$

$8x^2 - 200x - 30x + 750 = 0$

$8x(x-25) - 30(x-25) = 0$

$(x-25)(8x-30) = 0$

$x - 25 = 0, \quad 8x - 30 = 0$

$x = 25, \quad x = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3.75$

ಚಿಕ್ಕ ನಲ್ಲಿಯು ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ $= 3.75$ hr ಆದಾಗ ದೊಡ್ಡ ನಲ್ಲಿಯು ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದು. ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಚಿಕ್ಕ ನಲ್ಲಿಯು ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ 25 ಘಂಟೆಯಾದರೆ,

ದೊಡ್ಡ ನಲ್ಲಿಯು ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ 25-10=15 ಘಂಟೆಗಳಾಗಿರುತ್ತದೆ.

10. ಒಂದು ಎಕ್ಸ್‌ಪ್ರೆಸ್ ರೈಲು ಮೈಸೂರು ಮತ್ತು ಬೆಂಗಳೂರಿನ ನಡುವಿನ 132km ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ಪ್ಯಾಸೆಂಜರ್ ರೈಲಿಗಿಂತ 1 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ಸಮಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ (ಮಧ್ಯಂತರ ನಿಲ್ದಾಣಗಳಲ್ಲಿ ರೈಲು ನಿಲ್ಲುವ ಸಮಯವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿಲ್ಲ). ಎಕ್ಸ್‌ಪ್ರೆಸ್ ರೈಲಿನ ಸರಾಸರಿ ಜವವು ಪ್ಯಾಸೆಂಜರ್ ರೈಲಿನ ಸರಾಸರಿ ಜವಕ್ಕಿಂತ 11 km/h ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡೂ ರೈಲುಗಳ ಸರಾಸರಿ ಜವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ಯಾಸೆಂಜರ್ ರೈಲಿನ ಸರಾಸರಿ ವೇಗ $= x$ km/h

ಎಕ್ಸ್‌ಪ್ರೇಸ್ ರೈಲಿನ ಸರಾಸರಿ ವೇಗ $= (x+11)$km/h

ಕ್ರಮಿಸುವ ದೂರ $= 132$ km

ಪ್ಯಾಸೆಂಜರ್ ರೈಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ $= \frac{132}{x}$ h

ಎಕ್ಸ್‌ಪ್ರೆಸ್ ರೈಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ $= \frac{132}{x+11}$

ಇವೆರಡು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1 ಘಂಟೆಯಾದಾಗ

$\therefore \frac{132}{x} - \frac{132}{x+11} = 1$

$132(x+11) - 132x = x(x+11)$

$132x + 1452 - 132x = x^2 + 11x$

$x^2 + 11x - 1452 = 0$

$x^2 + 44x - 33x - 1452 = 0$

$x(x+44) - 33(x+44) = 0$

$(x+44)(x-33) = 0$

$x + 44 = 0, \quad x - 33 = 0$

$x = -44, \quad x = 33$

ವೇಗವು ಋಣವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಪ್ಯಾಸೆಂಜರ್ ರೈಲಿನ ಸರಾಸರಿ ವೇಗ $= 33\text{ km/h}$

ಎಕ್ಸ್‌ಪ್ರೆಸ್ ರೈಲಿನ ಸರಾಸರಿ ವೇಗ $= (33 + 11) = 44\text{ km/h}$

10.5 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ

$b^2 - 4ac$ ಯ ಬೆಲೆಯು, $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದರಿಂದ

$b^2 - 4ac$ ಯನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು Δ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುವರು.

ಹೀಗೆ, $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು

i) $b^2 - 4ac > 0$ ಆದರೆ ಎರಡು ಭಿನ್ನವಾದ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ii) $b^2 - 4ac = 0$ ಆದರೆ ಎರಡು ಸಮನಾದ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

iii) $b^2 - 4ac < 0$ ಆದರೆ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಶೋಧಕ	ಸ್ವಭಾವ
$\Delta = 0$	ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ
$\Delta > 0$	ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ವಿಭಿನ್ನ
$\Delta < 0$	ಊಹಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಉದಾಹರಣೆ 16: $2x^2 - 4x + 3 = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸಿ.

$a = 2, \quad b = -4, \quad c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(2)(3)$

$\Delta = 16 - 24$

$\Delta = -8 < 0$ ಮೂಲಗಳು ಊಹಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 17: 13m ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಅಂಚಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲೋಹದ ಕಂಬವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅದರ ಒಂದು ವ್ಯಾಸ AB ಯ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಾದ A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ದ್ವಾರಗಳಿವೆ. ಈ ದ್ವಾರಗಳಿಂದ ಆ ಲೋಹದ ಕಂಬಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 7m ಆಗಿರುವಂತೆ ಕಂಬವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ, ಕಂಬವು ಆ ಎರಡು ದ್ವಾರಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದೆ?

$BP = x\text{ m}$

$AP = (x + 7)\text{m}$

$AB = 13\text{ m}$ ವ್ಯಾಸ

$\angle APB = 90^0$

$AP^2 + PB^2 = AB^2$

$x^2 + (x + 7)^2 = 13^2$

$x^2 + x^2 + 7^2 + 2(x)(7) = 169$

$2x^2 + 14x + 49 - 169 = 0$

$2x^2 + 14x - 120 = 0 \quad \div \ 2$

$x^2 + 7x - 60 = 0$

$x^2 + 12x - 5x - 60 = 0$

$x(x + 12) - 5(x + 12) = 0$

$(x + 12)(x - 5) = 0$

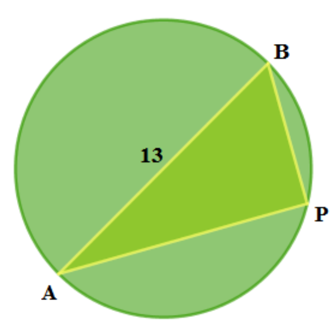


Fig 10.4

$x+12=0, \quad x-5=0$
$x=-12, \quad x=5$
ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ ಋಣವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

$BP = x\ m = 5m$
$AP = (x+7) = 5+7 = 12\ m$

$3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸಿ. ಅವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a=3, \quad b=-2, \quad c=\frac{1}{3}$
$b^2-4ac = (-2)^2 - 4(3)\left(\frac{1}{3}\right) = 4-4 = 0$
$b^2-4ac = 0$ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ
ಮೂಲಗಳು $\frac{-b}{2a}, \quad \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(3)}, \quad \frac{-(-2)}{2(3)} = \frac{2}{6}, \quad \frac{2}{6}$
$= \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.4

1. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸಿ. ಅವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$
2. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮನಾದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(k-2) + 6 = 0$
3. $800m^2$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಉದ್ದವು ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಮಾವಿನ ತೋಪನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ, ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತಹ ಸನ್ನಿವೇಶವಿರಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ. ಇಬ್ಬರು ಸ್ನೇಹಿತರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮೊತ್ತವು 20 ವರ್ಷಗಳಾಗಿವೆ. ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ, ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 48 ವರ್ಷಗಳಾಗಿತ್ತು.
5. ಸುತ್ತಳತೆ 80m ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $400m^2$ ಇರುವ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

1. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸಿ. ಅವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$
$a=2, \quad b=-3, \quad c=5$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(5)$

$\Delta = 9 - 40$
$\Delta = -31$
$\Delta < 0 \Rightarrow$ ಮೂಲಗಳು ಊಹಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

(ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

$a = 3, \quad b = -4\sqrt{3}, \quad c = 4$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4(3)(4)$
$\Delta = 48 - 48$
$\Delta = 0 \Rightarrow$ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ

ಮೂಲಗಳು $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4\sqrt{3})}{2(3)}, \frac{-(-4\sqrt{3})}{2(3)} = \frac{4\sqrt{3}}{6}, \frac{4\sqrt{3}}{6}$
$= \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

$a = 2, \quad b = -6, \quad c = 3$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-6)^2 - 4(2)(3)$
$\Delta = 36 - 24$
$\Delta = 12$
$\Delta > 0 \Rightarrow$ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಭಿನ್ನ

ಮೂಲಗಳು $= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$= \frac{-(-6)+\sqrt{12}}{2(2)}, \frac{-(-6)-\sqrt{12}}{2(2)}$
$= \frac{6+\sqrt{12}}{4}, \frac{6-\sqrt{12}}{4}$
$= \frac{6+2\sqrt{3}}{4}, \frac{6-2\sqrt{3}}{4}$
$= \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

(i) ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮನಾದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(k - 2) + 6 = 0$

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$

$a = 2, \quad b = k, \quad c = 3$
$b^2 - 4ac = 0$
$(k)^2 - 4(2)(3) = 0$
$k^2 - 24 = 0$
$k^2 = 24$
$k = \pm\sqrt{24} = \pm\sqrt{4 \times 6} = \pm 2\sqrt{6}$

(ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

$kx^2 - 2kx + 6 = 0$
$a = k, \quad b = -2k, \quad c = 6$
$b^2 - 4ac = 0$
$(-2k)^2 - 4(k)(6) = 0$
$4k^2 - 24k = 0$

$4k(k-6)=0$
$4k=0\,, k-6=0$
$k=0,\quad k=6$

(ii) $800m^2$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಉದ್ದವು ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಮಾವಿನ ತೋಪನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ, ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮಾವಿನ ತೋಟದ ಅಗಲ $= l$
ಮಾವಿನ ತೋಟದ ಉದ್ದ $= 2l$
ಮಾವಿನ ತೋಟದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಉದ್ದ × ಅಗಲ
$(l)(2l)=800$
$2l^2=800$
$l^2=\frac{800}{2}=400$
$l=\pm\sqrt{400}=\pm 20$
ಮಾವಿನ ತೋಟದ ಅಗಲ $= l = 20\text{ m}$
ಮಾವಿನ ತೋಟದ ಉದ್ದ $= 2l = 2\times 20 = 40\text{ m}$

(iii) ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತಹ ಸನ್ನಿವೇಶವಿರಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ. ಇಬ್ಬರು ಸ್ನೇಹಿತರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮೊತ್ತವು 20 ವರ್ಷಗಳಾಗಿವೆ. ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ, ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 48 ವರ್ಷಗಳಾಗಿತ್ತು.

ಒಬ್ಬ ಸ್ನೇಹಿತನ ವಯಸ್ಸು $= x$ ವಯಸ್ಸು
ಮತ್ತೊಬ್ಬ ಸ್ನೇಹಿತನ ವಯಸ್ಸು $= (20-x)$ ವಯಸ್ಸು.
4 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಮೊದಲನೆ ಸ್ನೇಹಿತನ ವಯಸ್ಸು $= (x-4)$
4 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಎರಡನೇ ಸ್ನೇಹಿತನ ವಯಸ್ಸು $= (20-x-4) = 16-x$
$(x-4)(16-x)=48$
$16x-x^2-64+4x=48$
$-x^2+20x-64-48=0$
$x^2-20x+112=0$
$a=1,\quad b=-20,\quad c=112$
$b^2-4ac=(-20)^2-4(1)(112)$
$=400-448=-48$
ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿರುವ ಸನ್ನಿವೇಶ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

(iv) ಸುತ್ತಳತೆ 80m ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $400m^2$ ಇರುವ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು l ಮತ್ತು b ಆಗಿರಲಿ.
ಸುತ್ತಳತೆ $= 2(l+b)=80$
$l+b=\frac{80}{2}=40$
$l=40-b$
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $l\times b=400$
$l(40-l)=400$
$40l-l^2=400$
$l^2-40l+400=0$
$a=1,\quad b=-40,\quad c=400$

$b^2 - 4ac = (-40)^2 - 4(1)(400) = 1600 - 1600 = 0$
$b^2 - 4ac = 0$ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ
ಮೂಲಗಳು $\frac{-b}{2a}$, $\frac{-b}{2a} = \frac{-(-40)}{2(1)}$, $\frac{-(-40)}{2(1)} = \frac{40}{2}$, $\frac{40}{26} = 20$, 20
ಆಯತದ ಉದ್ದ $l = 20\,m$
ಆಯತದ ಅಗಲ $b = 40 - l = 40 - 20 = 20m$

ಸಾರಾಂಶ:

1. x ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ a, b , c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು. $a \neq 0$
2. $ax^2 + bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ α ಗೆ $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ ಆಗ α ವನ್ನು ಆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. $ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.
3. $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ಇದನ್ನು ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದುಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.
4. ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದಲೂ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.
5. ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರ: $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಇಲ್ಲಿ $b2 - 4ac \geq 0$ ಆಗಿರಬೇಕು.
6. $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು

(i) $b^2 - 4ac > 0$ ಆದರೆ ಎರಡು ಭಿನ್ನವಾದ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
(ii) $b^2 - 4ac = 0$ ಆದರೆ ಎರಡು ಸಮನಾದ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
(iii) $b^2 - 4ac < 0$ ಆದರೆ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

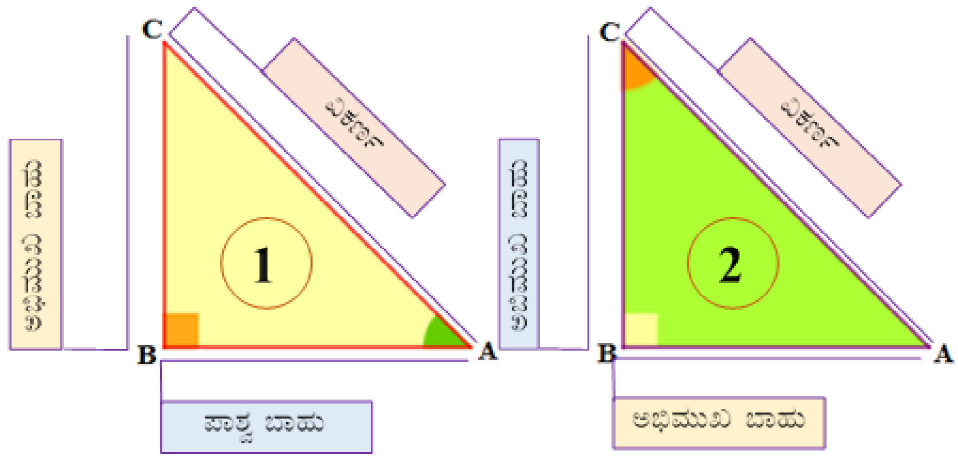
---

11 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಎಂದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವುದಾಗಿದೆ.

11.2 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.



ಒಟ್ಟು ಆರು ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಅನುಪಾತಗಳಿವೆ

ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು		ತ್ರಿಭುಜ 1	ತ್ರಿಭುಜ 2
SinA	$\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$	$\frac{BC}{AC}$	$\frac{AB}{AC}$
CosA	$\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$	$\frac{AB}{AC}$	$\frac{BC}{AB}$
Tan A	$\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$	$\frac{BC}{AB}$	$\frac{AB}{BC}$
CosecA	$\frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$	$\frac{AC}{BC}$	$\frac{AC}{AB}$
SecA	$\frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{AC}{BC}$
CotA	$\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$	$\frac{AB}{BC}$	$\frac{BC}{AB}$

ಉದಾಹರಣೆ1: $\tan A = \frac{4}{3}$ ಆದರೆ ಕೋನ A ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle ABC = 90^0$

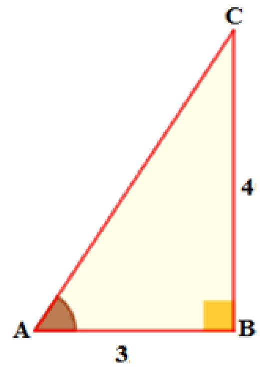


Fig 11.8

∴ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

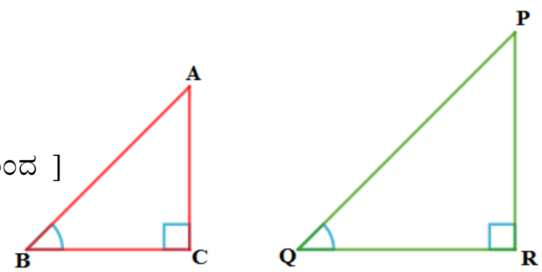
$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 4^2 + 3^3 = 16 + 9 = 25$

$\Rightarrow AC = 5$

$\text{Sin}A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$; $\text{Cos } A = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$; $\text{Tan}A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$

$\text{Cosec}A = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{4}$; $\text{Sec}A = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{3}$; $\text{Cot}A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$

ಉದಾಹರಣೆ 2: $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle Q$ ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದು, SinB = SinQ ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ $\angle B = \angle Q$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



$\text{Sin } B = \text{Sin}Q \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$

$\Rightarrow \frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k \qquad (1)$

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$

$\Rightarrow \sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2} \Rightarrow k.\sqrt{PQ^2 - PR^2}$ [(1) ರಿಂದ]

$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$

$\Rightarrow \frac{BC}{QR} = \frac{k.\sqrt{PQ^2-PR^2}}{\sqrt{PQ^2-PR^2}} = k \qquad (2)$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$

∴ $\angle$**B** = $\angle$**Q**

ಉದಾಹರಣೆ 3: ΔACB ಯಲ್ಲಿ, AB = 29 ಮಾನಗಳು, BC = 21 ಮಾನಗಳು ಮತ್ತು $\angle ABC = \theta$ (ಚಿತ್ರ 11.10 ನೋಡಿ) ಆದರೆ, ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\text{Cos}^2\theta + \text{Sin}^2\theta$

(ii) $\text{Cos}^2\theta - \text{Sin}^2\theta$

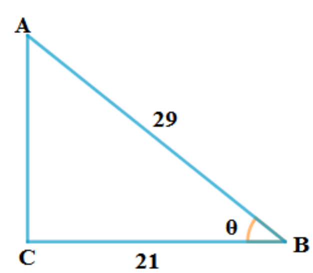


Fig 11.10

ಪರಿಹಾರ: ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ACB ಯಲ್ಲಿ,

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} \Rightarrow AC = \sqrt{29^2 - 21^2}$

$\Rightarrow AC = \sqrt{841 - 441} = \sqrt{400} = 20$

(i) $\text{Cos}^2\theta + \text{Sin}^2\theta$

$= \frac{21^2}{29^2} + \frac{20^2}{29^2} = \frac{441+400}{841} = \frac{841}{841} = 1$

(ii) $\text{Cos}^2\theta - \text{Sin}^2\theta$

$= \frac{21^2}{29^2} - \frac{20^2}{29^2} = \frac{441-400}{841} = \frac{41}{841} = 1$

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ, B ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. tan A = 1 ಆದರೆ, 2sin A cos A = 1ಆಗಿದೆಯೇ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

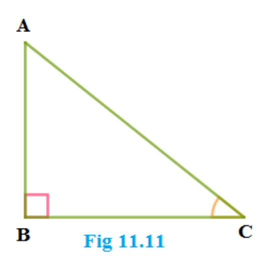


Fig 11.11

ಪರಿಹಾರ: ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ACB ಯಲ್ಲಿ,

$\tan A = 1 \Rightarrow \frac{AB}{BC} = 1 \Rightarrow AB = BC$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow AC^2 = 2AB^2 \qquad (1)$

ಈಗ, $2\sin A \cos A = 2.\frac{AB}{AC}.\frac{BC}{AC} = 2.\frac{AB^2}{AC^2} = 2.\frac{AB^2}{2AB^2} = 1$

ಉದಾಹರಣೆ 5: ΔOPQ ಯಲ್ಲಿ, P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. OP = 7cm ಮತ್ತು OQ - PQ = 1cm (ಚಿತ್ರ 11.12ನೋಡಿ) sin Q ಮತ್ತು cos Q ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

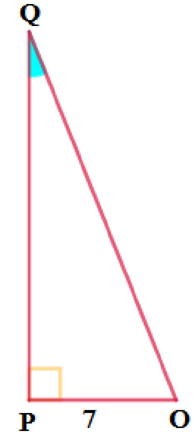


Fig 11.12

ಪರಿಹಾರ: ΔOPQ ನಲ್ಲಿ,

$OQ^2 = PQ^2 + OP^2$

$\Rightarrow (1 + PQ)^2 = PQ^2 + 7^2$

$\Rightarrow 1 + PQ^2 + 2PQ = PQ^2 + 49$

$\Rightarrow 1 + 2PQ = 49$

$\Rightarrow 2PQ = 49 - 1 = 48$

$\Rightarrow PQ = 24cm$

$\Rightarrow OQ = 1 + PQ = 1 + 24$

$\Rightarrow OQ = 25$

$\therefore \sin Q = \frac{7}{25}$ ಮತ್ತು $\cos Q = \frac{24}{25}$

ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತಗಳು		
$\frac{1}{SinA}$	$\frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$	CosecA
$\frac{1}{CosA}$	$\frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$	SecA
$\frac{1}{Tan A}$	$\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$	CotA
$\frac{1}{CosecA}$	$\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$	SinA
$\frac{1}{SecA}$	$\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$	SecA
$\frac{1}{CotA}$	$\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$	CotA

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, B ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. AB = 24cm, BC = 7cm ಆದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   i) sin A, cos A
   ii) sin C, cos C
2. ಚಿತ್ರ 11.13 ರಲ್ಲಿ tan P - cot R ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $\sin A = \frac{3}{4}$ ಆದರೆ, cos A ಮತ್ತು tan A ಬೆಲೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಿ.
4. 15 cot A = 8 ಆದರೆ, sin A ಮತ್ತು sec A ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $\sec\theta = \frac{13}{12}$ ಆದರೆ, ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle B$ ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದು $\cos A = \cos B$ ಆಗಿದೆ. $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle B$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
7. $\cot\theta = \frac{7}{8}$ ಆದರೆ, i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ ii) $\cot^2\theta$ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. $3\cot A = 4$ ಆದರೆ, $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ ಆಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.
9. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle B = 90^0$, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ಆದರೆ

   i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

   ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$ ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. ΔPQR ನಲ್ಲಿ $\angle Q = 90^0$ O, $PR + QR = 25$cm ಮತ್ತು $PQ = 5$ ಆಗಿದೆ $\sin P$, $\cos P$ ಮತ್ತು $\tan P$ ಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯೇ ಅಥವಾ ತಪ್ಪೇ ತಿಳಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

   i) $\tan A$ ಬೆಲೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

   ii) ಕೋನ A ದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ $\sec A = \frac{12}{5}$ ಆಗಿದೆ

   iii) ಕೋನ A ದ cosecant A ಅನ್ನು cos A ಎಂದು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.

   iv) cot A ಎಂಬುದು cot ಮತ್ತು A ಗಳ ನಡುವಿನ ಗುಣಲಬ್ಧ

   v) θ ದ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ $\sin\theta = \frac{4}{3}$ ಆಗಿದೆ

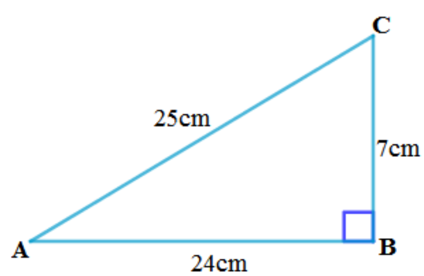
ಪರಿಹಾರ

[ಲೆಕ್ಕ ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಪಠ್ಯದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಅನುಪಾತ ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಅಳತೆಗಳನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ k ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದೆ. ಉದಾಹಣೆ $\sin A = \frac{3}{4}$ ಇದ್ದರೆ, ಅಳತೆಗಳು 3k ಮತ್ತು 4k ಇಲ್ಲಿ k ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ. ಆದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗಲಿ ಎಂಬ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ k = 1ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರುತ್ತೇನೆ]

1. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, B ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. AB = 24cm, BC = 7cm ಆದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

iii) sin A, cos A

iv) sin C, cos C



ΔABC,ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^o$

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (24)^2 + 7^2$

$= (576+49)\ cm^2 = 625\ cm^2$

$\Rightarrow AC = 25$

(i) $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$, $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$

(ii) $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$; $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$

2. ಚಿತ್ರ 11.13 ರಲ್ಲಿ tan P - cot R ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

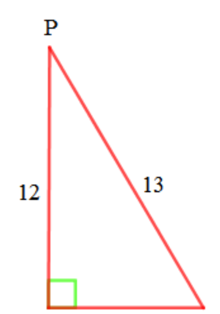


Fig 11.13

ΔPQR , ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$QR^2 = PR^2 - PQ^2 = (13)^2 - (12)^2 = 169 - 144$

$\Rightarrow QR^2 = 25 \Rightarrow QR = 5$ cm

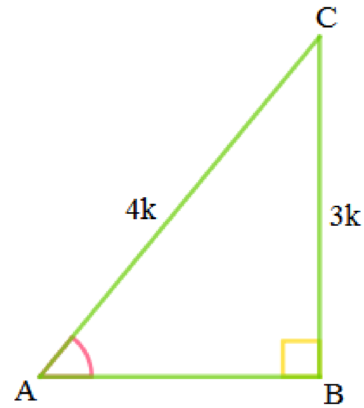
ಈಗ,

$\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$

$\cot R = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$

$\tan P - \cot R = \frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 0$

3. $\sin A = \frac{3}{4}$ ಆದರೆ, $\cos A$ ಮತ್ತು $\tan A$ ಬೆಲೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಿ.



ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^0$

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, $\sin A = \frac{3}{4} = \frac{BC}{AC}$

$\Rightarrow AC = 4k, BC = 3k$ [ಇಲ್ಲಿ k = 1 ಆಗಿರಲಿ]

$\therefore$ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$AB^2 = AC^2 - BC^2$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 - BC^2$

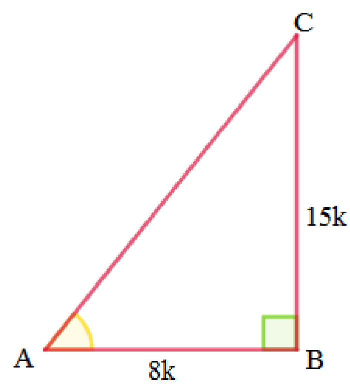
$AB^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

$\Rightarrow AB = \sqrt{7}$

$\therefore \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan A = \frac{Bc}{AB} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

4. $15 \cot A = 8$ ಆದರೆ, $\sin A$ ಮತ್ತು $\sec A$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, $\cot A = \frac{8}{15} = \frac{BC}{AB}$

ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^0$

$BC = 15k, AB = 8k$ [ಇಲ್ಲಿ k = 1 ಆಗಿರಲಿ]

$\therefore$ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$

$\Rightarrow AC = 17$

$\Rightarrow \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{15}{17}$; $\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{17}{8}$

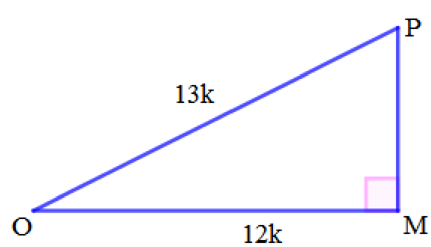
5. $\sec \theta = \frac{13}{12}$ ಆದರೆ, ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, $\sec \theta = \frac{13}{12} = \frac{OP}{OM}$

ΔPMO ಯಲ್ಲಿ $\angle M = 90^0$

$OM = 12k, OP = 13k$ [ಇಲ್ಲಿ k = 1 ಆಗಿರಲಿ]

$\therefore$ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,



$PM^2 = OP^2 + OM^2$

$PM^2 = 13^2 + 12^2 = 169 - 144 = 25$

$\Rightarrow AC = 5$

$\sin \theta = \frac{MP}{OP} = \frac{5}{13}$

$\cos \theta = \frac{OM}{OP} = \frac{12}{13}$

$\tan \theta = \frac{MP}{OM} = \frac{5}{12}$

$\cot \theta = \frac{OM}{MP} = \frac{12}{5}$

$\text{cosec } \theta = \frac{OP}{MP} = \frac{13}{5}$

6. ∠A ಮತ್ತು ∠B ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದು cos A = cos B ಆಗಿದೆ. ∠A ಮತ್ತು ∠B ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

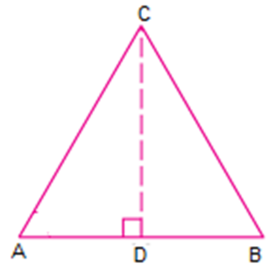
ΔABC ಯಲ್ಲಿ CD ⊥ AB.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, cos A = cos B

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$

$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$

$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = k$ ಆಗಿರಲಿ.



$\Rightarrow AD = kBD$ (1)

$\Rightarrow AC = kBC$ (2)

ΔCAD ಮತ್ತು ΔCBD ಗಳಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$CD^2 = AC^2 - AD^2$ (3)

$CD^2 = BC^2 - BD^2$ (4)

(iii) ಮತ್ತು (iv) ರಿಂದ,

$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$

$\Rightarrow (kBC)^2 - (k\,BD)^2 = BC^2 - BD^2$

$\Rightarrow k^2 (BC^2 - BD^2) = BC^2 - BD^2$

$\Rightarrow k^2 = 1$

$\Rightarrow k = 1$

k = 1 ಎಂದು (ii) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

AC = BC

$\Rightarrow \angle A = \angle B$ [ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮ]

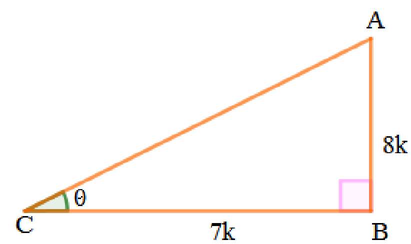
7. $\cot\theta = \frac{7}{8}$ ಆದರೆ, i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ ii) $\cot^2\theta$ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

Δ ABC ಯಲ್ಲಿ ∠B = 90º ಮತ್ತು ∠C = θ

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,

$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{8} \Rightarrow AB = 8$ ಮತ್ತು BC = 7 [k = 1 ಆದಾಗ]

Δ ABCಯಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,



$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 8^2 + 7^2$

$AC^2 = 64 + 49$

$AC^2 = 113$

$AC = \sqrt{113}$

$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{\sqrt{113}}$ ಮತ್ತು $\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{\sqrt{113}}$

(i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

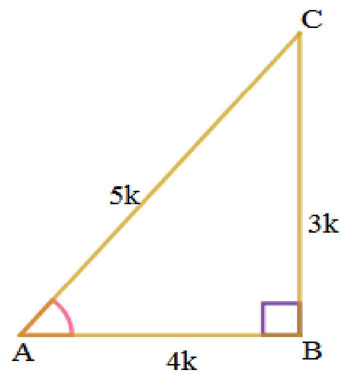
$= \frac{1-\left(\frac{8}{\sqrt{113}}\right)^2}{1-\left(\frac{7}{\sqrt{113}}\right)^2} = \frac{1-\frac{64}{113}}{1-\frac{49}{113}}$

$= \frac{\frac{113-64}{113}}{\frac{113-49}{113}} = \frac{\frac{49}{113}}{\frac{64}{113}} = \frac{49}{64}$

$\cot^2\theta = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$

8. $3 \cot A = 4$ ಆದರೆ, $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ ಆಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^o$



ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,

$\cot A = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow AB = 4$ ಮತ್ತು $BC = 3$, [$k = 1$ ಆಗಿರಲಿ]

Δ ABCಯಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 4^2 + 3^2$

$AC^2 = 16 + 9$

$AC^2 = 25$

$AC = 5$

$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$

$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$

$$LHS = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{\frac{16-9}{16}}{\frac{16+9}{16}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{25}$$

$$R.H.S. = \cos^2 A - \sin^2 A = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$\Rightarrow$R.H.S. = L.H.S.

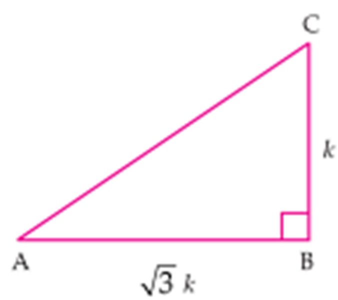
$\therefore \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$

9. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle B = 90^0$, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ಆದರೆ

i) sin A cos C + cos A sin C

ii) cos A cos C - sin A sin C ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^o$



ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,

$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Let $AB = \sqrt{3}$ ಮತ್ತು $BC = 1$ಆಗಿರಲಿ,

Δ ABCಯಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = (\sqrt{3})^2 + (1)^2$

$AC^2 = 3 + 1$

$AC^2 = 4$

$AC = 2$

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$; $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

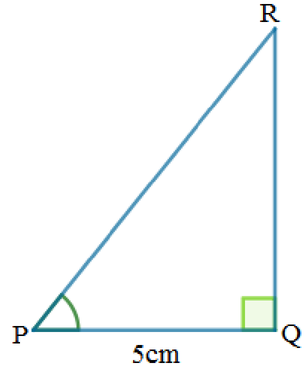
(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

10. ΔPQR ನಲ್ಲಿ $\angle Q = 90^0$ O, $PR + QR = 25cm$ ಮತ್ತು $PQ = 5$ ಆಗಿದೆ sin P, cos P ಮತ್ತು tan P ಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ, $PR + QR = 25$, $PQ = 5$

$PR = x$ ಆಗಿರಲಿ. $\therefore QR = 25 - x$



ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$x^2 = (5)^2 + (25 - x)^2$

$x^2 = 25 + 625 + x^2 - 50x$

$50x = 650$

$x = 13$

$\therefore PR = 13$ cm

$QR = (25 - 13)$ cm $= 12$ cm

$\sin P = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$

$\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$

$\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$

11. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯೇ ಅಥವಾ ತಪ್ಪೇ ತಿಳಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) tan A ಬೆಲೆಯು ಯಾವಗಲೂ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ii) ಕೋನ A ದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ sec A $=\frac{12}{5}$ ಆಗಿದೆ

iii) ಕೋನ A ದ cosecant A ಅನ್ನು cos A ಎಂದು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.

iv) cot A ಎಂಬುದು cot ಮತ್ತು A ಗಳ ನಡುವಿನ ಗುಣಲಬ್ಧ

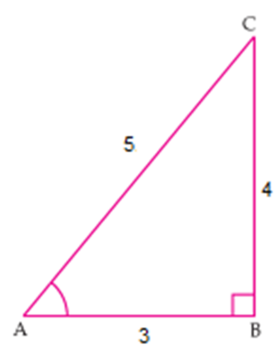
v) θ ದ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ $\sin\theta = \frac{4}{3}$ ಆಗಿದೆ

(i) ತಪ್ಪು.

ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle B = 90^0$,

$AB = 3$, $BC = 4$ ಮತ್ತು $AC = 5$ ಆಗಿರಲಿ.

$\tan A = \frac{4}{3} > 1$



(ii) ಸರಿ

ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle B = 90^0$,

$AC = 13k$ ಮತ್ತು $AB = 5k$ [k ಒಂದು ಧನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ]

$\Rightarrow AC = 12, BC = 5$ ಮತ್ತು $AB = 5$ [$k = 1$ ಆದಾಗ]

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$BC^2 = AC^2 - AB^2$

$BC^2 = 12^2 - 5^2$

$BC^2 = 144 - 25$

$BC^2 = 119$

$\Rightarrow \sec A = \frac{12}{5}$

(iii) ತಪ್ಪು

cosecantA ಸಂಕ್ಷೇಪ್ತವಾಗಿ cosec A ಬದಲು ಮತ್ತು cos A ಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪ್ತವಾಗಿ cosine ಬದಲು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.

(iv) ತಪ್ಪು

cot A ಯು cot ಮತ್ತು A ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಲ್ಲ. cotangent $\angle A$ ಯ ಕೋಟಿಸ್ಪರ್ಶಕ.

(v) ತಪ್ಪು

$\sin\theta = \frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣವು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹು.

$\therefore \sin\theta$ ಯಾವಾಗಲೂ < 1

$\sin\theta = \frac{4}{3}$, θ ದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

11.3 ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

45^0 ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle B = 90^0$,

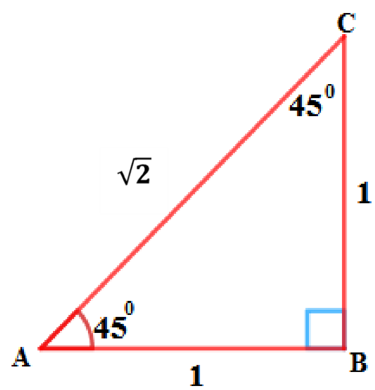
ಒಂದು ಕೋನವು $\angle A = 45^0 \Rightarrow \angle C = 45^0$ [ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^0]

$\Rightarrow AB = BC = 1$ ಆಗಿರಲಿ,

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 1^2 + 1^2 = 1+1 = 2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{2}$



$\text{Sin}45^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\text{Cosec}45^0$	$\sqrt{2}$
$\text{Cos}45^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\text{Sec}45^0$	$\sqrt{2}$
$\text{Tan}45^0$	1	$\text{Cot}45^0$	1

30^0 ಮತ್ತು 60^0 ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಕೋನದ ಅಳತೆಯು 60^0

$\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 60^0$

$AD \perp BC$ ಎಳೆದಿದೆ.

$\Rightarrow BD = CD$ [ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಶೃಂಗದಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಬಾಹುವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.]

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD = 30^0$

$AB = BC = CA = 2$ ಆಗಿರಲಿ,

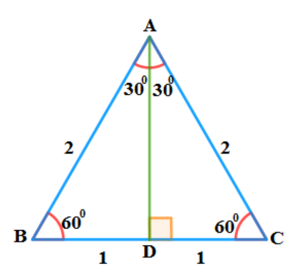
$\Rightarrow BD = CD = 1$

ΔABD ಯಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$AD^2 = AB^2 - BD^2$

$AD^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

$\Rightarrow AD = \sqrt{3}$

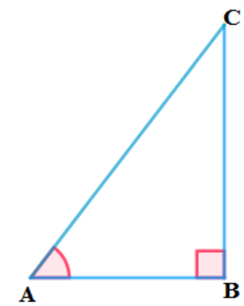


$\text{Sin}60^0$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{Cosec}60^0$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\text{Cos}60^0$	$\frac{1}{2}$	$\text{Sec}60^0$	2
$\text{Tan}60^0$	$\sqrt{3}$	$\text{Cot}60^0$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\text{Sin}30^0$	$\frac{1}{2}$	$\text{Cosec}30^0$	2
$\text{Cos}30^0$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{Sec}30^0$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\text{Tan}30^0$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\text{Cot}30^0$	$\sqrt{3}$

0^0 ಮತ್ತು 90^0 ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

$\angle A$ ಯು 0^0 ಗೆ ಸಮೀಪವಾದಂತೆ BC = 0 ಆಗುತ್ತದೆ.
ಮತ್ತು AB = AC ಆಗುತ್ತದೆ.
AB = AC = 1ಮತ್ತು BC = 0



$Sin0^0$	0	$Cosec0^0$	ND
$Cos0^0$	1	$Sec0^0$	1
$Tan0^0$	0	$Cot0^0$	ND

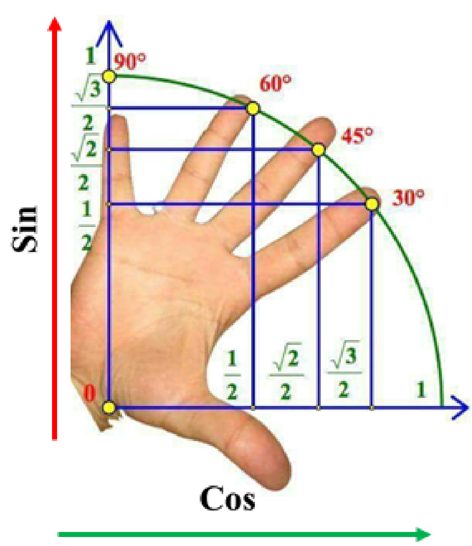
$\angle A$ ಯು 90^0 ಗೆ ಸಮೀಪವಾದಂತೆ AB = 0 ಆಗುತ್ತದೆ.
ಮತ್ತು AC = AC ಆಗುತ್ತದೆ.
AB = AC = 1ಮತ್ತು BC = 0

$Sin90^0$	0	$Cosec90^0$	ND
$Cos90^0$	1	$Sec90^0$	1
$Tan90^0$	0	$Cot90^0$	ND

ಕೋಷ್ಟಕ 11.1

$\angle A$	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ND
osec	ND	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
Sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	ND
Cot	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ಕುತೂಹಲಕ್ಕಾಗಿ



ಉದಾಹರಣೆ 6: ΔABC ಯಲ್ಲಿ, B ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. AB = 5cm ಮತ್ತು ACB =30^0 (ಚಿತ್ರ 11.19 ನೋಡಿ) BC ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

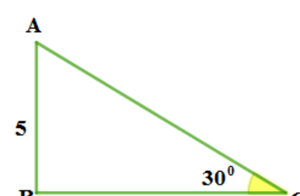


Fig 11.19

$Tan30^0 = \frac{5}{BC} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{BC} \Rightarrow 5\sqrt{3}cm$

$Sin30^0 = \frac{5}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{AC} \Rightarrow AC = 10cm$

ಉದಾಹರಣೆ 7: ΔPQR ನಲ್ಲಿ, $\angle Q = 90^0$, PQ = 3cm, ಮತ್ತು PR = 6cm. $\angle QPR$ ಮತ್ತು $\angle PRQ$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

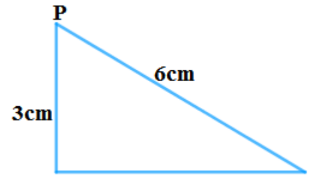


Fig 11.20

$\mathrm{Sin}R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \angle R = 30^0 \Rightarrow \angle PRQ = 30^0$

$\therefore \angle QPR = 60^0$

ಉದಾಹರಣೆ 8: $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, $0 < A + B \leq 90$, $A > B$ ಆಗಿದ್ದರೆ, A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\sin(A - B) = \frac{1}{2}$ ಆದರೆ $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A - B = 30^0$ (1)

$\cos(A + B) = \frac{1}{2}$ ಆದರೆ $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A + B = 60^0$ (2)

(1) + (2)

$= 2A = 90^0 \Rightarrow A = 45^0$

(2) ರಿಂದ $\Rightarrow 45^0 - B = 30^0 \Rightarrow B = 15^0$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $\sin 60^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$

ii) $2\tan^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 60^0$

iii) $\frac{\cos 45^0}{\cos 30^0 + \mathrm{cosec}\, 30^0}$ iv) $\frac{\mathrm{Sin}30^0 + \tan 45^0 - \mathrm{Cosec}45^0}{\mathrm{Sec}30^0 + \cos 60^0 + \cot 45^0}$

iv) $\frac{5\mathrm{Cos}^2 60^0 + 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\mathrm{Sin}^2 30^0 + \cos^2 60^0}$

2. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ, ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) $\frac{2\tan 30^0}{1 + \tan^2 30^0}$

A) $\sin 60^0$ B) $\cos 60^0$ C) $\tan 60^0$ D) $\sin 30^0$

ii) $\frac{1 - \tan^2 45^0}{1 + \tan^2 45^0}$

A) $\tan 90^0$ B) 1 C) $\sin 45^0$ D) 0

iii) sin 2A = 2 sin A ಎಂಬುದು A ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

A) 0 B) 30 C) 45 D) 60

iv) $\frac{2\tan 30^0}{1 - \tan^2 30^0}$

A) $\cos 60^0$ B) $\sin 60^0$ C) $\tan 60^0$ D) $\sin 30^0$

3. $\tan(A + B) = \sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $0 < A + B \leq 90$; $A > B$ ಆದರೆ, A ಮತ್ತು B ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ತಿಳಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) sin (A + B) = sin A + sin B

ii) θ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ $\sin\theta$ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

iii) θ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ $\cos\theta$ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

iv) θ ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $\sin\theta = \cos\theta$ ಆಗಿದೆ

v) $A = 0^0$ ಗೆ cot A ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿಲ್ಲ

ಪರಿಹಾರ

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $\sin 60^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$

ii) $2\tan^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 60^0$

iii) $\frac{\cos 45^0}{\sec 30^0+\text{cosec } 30^0}$ iv) $\frac{\text{Sin}30^0+\tan 45^0-\text{Cosec}45^0}{\text{Sec}30^0+\cos 60^0+\cot 45^0}$

iv) $\frac{5\text{Cos}^2 60^0+4\sec^2 30^0-\tan^2 45^0}{\text{Sin}^2 30^0+\cos^2 30^0}$

i) $\sin 60^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

ii) $2\tan^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 60^0$

$= 2\,(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= 2$

iii) $\frac{\cos 45^0}{\text{Sec } 30^0+\text{cosec } 30^0}$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(2+2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}} \text{ x } \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{18}}{(2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{6})^2}$

$= \frac{2\sqrt{6}-6\sqrt{2}}{4\text{x}2-4\text{x}6} = \frac{2(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{8-24} = \frac{2(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{-16} = \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{-8}$

$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$

iv) $\frac{\text{Sin}30^0+\tan 45^0-\text{Cosec}60^0}{\text{Sec}30^0+\cos 60^0+\cot 45^0}$

$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)+1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}+1}$

$= \frac{\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4+\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}$

$= \frac{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}-4}{4+3\sqrt{3}}$

$= \frac{3\sqrt{3}-4}{4+3\sqrt{3}} \text{ x } \frac{4-3\sqrt{3}}{4-3\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}-16-9\sqrt{9}+12\sqrt{3}}{(4)^2-(3\sqrt{3})^2}$

$= \frac{12\sqrt{3}-16-27+12\sqrt{3}}{16-27} = \frac{24\sqrt{3}-43}{-11} = \frac{43-24\sqrt{3}}{11}$

iv) $\frac{5\text{Cos}^2 60^0+4\sec^2 30^0-\tan^2 45^0}{\text{Sin}^2 30^0+\cos^2 30^0}$

$= \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{15+64-12}{12}}{1} = \frac{67}{12}$

2. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ, ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) $\frac{2\tan 30^0}{1+\tan^2 30^0}$

A) sin 60⁰ B) cos 60⁰ C) tan 60⁰ D) sin 30⁰

$= \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ans: A) sin 60⁰

ii) $\frac{1-\tan^2 45^0}{1+\tan^2 45^0}$

A) tan 90⁰ B) 1 C) sin 45⁰ D) 0

$\frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

Ans: D) 0

iii) sin 2A = 2 sin A ಎಂಬುದು A ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

A) 0 B) 30 C) 45 D) 60

sin 2x0 = 2 sin 0

= sin 0 = 2 sin0

= 0 = 0 = 0

Ans: A) 0

iv) $\frac{2\tan 30^0}{1-\tan^2 30^0}$

A) $\cos 60^0$ B) $\sin 60^0$ C) $\tan 60^0$ D) $\sin 30^0$

$\frac{2x\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Ans: C) tan 60⁰

3. $\tan (A+B) = \sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\tan (A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $0 < A + B \leq 90$; $A > B$ ಆದರೆ, A ಮತ್ತು B ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\tan (A+B) = \sqrt{3} \Rightarrow A + B = 60^0$ (1)

$\tan (A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A - B = 30^0$ (2)

$(2) - (1) \Rightarrow 2B = 30^0 \Rightarrow B = 15^0$

(1) ರಿಂದ $A = 60 - 15 = 45^0$

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ತಿಳಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) sin (A + B) = sin A + sin B

$A = 30^0$ ಮತ್ತು $B = 90^0$ ಆಗಿರಲಿ

$\sin (30^0 + 60^0) = \sin 90^0 = 1$

$\sin 30^0 + \sin 60^0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin (A+B) \neq \sin A + \sin B$

∴ ಹೇಳಿಕೆ ತಪ್ಪು.

ii) θ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ sin θ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

$\sin 0^0 = 0$, $\sin 90^0 = 1$

∴ ಹೇಳಿಕೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

iii) θ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ cos θ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

$\cos 0^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$

θ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ cos θ ಬೆಲೆಯು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿದೆ.

∴ ಹೇಳಿಕೆ ತಪ್ಪು.

iv) θ ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ sin θ = cos θ ಆಗಿದೆ

$\sin 30^0 = \frac{1}{2}$; $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

⇒θ ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ sin θ = cos θ ಆಗಿಲ್ಲ

∴ ಹೇಳಿಕೆ ತಪ್ಪು.

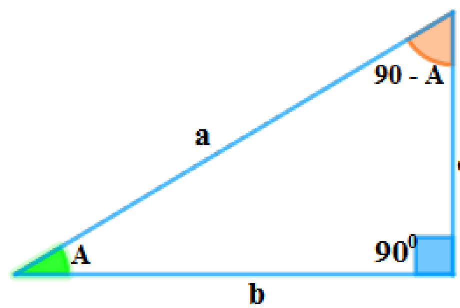
v) $A = 0^0$ ಗೆ cot A ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿಲ್ಲ

ಹೇಳಿಕೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

11.4 ಪೂರಕ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 90 ಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವು ಪೂರಕ ಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಅನುಪಾತಗಳು		ಪೂರಕ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಅನುಪಾತಗಳು
SinA	$\frac{c}{a}$	Cos(90-A)
CosA	$\frac{b}{a}$	Sin(90-A)
TanA	$\frac{c}{b}$	Cot(90-A)
CosecA	$\frac{a}{c}$	Sec(90-A)
SecA	$\frac{a}{b}$	Cosec(90-A)
CotA	$\frac{b}{c}$	Tan(90-A)



ಉದಾಹರಣೆ 9: ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ :-$\frac{\tan 65^0}{\cot 25^0}$

$\frac{\tan 65^0}{\cot 25^0} = \frac{\tan (90-25)^0}{\cot 25^0} = \frac{\cot 25^0}{\cot 25^0} = 1$

ಉದಾಹರಣೆ 10: $\sin 3A = \cos (A - 26^0)$, 3A ಲಘು ಕೋನವಾದರೆ, A ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತದ ಪ್ರಕಾರ $\sin 3A = \cos (A - 26)$

$\Rightarrow \text{Cos}(90-3A) = \cos(A-26^0)$

$\Rightarrow 90-3A = A-26^0$

$\Rightarrow 90 + 26 = A + 3A$

$\Rightarrow 116 = 4A$

$\Rightarrow A = 29^0$

ಉದಾಹರಣೆ 11: $\cot 85^0 + \cos 75^0$ ನ್ನು, 0^0 ಮತ್ತು 45^0 ನಡುವಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\cot 85^0 = \text{Cot}(90-5^0) = \tan 5^0$

$\text{Cos}75^0 = \text{Cos}(90 -15^0) = \text{Sin}15^0$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

1. ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ:– i) $\frac{\sin 18^0}{\cos 72^0}$ ii) $\frac{\sin 26^0}{\cos 64^0}$ iii) $\cos 48^0 - \sin 42^0$ vi) $\text{cosec}31^0 - \sec 59^0$
2. i) $\tan 48^0 \tan 23^0 \tan 42^0 \tan 67^0 = 1$
   ii) $\cos 38^0 \cos 52^0 - \sin 38^0 \sin 52^0 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
3. tan 2A = cot (A - 180) ಮತ್ತು 2A ಲಘು ಕೋನವಾಗಿದೆ. A ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. If tan A = cot B, A + B = 90^0 0 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ
5. sec 4A = cosec (A - 20^0) ಮತ್ತು 4A ಒಂದು ಲಘುಕೋನ ಆದರೆ A ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ΔABC ಯ ಒಳಕೋನಗಳಾದರೆ, $\sin\frac{(B+C)}{2} = \cos\frac{A}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
7. $\text{Sin}67^0 + \cos 75^0$ ನ್ನು, 0^0 ಮತ್ತು 45^0 ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

1. ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ:– i) $\frac{\sin 18^0}{\cos 72^0}$ ii) $\frac{\sin 26^0}{\cos 64^0}$ iii) $\cos 48^0 - \sin 42^0$ vi) $\text{cosec}31^0 - \sec 59^0$

i) $\frac{\sin 18^0}{\cos 72^0}$

$\frac{\sin 18^0}{\cos 72^0} = \frac{\sin(90-72^0)}{\cos 72^0} = \frac{\cos 72^0}{\cos 72^0} = 1$

ii) $\frac{\sin 26^0}{\cos 64^0}$

$\frac{\sin 26^0}{\cos 64^0} = \frac{\sin(90-64^0)}{\cos 64^0} = \frac{\cos 64^0}{\cos 64^0} = 1$

iii) $\cos 48^0 - \sin 42^0$

$\cos 48^0 - \sin(90\text{-}48^0) = \cos 48^0 - \cos 48^0 = 0$

vi) $\text{cosec}31^0 - \sec 59^0$

$\text{cosec}31^0 - \sec 59^0 = \text{cosec}31^0 - \sec(90 - 31^0) = \text{cosec}31^0 - \text{cosec}31^0 = 0$

2. i) $\tan 48^0 \tan 23^0 \tan 42^0 \tan 67^0 = 1$
ii) $\cos 38^0 \cos 52^0 - \sin 38 =^0 \sin 52^0 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

i) $\tan 48^0 \tan 23^0 \tan 42^0 \tan 67^0 = 1$

LHS = $\tan 48^0 \tan 23^0 \tan(90\text{-}48^0) \tan(90\text{-}23^0)$

= $\tan 48^0 \tan 23^0 \cot 48^0 \cot 23^0$

= $\tan 48^0 \text{ x } \tan 23^0 \text{ x } \frac{1}{\tan 48^0} \text{ x } \frac{1}{\tan 23^0} = 1$

ii) $\cos 38^0 \cos 52^0 - \sin 38^0 \sin 52^0 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

LHS = $\cos 38^0 \cos 52^0 - \sin 38^0 \sin 52^0$

= $\cos 38^0 \cos 52^0 - \sin(90 - 52^0) \sin(90\text{-}38)^0$

= $\cos 38^0 \cos 52^0 - \cos 52^0 \cos 38^0$

= $\cos 38^0 \cos 52^0 - \cos 52^0 \cos 38^0$

= 0 **RHS**

3. tan 2A = cot (A - 180) ಮತ್ತು 2A ಲಘು ಕೋನವಾಗಿದೆ. A ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

tan 2A = cot (A - 18^0)

$\Rightarrow \cot(90\text{-}2A) = \cot(A\text{-}18^0)$

$\Rightarrow 90^0 \text{ -}2A = A\text{-}18^0$

$\Rightarrow 3A = 108^0 \quad \Rightarrow A = 36^0$

4. If tan A = cot B, A + B = 90⁰ 0 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

LHS = tan A = cot B

$\Rightarrow \cot(90-A) = \cot B$

$\Rightarrow 90 - A = B \Rightarrow A + B = 90^0$

5. sec 4A = cosec (A - 20⁰) ಮತ್ತು 4A ಒಂದು ಲಘುಕೋನ ಆದರೆ A ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^0)$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}(90 - 4A) = \operatorname{cosec}(A - 20^0)$

$\Rightarrow 90 - 4A = A - 20^0$

$\Rightarrow 5A = 110$

$\Rightarrow A = 22^0$

6. A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ΔABC ಯ ಒಳಕೋನಗಳಾದರೆ, $\sin\frac{(B+C)}{2} = \cos\frac{A}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

A , B ಮತ್ತು C ಗಳು ΔABC ಯ ಒಳಕೋನಗಳು

$\Rightarrow A + B + C = 180^0$

$\Rightarrow B + C = 180 - A$

$\Rightarrow \frac{B+C}{2} = \frac{180-A}{2} \quad \Rightarrow \frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2}$

$\Rightarrow \sin\frac{(B+C)}{2} = \sin\left(90 - \frac{A}{2}\right)$

$\Rightarrow \sin\frac{(B+C)}{2} = \cos\frac{A}{2}$

7. Sin67⁰ + cos75⁰ ನ್ನು, 0⁰ ಮತ್ತು 45⁰ ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

$\sin 67^0 + \cos 75^0$

$= \sin(90-23^0) + \cos(90-15^0)$

$= \cos 23^0 + \sin 15^0$

11.5 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು

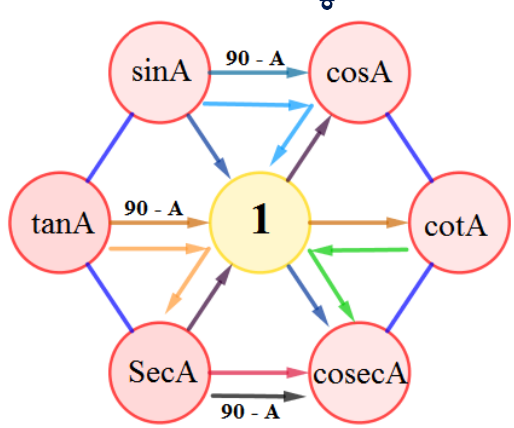
ಒಂದು ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\tan^2 + 1 = \sec^2 A$

$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

ಕುತೂಹಲಕ್ಕಾಗಿ



ನೆನಪಿಡಿ

$\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$

$\frac{\cos A}{\sin A} = \cot A$

ಉದಾಹರಣೆ 12: cos A, tan A ಮತ್ತು sec A ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು sin A ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

$\Rightarrow \cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

$\cos A = \sqrt{1 - \sin 2A}$

$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \Rightarrow \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin 2A}}$

$\sec A = \frac{1}{\cos A} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \sin 2A}}$

ಉದಾಹರಣೆ 13: sec A (1 - sin A)(sec A + tan A) = 1 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಎಡಭಾಗ = sec A (1 - sin A)(sec A + tan A)

$= \frac{1}{\cos A}(1 - \sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$

$= \left(\frac{1 - \sin A}{\cos A}\right)\left(\frac{1+\sin A}{\cos A}\right)$

$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1$

ಉದಾಹರಣೆ 14: $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

$\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$

$= \frac{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)} = = \frac{\frac{1}{\sin A} - 1}{\frac{1}{\sin A} + 1} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

ಉದಾಹರಣೆ 15: $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಬಳಸಿ, $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}} = \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$

$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1} \text{ x } \frac{\tan\theta - \sec\theta}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(\tan\theta - \sec\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)(\tan\theta - \sec\theta)}$

$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)(\tan\theta - \sec\theta)}$

$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)(\tan\theta - \sec\theta)}$

$= \frac{-1}{(\tan\theta - \sec\theta)}$

$= \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.4

1. sin A, sec A ಮತ್ತು tan A ಈ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು cot A ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.
2. $\angle A$ ದ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು sec A ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ
3. ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ:

   i) $\frac{\sin^2 63^0 + \sin^2 27^0}{\cos^2 17^0 + \cos^2 73^0}$

   ii) $\sin 25^0 \cos 65^0 + \cos 25^0 \sin 65^0$
4. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

   i) $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$

   A) 1 B) 9 C) 8 D) 0

   ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta) =$

   A) 0 B) 1 C) 2 D) -1

   (iii) (secA + tanA) (1 - sinA) =

   A) secA B) sinA C) cosecA D) cosA

   iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} =$

   A) $\sec^2 A$ B) -1 C) $\cot^2 A$ D) $\tan^2 A$

5. ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

i) $(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1+\sec\theta.\cos\theta$

[ಸುಳುಹು: sin θ ಮತ್ತು cos θ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಿ]

iv) $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A} = 2\sec A$

[ಸುಳುಹು: ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ]

v) $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ,

$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

vi) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

vii) $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

ix) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

[ಸುಳುಹು: ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ]

x) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

ಪರಿಹಾರ

1. sinA, secA ಮತ್ತು tanA ಈ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು cotA ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

$\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 A} = 1 + \cot^2 A$

$\Rightarrow \sin^2 A = \frac{1}{1+\cot^2 A}$

$\Rightarrow \sin A = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$

$\sin^2 A = \frac{1}{1+\cot^2 A}$

$\Rightarrow 1 - \cos^2 A = \frac{1}{1+\cot^2 A}$

$\Rightarrow \cos^2 A = 1 - \frac{1}{1+\cot^2 A}$

$\Rightarrow \cos^2 A = \frac{1+\cot^2 A - 1}{1+\cot^2 A}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sec^2 A} = \frac{\cot^2 A}{1+\cot^2 A}$

$\Rightarrow \sec^2 A = \frac{1+\cot^2 A}{\cot^2 A}$

$\Rightarrow \sec A = \frac{\pm\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

$\Rightarrow \tan A = \frac{1}{\cot A}$

2. $\angle$A ದ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು sec A ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$\sec A = \frac{1}{\cos A}$

$\Rightarrow \mathbf{\cos A = \frac{1}{\sec A}}$

$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

$\Rightarrow \sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$\Rightarrow \sin^2 A = 1 - \frac{1}{\sec^2 A}$

$\Rightarrow \sin^2 A = \frac{\sec^2 A - 1}{\sec^2 A}$

$\Rightarrow \mathbf{\sin A = \frac{\pm\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}}$

$\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$

$\Rightarrow \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$

$\Rightarrow \mathbf{\operatorname{cosec} A = \frac{\pm \sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}}$

$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

$\Rightarrow \tan^2 A = \sec^2 A + 1$

$\Rightarrow \mathbf{\tan A = \sqrt{\sec^2 A + 1}}$

$\tan A = \frac{1}{\cot A}$

$\Rightarrow \cot A = \frac{1}{\tan A}$

$\Rightarrow \mathbf{\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A + 1}}}$

3. ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ:

i) $\frac{\sin^2 63^0 + \sin^2 27^0}{\cos^2 17^0 + \cos^2 73^0}$

ii) $\sin 25^0 \cos 65^0 + \cos 25^0 \sin 65^0$

i) $\frac{\sin^2 63^0 + \sin^2 27^0}{\cos^2 17^0 + \cos^2 73^0}$

$= \frac{\sin^2(90-27^0) + \sin^2 27^0}{\cos^2(90-73^0) + \cos^2 73^0}$

$= \frac{\cos^2 27^0 + \sin^2 27^0}{\sin^2 73^0 + \cos^2 73^0}$

$= \frac{1}{1} = 1$

ii) $\sin 25^0 \cos 65^0 + \cos 25^0 \sin 65^0$

$\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

$= \sin(90°-25°) \cos 65° + \cos(90°-65°) \sin 65°$

$= \cos 65° \cos 65° + \sin 65° \sin 65°$

$= \cos^2 65° + \sin^2 65° = 1$

4. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$

A) 1 B) 9 C) 8 D) 0

$9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$

$= 9 (\sec^2 A - \tan^2 A)$

$= 9 \times 1 = 9$ $[\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1]$

Ans: B) 9

ii) **(1 + tan θ + sec θ) (1 + cot θ - cosec θ) =**

A) 0 B) 1 C) 2 D) -1

(1 + tan θ + sec θ) (1 + cot θ - cosec θ)

$=\left(1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\right)$

$=\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}\times\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}$

$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)^2-1}{\cos\theta.\sin\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta+sin^2\theta+\ 2\cos\theta\sin\theta-1}{\cos\theta.\sin\theta}$

$=\frac{1+\ 2\cos\theta\sin\theta-1}{\cos\theta.\sin\theta}$

$=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta.\sin\theta}=2$

Ans C) 2

iii) (secA + tanA) (1 - sinA) =

A) secA B) sinA C) cosecA D) cosA

(secA + tanA)(1 - sinA)

(secA + tanA) (1 - sinA)

$=\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$(1 - sinA)

$=\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)$ (1 - sinA)

$=\frac{1-\sin^2 A}{\cos A}$

$=\frac{\cos^2 A}{\cos A}=\cos A$

Ans: D) cosA

iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=$

A) $\sec^2 A$ B) -1 C) $\cot^2 A$ D) $\tan^2 A$

$\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$

$=\frac{1+\frac{1}{\cot^2 A}}{1+\cot^2 A}$

$=\frac{\cot^2 A+1}{\cot^2 A}$ x $\frac{1}{1+\cot^2 A}$

$=\frac{1}{\cot^2 A}=\tan^2 A$

Ans: D) $\tan^2$ A

5. ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

i) $(\text{cosec }\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

L.H.S. = $(\text{cosec }\theta - \cot\theta)^2$

$= (\text{cosec}^2\theta + \cot^2\theta - 2\text{cosec }\theta\cot\theta)$

$=\left(\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)$

$=\left(\frac{1+\cos^2\theta-2\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\right)$

$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ RHS

ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

L.H.S. $= \frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A}$

$= \frac{\cos^2 A+(1+\sin A)^2}{(1+\sin A)\cos A}$

$= \frac{\cos^2 A+1+\sin^2 A+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$

$= \frac{1+1+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$

$= \frac{2+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$

$= \frac{2(1+\sin A)}{(1+\sin A)\cos A} \quad = \frac{2}{\cos A}$

$= 2\sec A =$ R.H.S.

iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1+\sec\theta.\cos\theta$

[ಸುಳುಹು: $\sin\theta$ ಮತ್ತು $\cos\theta$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಿ]

L.H.S. $= \frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$

$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}$

$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$

$= \frac{1}{(\sin\theta-\cos\theta)}\left[\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right]$

$= \frac{1}{(\sin\theta-\cos\theta)}\left[\frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\cos\theta.\sin\theta}\right]$

$= \frac{1}{(\sin\theta-\cos\theta)}\left[\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)}{\cos\theta.\sin\theta}\right]$

$= \left[\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta.\sin\theta}\right]$

$= \left[\frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta.\sin\theta}\right]$

$= \left[\frac{1}{\cos\theta.\sin\theta} + 1\right]$

$= 1 + \sec\theta\ \mathrm{cosec}\ \theta =$ R.H.S.

iv) $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A} = 2\sec A$

[ಸುಳುಹು: ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ]

L.H.S. = $\frac{1+\sec A}{\sec A}$

$= \frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} \quad = \frac{\frac{\cos A+1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$

$= \frac{\cos A+1}{\cos A} \times \frac{\cos A}{1}$

= cos A + 1

R.H.S. = $\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

$= \frac{(1+\cos A)(1-\cos A)}{1-\cos A}$

= cos A + 1

L.H.S. = R.H.S.

v) $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ,

$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \text{cosec } A + \cot A$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

L.H.S. = $\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1}$

ಛೇದ ಮತ್ತು ಅಂಶಗಳಿಗೆ sin A ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$= \frac{\frac{\cos A - \sin A + 1}{\sin A}}{\frac{\cos A + \sin A - 1}{\sin A}}$

$= \frac{\cot A - 1 + \text{cosec} A}{\cot A + 1 - \text{cosec} A}$

$= \frac{\cot A - \text{cosec}^2 A + \cot^2 A + \text{cosec} A}{\cot A + 1 - \text{cosec} A}$ (using $\text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$)

$= \frac{\cot A + \text{cosec} A - (\text{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{\cot A + 1 - \text{cosec} A}$

$= \frac{(\cot A + \text{cosec} A)(1 - \text{cosec} A - \cot A)}{1 - \text{cosec} A + \cot A}$

= cot A + cosec A = R.H.S.

vi) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

$= \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A} \times \frac{1+\sin A}{1+\sin A}}$

$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$

$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}} = \frac{1+\sin A}{\cos A}$

$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$

= secA + tanA=RHS

vii) $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

L.H.S. = $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta[1 - 2(1 - \cos^2\theta)]}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta[1-2+2\cos^2\theta]}{\cos\theta(2\cos^2\theta-1)}$

$= \frac{\sin\theta[2\cos^2\theta-1]}{\cos\theta(2\cos^2\theta-1)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \tan\theta$ = R.H.S.

viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

L.H.S. $= (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$

$= \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2\sin A \operatorname{cosec} A + \cos^2 A + \sec^2 A + 2\cos A \sec A$

$= (\sin^2 A + \cos^2 A) + 2\sin A\left(\frac{1}{\sin A}\right) + 2\cos A\left(\frac{1}{\cos A}\right) + 1 + \tan^2 A + 1 + \cot^2 A$

$= 1 + 2 + 2 + 2 + \tan^2 A + \cot^2 A$

$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$ = R.H.S.

ix) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

[ಸುಳುಹು: ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ]

L.H.S. $= (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A)$

$= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A} - \cos A\right)$

$= \left(\frac{\cos^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{\sin^2 A}{\cos A}\right)$

$= \cos A \sin A$

R.H.S. $= \frac{1}{\tan A + \cot A}$

$= \frac{1}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A . \sin A}}$

$= \frac{1}{\frac{1}{\cos A . \sin A}}$

$= \cos A . \sin A$

L.H.S. = R.H.S.

x) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

L.H.S. $= \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$

$= \frac{1+\tan^2 A}{1+\frac{1}{\tan^2 A}} = \frac{1+\tan^2 A}{\frac{\tan^2 A + 1}{\tan^2 A}}$

$= \frac{1+\tan^2 A}{\frac{1+\tan^2 A}{\tan^2 A}} = \tan^2 A$

$\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{1-\frac{1}{\tan A}}\right)^2$

$= \left(\frac{1-\tan A}{\frac{\tan A - 1}{\tan A}}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{\frac{-(1-\tan A)}{\tan A}}\right)^2$

$= (-\tan A)^2 = \tan^2 A$

ಸಾರಾಂಶ:

1. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^0$

SinA	$\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$
CosA	$\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$
Tan A	$\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$

$\frac{1}{\text{SinA}}$	$\frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$	**CosecA**
$\frac{1}{\text{CosA}}$	$\frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$	**SecA**
$\frac{1}{\text{Tan A}}$	$\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$	**CotA**

3. ಲಘುಕೋನದ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಆ ಕೋನದ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

5. sin A ಅಥವಾ cos A ಬೆಲೆಯು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಆದರೆ, sec A ಅಥವಾ cosec A ಬೆಲೆಯು ಯಾವಾಗಲು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ 1 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

6. $\sec^2 A - \tan^2 A = 1, 0^0 \leq A < 90^0$

$\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A, 0^0 \leq A < 90^0$

12 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳು

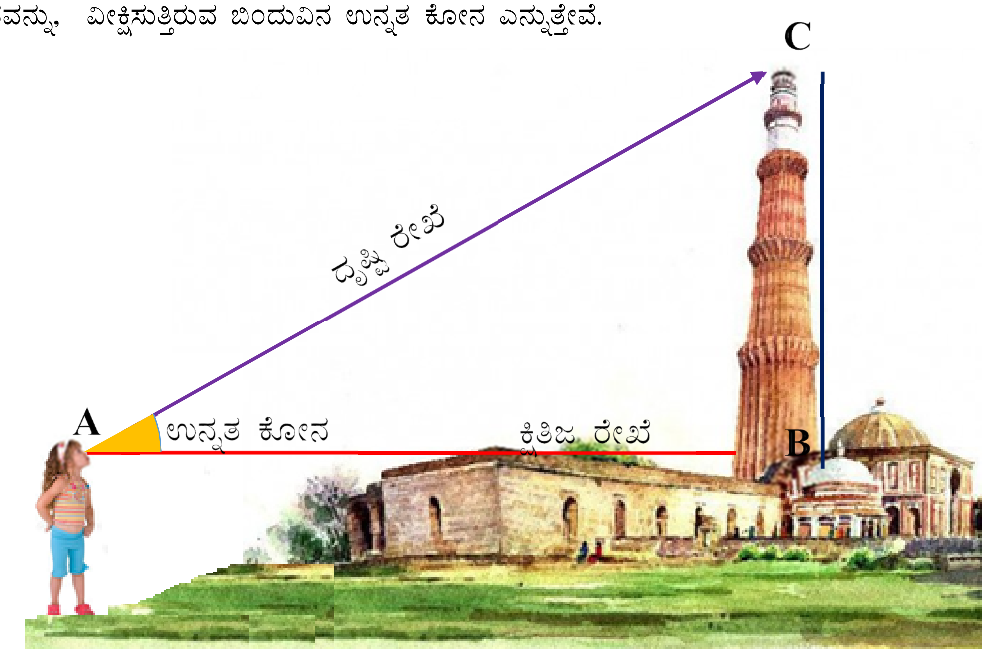
ಜಗತ್ತಿನ ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಪಂಡಿತರು ಅಭ್ಯಾಸಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಒಂದು ಪುರಾತನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯೂ ಒಂದು. 11ನೇ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದ್ದದರಿಂದ ಇದರ ಅನ್ವೇಷಣೆಯಾಯಿತು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು, ಭೂಮಿಯಿಂದ ಗ್ರಹಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ನಕ್ಷತ್ರಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು ಭೂಗೋಳ ಮತ್ತು ಸಮುದ್ರಯಾನದಲ್ಲಿ ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ನಕ್ಷೆಗಳ ರಚನೆ, ಅಕ್ಷಾಂಶ ಮತ್ತು ರೇಖಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ದ್ವೀಪಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು.

[ಸಮೀಕ್ಷಾ ಸಾಧನ, ಇದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ತತ್ವಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ಭ್ರಮಿಸುವ ಟೆಲಿಸ್ಕೋಪ್(ದೂರದರ್ಶಕ) ದೊಂದಿಗೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.]

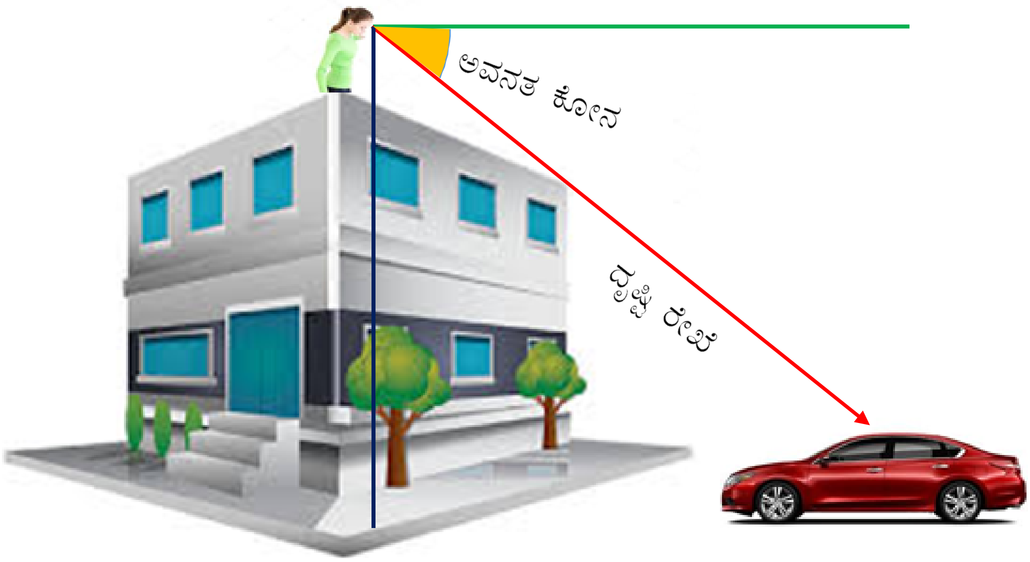
ಭಾರತದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು 19ನೇ ಶತಮಾನದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಮೀಕ್ಷಾ ಯೋಜನೆಯೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಎರಡು ಬೃಹತ್ ಥಿಯೋಡಲೈಟ್‌ಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಗಿತ್ತು. 1852 ರಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಸಮೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಪಂಚದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಪರ್ವತದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಯಿತು. ಸುಮಾರು 160 km ದೂರದಿಂದ, 6 ವಿವಿಧ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಲಾಗಿತ್ತು. ಪರ್ವತದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಥಿಯೋಡಲೈಟ್ಸ್‌ಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಸರ್ ಜಾರ್ಜ್ ಎವರೆಸ್ಟ್ ರವರ ಹೆಸರಲ್ಲಿ ಈ ಪರ್ವತವನ್ನು ಮೌಂಟ್ ಎವರೆಸ್ಟ್ ಪರ್ವತ ಎಂದು 1856 ರಲ್ಲಿ ಕರೆಯಲಾಯಿತು.

12.2 ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರ

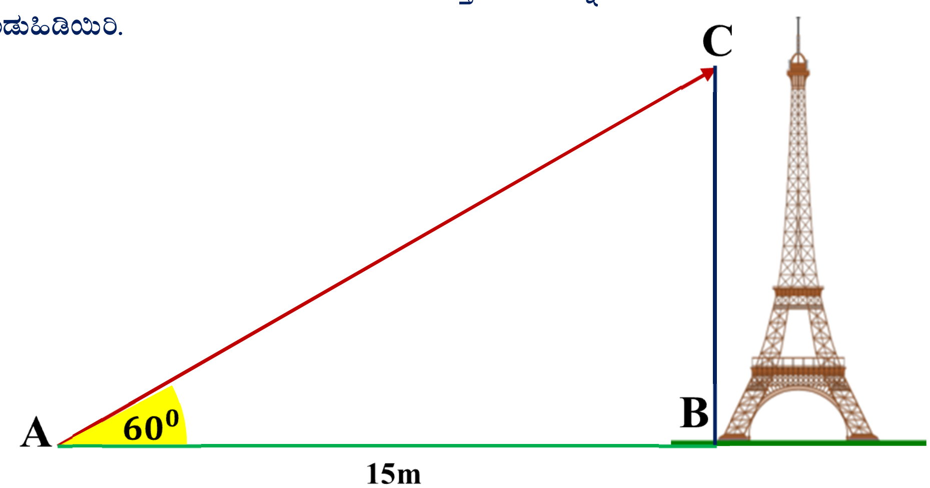
ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆಯು ವೀಕ್ಷಕನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ, ವೀಕ್ಷಕನು ಗಮನಿಸುತ್ತಿರುವ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಮೇಲೆತ್ತಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು, ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಕೆಳಗಿದ್ದರೆ ಅಂದರೆ, ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿಳಿಸಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡರೇಖೆ ನಡುವೆ ಉಂಟಾದ ಕೋನವನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಅವನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ಗೋಪುರವು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ನೇರವಾಗಿ ನಿಂತಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ 15m ದೂರದ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = BC ಆಗಿರಲಿ. AB = 15m

$\tan 60^0 = \frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{BC}{15}$

$\Rightarrow BC = 15\sqrt{3}$ m

ಉದಾಹರಣೆ 2: ವಿದ್ಯುಚ್ಛಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರೊಬ್ಬರು 5m ಎತ್ತರದ ಕಂಬದ ಮೇಲೆ ವಿದ್ಯುತ್ ದೋಷವನ್ನು ದುರಸ್ತಿ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಕಂಬದ ಮೇಲ್ತುದಿಯಿಂದ 1.3m ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪಿ, ಅವರು ದುರಸ್ತಿ ಕಾರ್ಯ ಮಾಡಬೇಕಿದೆ (ಚಿತ್ರ 12.5 ನೋಡಿ). ಕ್ಷಿತಿಜಕ್ಕೆ 60^0 ಕೋನ ಏರ್ಪಡುವಂತೆ ಓರೆಯಾಗಿ ಏಣಿಯನಿಟ್ಟು ಅವರು ತಲುಪಬೇಕಾದ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಲು ಬೇಕಾದ ಏಣಿಯ ಉದ್ದವೇನು? ಹಾಗೆಯೇ ಕಂಬದ ಪಾದದಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಏಣಿಯ ಪಾದವಿರಬೇಕು? (ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ $\sqrt{3}$ = 1.73 ಎಂದು ಬಳಸಬಹುದು)

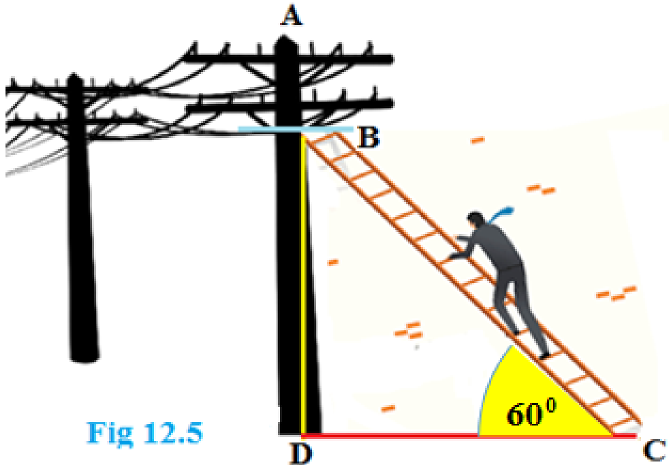


Fig 12.5

ಕಂಬದ ಎತ್ತರ AD = 5m; ದುರಸ್ತಿ ಮಾಡಬೇಕದ ಕಂಬದ ಎತ್ತರ BD = 5 – 1.3 = 3.7m

ಏಣಿಯ ಎತ್ತರ BC = ?. ಕಂಬದ ಬುಡದಿಂದ ಏಣಿಯ ಪಾದಕ್ಕಿರುವ ದೂರ CD=?

$\text{Sin } 60^0 = \frac{BD}{BC}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3.7}{BC} \Rightarrow BC = \frac{3.7x2}{\sqrt{3}} = \frac{7.4}{\sqrt{3}} \text{ m} \approx \frac{740}{173} = 4.28\text{m}$

$\text{Tan}60^0 = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3.7}{CD} = \frac{3.7}{\sqrt{3}} \text{ m} \approx 2.14\text{m}$

∴ ಏಣಿಯ ಎತ್ತರ BC = 4.28m ಮತ್ತು ಕಂಬದ ಬುಡದಿಂದ ಏಣಿಯ ಪಾದಕ್ಕಿರುವ ದೂರ CD = 2.14m

ಉದಾಹರಣೆ 3: 1.5m ಎತ್ತರವಿರುವ ವೀಕ್ಷಕರೊಬ್ಬರು ಚಿಮಣಿಯಿಂದ 28.5m ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದಾರೆ. ಚಿಮಣಿಯ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಅವರ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45 ಆಗಿದೆ. ಚಿಮಣಿಯ ಎತ್ತರವೇನು?

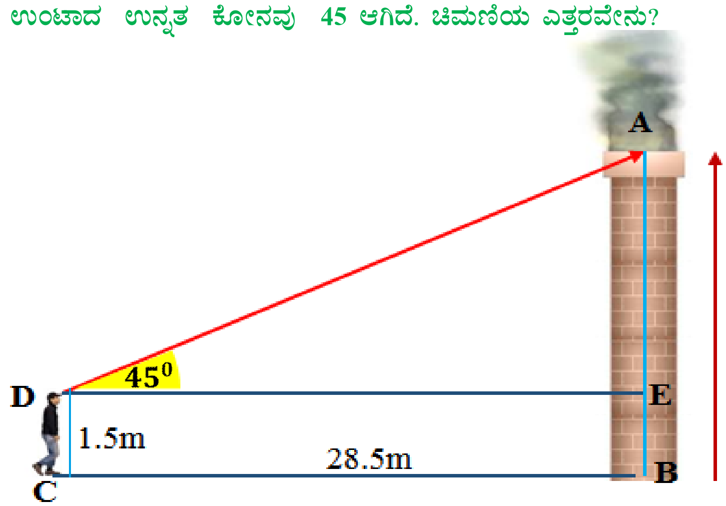


Fig 12.6

ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಎತ್ತರ CD = BE = 1.5m, ಚಿಮಿಣಿಯಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಿ ಇರುವ ದೂರ DE = CB = 28.5m;

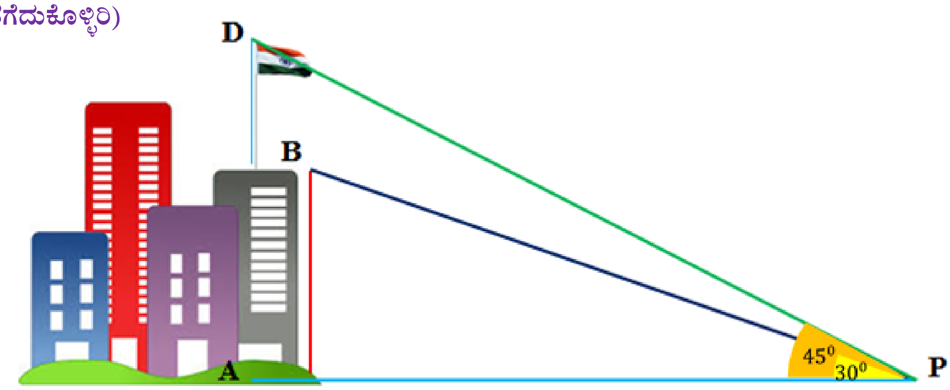
ಚಿಮಿಣಿಯ ಎತ್ತರ AB = ?

$\tan 45^0 = \frac{AE}{DE}$

$\Rightarrow 1 = \frac{AE}{28.5} \Rightarrow AE = 28.5\text{m}$

∴ ಚಿಮಿಣಿಯ ಎತ್ತರ AB = AE + BE = 28.5 + 1.5 = 30m

ಉದಾಹರಣೆ 4: ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು P ನಿಂದ 10m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲೆ ಧ್ವಜವನ್ನು ಹಾರಿಸಿದೆ ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಈ ಧ್ವಜ ಸ್ತಂಭದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45^0. ಹಾಗಾದರೆ ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಉದ್ದವನ್ನು ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕಟ್ಟಡಕ್ಕಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\sqrt{3}$ = 1.732 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ)



ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ AB = 10m

$\text{Tan}30^0 = \frac{AB}{AP} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP} \Rightarrow AP = 10\sqrt{3} = 10\text{x}1.732 = 17.32\text{m}$

$\text{Tan}45^0 = \frac{AD}{AP} \Rightarrow 1 = \frac{AD}{17.32} \Rightarrow AD = 17.32\text{m}$

$\therefore$ ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ = AD – AB = 17.32 – 10 = 7.32m

ಉದಾಹರಣೆ 5: ನೆಲದ ಮೇಲೆ ನೇರವಾಗಿ ನಿಂತ ಸ್ತಂಭವೊಂದರ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು, ಸೂರ್ಯನೆಡೆಗಿನ ಕೋನವು 60 ಇದ್ದಾಗ ಉಂಟಾದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ, 30 ಇದ್ದಾಗ ಉಂಟಾದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು 40m ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

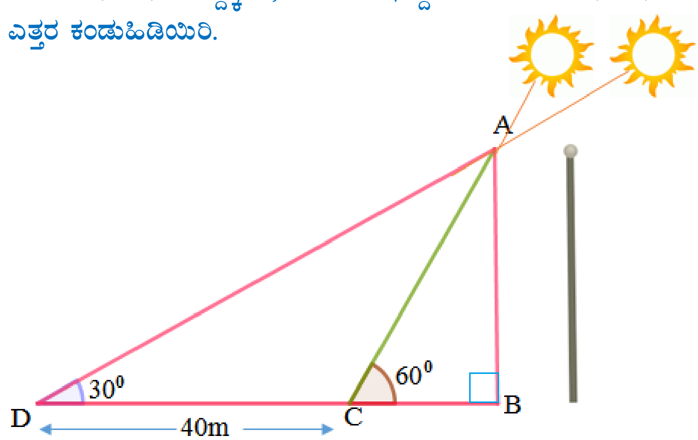


Fig 12.8

ಸೂರ್ಯನೆಡೆಗೆ 60^0 ಕೋನವಿದ್ದಾಗ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ BC = x ಮೀ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore$ಸೂರ್ಯನೆಡೆಗೆ 30^0 ಇದ್ದಾಗ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ BD = (40 + x)m

$\tan60^0 = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{x} \Rightarrow AB = \sqrt{3}x$ -------------------------- (1)

$\tan30^0 = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{40+x} \Rightarrow 40+x = \sqrt{3}AB$

$\Rightarrow 40 + x = \sqrt{3} . \sqrt{3}x$

$\Rightarrow 40 + x = 3x$

$\Rightarrow 2x = 40 \Rightarrow x = 20\text{m}$

$\therefore$ (1) $\Rightarrow AB = \sqrt{3}x \Rightarrow AB = 20\sqrt{3}$ m

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಒಂದು ಬಹುಮಹಡಿ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲಿನಿಂದ 8m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಮೇಲ್ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30^0 ಮತ್ತು 45^0 ಆಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಬಹುಮಹಡಿ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಆ ಎರಡೂ ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

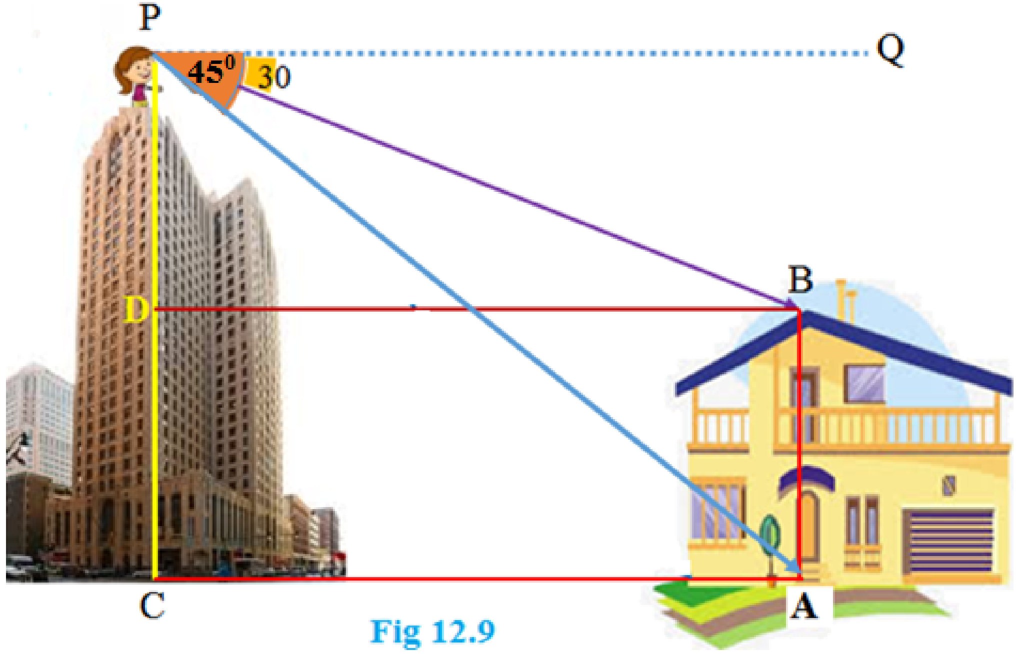


Fig 12.9

ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ = AB = 8m

ಬಹು ಮಹಡಿ ಕಟ್ಟದದ ಎತ್ತರ PC = PD + CD = PD + AB = PD + 8m ------------ (1)

ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = AC = BD

PQ∥BD,

$\therefore \angle BPQ = \angle PBD$ [ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು]

$\therefore \tan 30^0 = \frac{PD}{BD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{PD}{BD}$

$\Rightarrow BD = \sqrt{3}PD$ ------------------------(2)

PQ∥AC,

$\therefore \angle APQ = \angle PAC$ [ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು]

$\therefore \tan 45^0 = \frac{PC}{AC} \Rightarrow 1 = \frac{PD+8}{\sqrt{3}PD}$ [(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ]

$\Rightarrow \sqrt{3}PD = PD + 8$

$\Rightarrow PD(\sqrt{3} - 1) = 8$

$\Rightarrow PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{2} = 4(\sqrt{3} + 1)$

$\therefore$ ಬಹು ಮಹಡಿ ಕಟ್ಟದದ ಎತ್ತರ PC $= PD + 8m = 4(\sqrt{3} + 1) + 8 = 4\sqrt{3} + 12 = 4(3 + \sqrt{3})m$

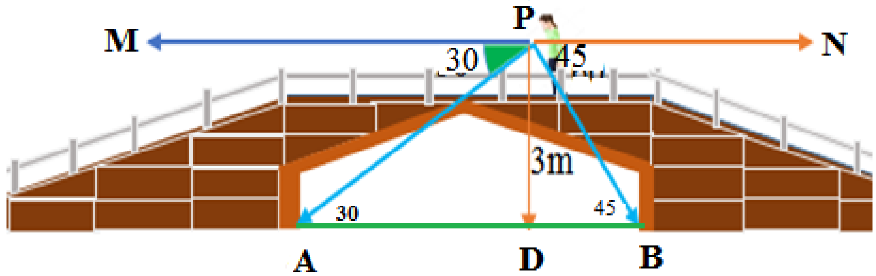
$\therefore$ ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = ಬಹು ಮಹಡಿ ಕಟ್ಟದದ ಎತ್ತರ $= 4(3 + \sqrt{3})m$

[ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = **AC = BD**

$\Rightarrow$ **BD** $= 4\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$ [(2) ರಿಂದ]

$\Rightarrow$ **BD** $= 4(3 + \sqrt{3})$m]

ಉದಾಹರಣೆ 7: ನದಿಗೆ ಕಟ್ಟಲಾದ ಸೇತುವೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ನದಿಯ ಎರಡೂ ಪಾರ್ಶ್ವದ ದಡಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30^0 ಮತ್ತು 45^0 ಆಗಿವೆ. ಸೇತುವೆಯು ದಡದ ಮೇಲಿನಿಂದ 3 m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ನದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ನದಿಯ ಅಗಲ = AD + BD

MN∥AB ⇒ $\angle MPA = \angle A = 30^0$ ಮತ್ತು $\angle NPD = \angle B = 45^0$ [ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು]

$\tan 30^0 = \frac{PD}{AD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD}$

$\Rightarrow AD = 3\sqrt{3}$ m ---------------------(1)

$\text{Tan}45^0 = \frac{PD}{BD} \Rightarrow 1 = \frac{3}{BD} \Rightarrow BD = 3\text{m}$ --------------------(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

ನದಿಯ ಅಗಲ = $AD + BD = 3\sqrt{3} + 3 = 3(\sqrt{3} + 1)\text{m}$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

1. ಒಬ್ಬ ಸರ್ಕಸಿನ ಕಲಾವಿದನು, ನೇರ ಸ್ತಂಭದಿಂದ ಹಿಗ್ಗಿಸಿ ನೆಲಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿರುವ 20 m ಉದ್ದದ ಹಗ್ಗದ ಮೇಲೆ ಹತ್ತುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ನೆಲದೊಂದಿಗೆ ಹಗ್ಗದ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 30^0 ಆದರೆ, ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 12.11 ನೋಡಿ)
2. ಬಿರುಗಾಳಿಗೆ ಸಿಕ್ಕಿ ಒಂದು ಮರವು ಮುರಿದು, ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿದಾಗ ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 30 ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ ಮತ್ತು ಮರದ ತುದಿಯು ಮರದ ಬುಡದಿಂದ 8m ದೂರದಲ್ಲಿ ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮುರಿದು ಬೀಳುವ ಮುನ್ನ ಮರದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟಿತ್ತೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಗುತ್ತಿಗೆದಾರರೊಬ್ಬರು ಉದ್ಯಾನವನದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳಿಗಾಗಿ ಎರಡು ಜಾರುಬಂಡೆಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಯೋಜಿಸುತ್ತಾರೆ. 5 ವರ್ಷದ ಕೆಳಗಿನ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಇಳಿಜಾರು ಸುಮಾರು 1.5m ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ನೆಲಕ್ಕೆ 30^0 ಓರೆ ಕೋನ ಉಂಟಾಗುವಂತೆ ಹಾಗೂ ಹಿರಿಯ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಜಾರುಬಂಡೆ ಸುಮಾರು 3m ಎತ್ತರ ಹಾಗೂ ನೆಲಕ್ಕೆ 60^0 ಓರೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಇಷ್ಟಪಡುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಜಾರುಬಂಡೆಯ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?
4. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ 30m ದೂರದ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಗೋಪುರದ ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಆದರೆ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಗಾಳಿಪಟವೊಂದು ನೆಲದ ಮೇಲಿನಿಂದ 60m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಹಾರಾಡುತ್ತಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಲಾದ ದಾರವನ್ನು ತಾತ್ಕಾಲಿಕವಾಗಿ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಗೂಟಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿದೆ. ದಾರವು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 60^0 ಯ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ. ದಾರವು ಸಡಿಲವಾಗಿಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ, ದಾರದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. 1.5m ಎತ್ತರದ ಹುಡುಗನೊಬ್ಬ 30m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡದಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ. ಕಟ್ಟಡದ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ನಡೆದು ಹೋಗುವಾಗ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಅವನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಯಿಂದ 60^0ಗೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನು ಕಟ್ಟಡದ ಕಡೆಗೆ ಎಷ್ಟು ದೂರ ನಡೆದು ಬಂದಿದ್ದಾನೆ?

7. 20m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾದ ಪ್ರಸರಣೆಯ ಗೋಪುರವೊಂದರ (transmission tower) ಮೇಲ್ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದಗಳ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60^0 ಮತ್ತು 45^0 ಇದೆ. ಪ್ರಸರಣೆಯ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. 1.6m ಎತ್ತರದ ಪ್ರತಿಮೆಯೊಂದನ್ನು ಒಂದು ಪೀಠದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರತಿಮೆಯ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಮತ್ತು ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪೀಠದ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45^0 ಆಗಿದೆ. ಪೀಠದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಮೇಲ್ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಮತ್ತು ಕಟ್ಟದದ ಪಾದದಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60 ಇದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ 50m ಇದ್ದರೆ, ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. 80 ಅಡಿ ಅಗಲವುಳ್ಳ ರಸ್ತೆಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಎತ್ತರವಿರುವ 2 ಕಂಬಗಳು ಅಭಿಮುಖವಾಗಿ ನಿಂತಿವೆ. ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಕಂಬದ ಮೇಲ್ತುದಿಗಳ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60^0 ಮತ್ತು 30^0 ಆಗಿದೆ. ಕಂಬಗಳ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಕಂಬಗಳಿಂದ ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. ಒಂದು ಕಾಲುವೆಯ ದಡದ ಮೇಲೆ ದೂರದರ್ಶನದ ಗೋಪುರವೊಂದು ನೇರವಾಗಿ ನಿಂತಿದೆ. ಗೋಪುರಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾದ ಮತ್ತೊಂದು ದಡದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಆಗಿದೆ. ಇದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಪಾದವನ್ನು ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ 20ಟ ದೂರದ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 12.12 ನೋಡಿ). ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಕಾಲುವೆಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. 7m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದಕ್ಕೆ ಅವನತ ಕೋನವು 45^0 ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಿಂದ 75m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವ ದೀಪಸ್ತಂಭವೊಂದರ ಮೇಲಿನಿಂದ ಎರಡು ಹಡಗುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30^0 ಮತ್ತು 45^0 ಆಗಿದೆ. ದೀಪಸ್ತಂಭದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹಡಗಿನ ಹಿಂದೆ ಮತ್ತೊಂದಿದ್ದರೆ ಎರಡು ಹಡಗುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
14. 1.2m ಎತ್ತರದ ಹುಡುಗಿಯು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 88.2m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಬಲೂನ್‌ಗಳೆರಡು ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿ ತೇಲುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಒಂದು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಹುಡುಗಿಯ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಬಲೂನ್‌ಗೆ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಸ್ವಲ್ಪ ಸಮಯದ ನಂತರ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಆಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 12.13 ನೋಡಿ). ಈ ಸಮಯದ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಬಲೂನ್ ಚಲಿಸಿದ ದೂರವೆಷ್ಟು?
15. ಒಂದು ನೇರ ಹೆದ್ದರಿಯೂ ಗೋಪುರದ ಪಾದಕ್ಕೆ ದಾರಿಯಾಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತ ವ್ಯಕ್ತಿಯೊಬ್ಬರು ಏಕರೂಪ ಜವದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತಿರುವ ಕಾರೊಂದನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾರೆ. ಕಾರಿನ ಅವನತ ಕೋನವು 30^0 ಆಗಿದೆ. 6 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ ಕಾರಿನ ಅವನತ ಕೋನವು 60^0 ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಬರಲು ಕಾರು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯವೆಷ್ಟು?
16. ಗೋಪುರವೊಂದರ ಪಾದದಿಂದ 4m ಮತ್ತು 6m ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪೂರಕಗಳಾಗಿವೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು 6m ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

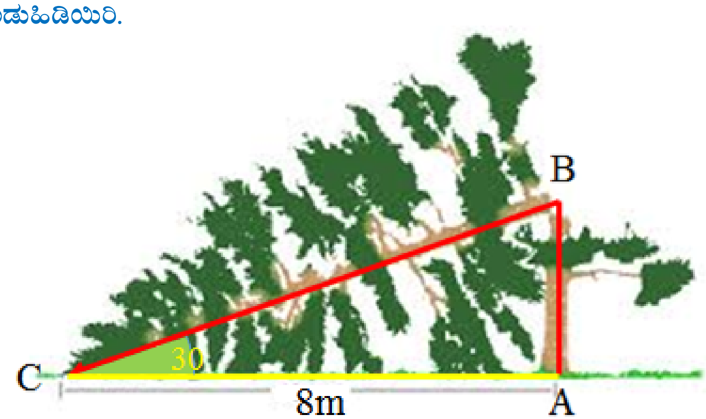
1. ಒಬ್ಬ ಸರ್ಕಸಿನ ಕಲಾವಿದನು, ನೇರ ಸ್ತಂಭದಿಂದ ಹಿಗ್ಗಿಸಿ ನೆಲಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿರುವ 20m ಉದ್ದದ ಹಗ್ಗದ ಮೇಲೆ ಹತ್ತುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ನೆಲದೊಂದಿಗೆ ಹಗ್ಗದ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 30^0 ಆದರೆ, ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 12.11 ನೋಡಿ)

ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ BC

$\text{Sin}30^0 = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{20} \Rightarrow BC = 10m$

$\therefore$ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ $BC = 10m$

2. ಬಿರುಗಾಳಿಗೆ ಸಿಕ್ಕಿ ಒಂದು ಮರವು ಮುರಿದು, ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿದಾಗ ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 30 ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ ಮತ್ತು ಮರದ ತುದಿಯು ಮರದ ಬುಡದಿಂದ 8m ದೂರದಲ್ಲಿ ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮುರಿದು ಬೀಳುವ ಮುನ್ನ ಮರದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟಿತ್ತೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



BC ಯು ಮರದ ಮುರಿದ ಭಾಗವಾಗಿರಲಿ.

$\therefore$ ಮರದ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ $= AB+BC$

$\cos 30° = \frac{AC}{BC}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{BC}$

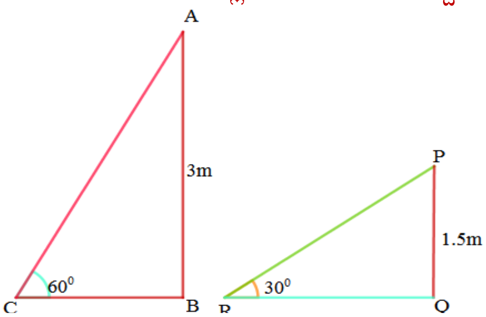
$\Rightarrow BC = \frac{16}{\sqrt{3}}$

$\tan 30° = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{8} \Rightarrow AB = \frac{8}{\sqrt{3}}$ m

∴ ಮರದ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ $= AB + BC = \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$m

3. ಗುತ್ತಿಗೆದಾರರೊಬ್ಬರು ಉದ್ಯಾನವನದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳಿಗಾಗಿ ಎರಡು ಜಾರುಬಂಡೆಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಯೋಜಿಸುತ್ತಾರೆ. 5 ವರ್ಷದ ಕೆಳಗಿನ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಇಳಿಜಾರು ಸುಮಾರು 1.5m ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ನೆಲಕ್ಕೆ 30^0 ಓರೆ ಕೋನ ಉಂಟಾಗುವಂತೆ ಹಾಗೂ ಹಿರಿಯ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಜಾರುಬಂಡೆ ಸುಮಾರು 3m ಎತ್ತರ ಹಾಗೂ ನೆಲಕ್ಕೆ 60^0 ಓರೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಇಷ್ಟಪಡುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಜಾರುಬಂಡೆಯ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?



60^0 ಓರೆ ಕೋನವಿರುವ ಇಳಿಜಾರಿನ ಉದ್ದ = AC

$30°$ ಓರೆ ಕೋನವಿರುವ ಇಳಿಜಾರಿನ ಉದ್ದ = PR ಆಗಿರಲಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,

ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ,

$\sin 30° = \frac{PQ}{PR} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1.5}{PR}$

$\Rightarrow PR = 3m$

ಲಂಬಕೋನ ΔPQRನಲ್ಲಿ,

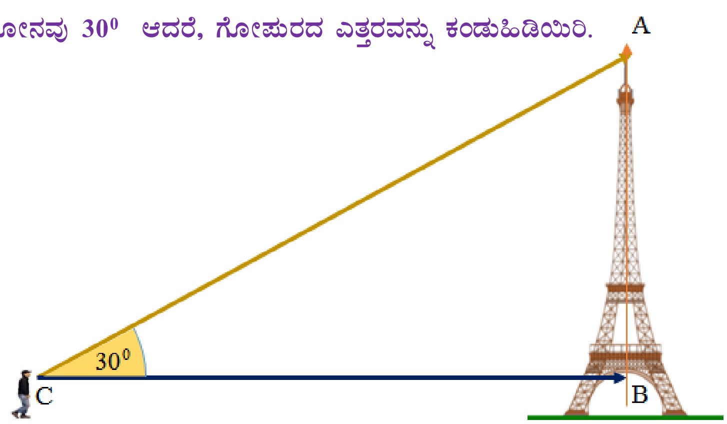
$\sin 60° = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{AC}$

$\Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{3}} m = 2\sqrt{3}$ m

∴ ಇಳಿಜಾರುಗಳ ಎತ್ತರಗಳು 3m ಮತ್ತು $2\sqrt{3}$ m .

4. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ 30m ದೂರದ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಗೋಪುರದ ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಆದರೆ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = AB ಆಗಿರಲಿ.

ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ BC = 30m

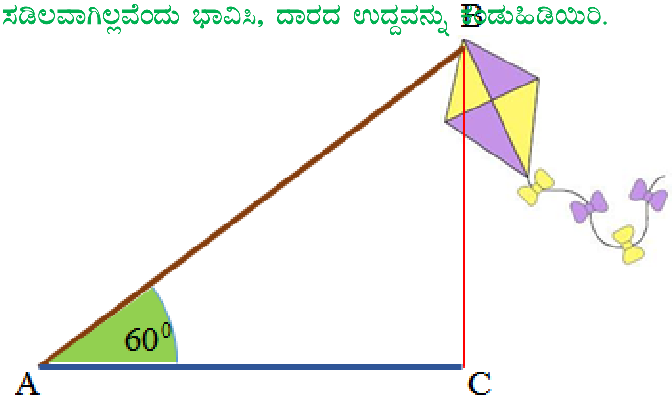
ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 30^0 = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{30}$

$\Rightarrow AB = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}m$

5. **ಗಾಳಿಪಟವೊಂದು ನೆಲದ ಮೇಲಿನಿಂದ 60m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಹಾರಾಡುತ್ತಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಲಾದ ದಾರವನ್ನು ತಾತ್ಕಾಲಿಕವಾಗಿ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಗೂಟಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿದೆ. ದಾರವು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 60^0 ಯ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ. ದಾರವು ಸಡಿಲವಾಗಿಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ, ದಾರದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**



ಗಾಳಿಪಟದ ಎತ್ತರ $BC = 60m$

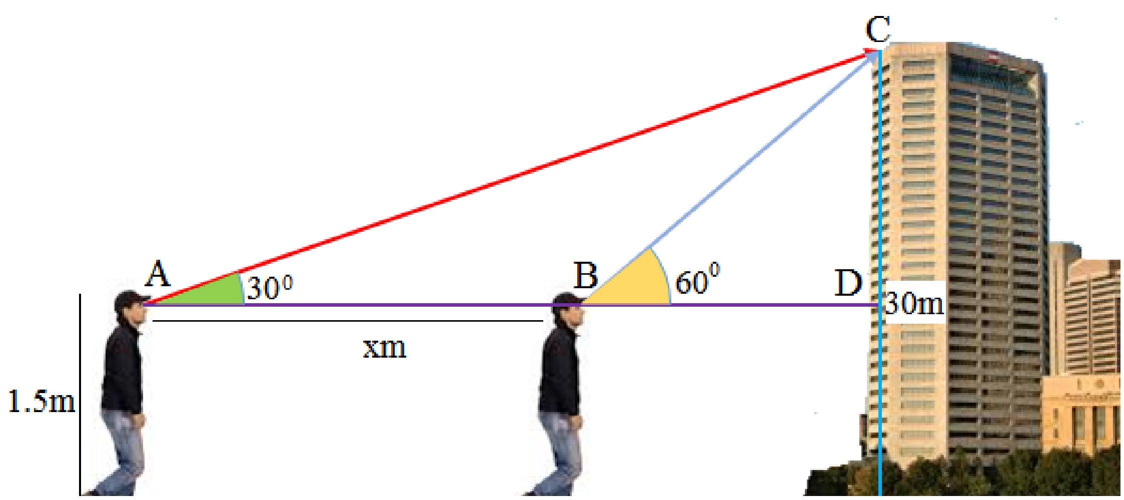
ದಾರದ ಉದ್ದ = AB ಆಗಿರಲಿ.

ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ,

$\text{Sin}60^0 = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{AB}$

$\Rightarrow AB = \frac{120}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}m$

6. **1.5m ಎತ್ತರದ ಹುಡುಗನೊಬ್ಬ 30m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡದಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ. ಕಟ್ಟಡದ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ನಡೆದು ಹೋಗುವಾಗ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಅವನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಯಿಂದ 60^0ಗೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನು ಕಟ್ಟಡದ ಕಡೆಗೆ ಎಷ್ಟು ದೂರ ನಡೆದು ಬಂದಿದ್ದಾನೆ?**



ಹುಡುಗನು M ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನ $30°$ ಮತ್ತು

ಅವನು ಕಟ್ಟಡದ ಕಡೆಗೆ ನಡೆದ ದೂರ x' m

x' m ನಡೆದಾಗ ಅವನು ನಿಂತಿರುವ ಬಿಂದು N ಆಗಿರಲಿ.

M ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನ $60°$ ಆಗಿದೆ.

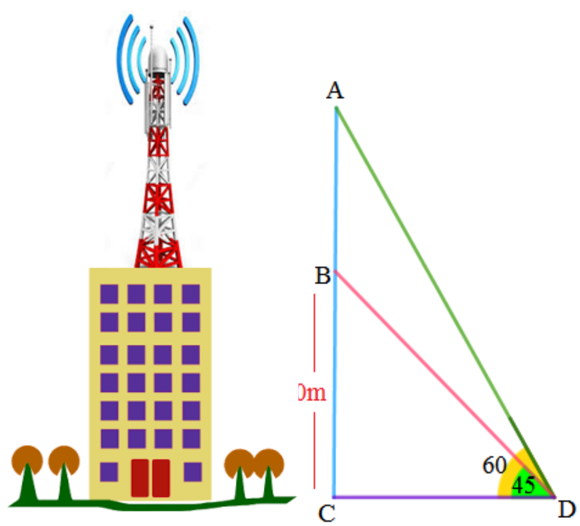
$\therefore$ MN $=$ AB $= x$.
ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ $=$ OC $= 30$ m

CD = OC - OD = (30 - 1.5) = 28.5 m
ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,
ಲಂಬಕೋನ ΔADC ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 30° = \frac{CD}{AD}$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{28.5}{AD}$
$\Rightarrow AD = 28.5\sqrt{3}$ m
ಲಂಬಕೋನ ΔCBD ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 60° = \frac{CD}{BD}$
$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{28.5}{BD}$
$\Rightarrow BD = \frac{28.5}{\sqrt{3}} = 9.5\sqrt{3}$ m
$\therefore MN = AB = x = (28.5\sqrt{3} - 9.5\sqrt{3}) = 19\sqrt{3}$ m
$\therefore$ಅವನು ಕಟ್ಟಡದ ಕಡೆಗೆ ನಡೆದ ದೂರ$= 19\sqrt{3}$ m

7. **20m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾದ ಪ್ರಸರಣೆಯ ಗೋಪುರವೊಂದರ (transmission tower) ಮೇಲ್ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದಗಳ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60^0 ಮತ್ತು 45^0 ಇದೆ. ಪ್ರಸರಣೆಯ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**



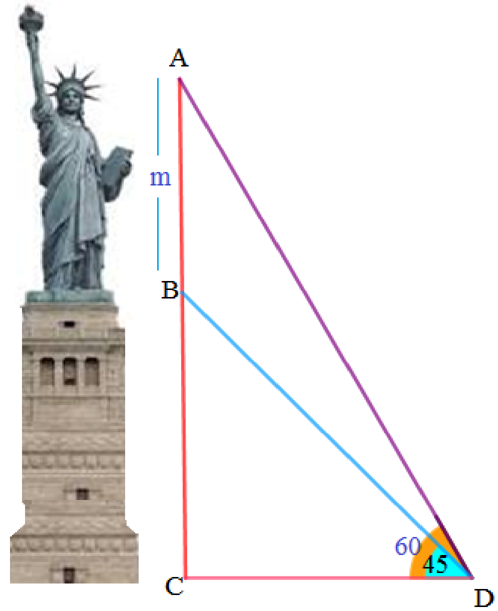
ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ $=$ BC$= 20$ m ಆಗಿರಲಿ.
ನೆಲದ ಮೇಲಿಂದ ಗೋಪುರವನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುವ ಬಿಂದು D
ಪ್ರಸರಣೆ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ AB = AC - BC
ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,
ಲಂಬಕೋನ ΔBCD ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 45° = \frac{BC}{CD}$
$\Rightarrow 1 = \frac{20}{CD}$
$\Rightarrow CD = 20$ m
ಲಂಬಕೋನ ΔACD ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 60° = \frac{AC}{CD}$
$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AC}{20}$
$\Rightarrow AC = 20\sqrt{3}$ m
ಪ್ರಸರಣೆ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ $AB = AC - BC = (20\sqrt{3} - 20)$ m $= 20(\sqrt{3} - 1)$ m.

8. **1.6m ಎತ್ತರದ ಪ್ರತಿಮೆಯೊಂದನ್ನು ಒಂದು ಪೀಠದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರತಿಮೆಯ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಮತ್ತು ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪೀಠದ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45^0 ಆಗಿದೆ. ಪೀಠದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

ಪ್ರತಿಮೆಯ ಎತ್ತರ $=$ AB ಆಗಿರಲಿ.
ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಉನ್ನತಕೋನವು ಉಂಟಾದ ಬಿಂದು D ಆಗಿರಲಿ.
ಪೀಠದ ಎತ್ತರ BC = AC - AB
ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,



ಲಂಬಕೋನ ΔBCD ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 45° = \frac{BC}{CD}$

$\Rightarrow 1 = \frac{BC}{CD}$

$\Rightarrow BC = CD.$

ಲಂಬಕೋನ ΔACD ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 60° = \frac{AC}{CD}$

$\Rightarrow \sqrt{3}CD = 1.6 \text{ m} + BC$

$\Rightarrow \sqrt{3}BC = 1.6 \text{ m} + BC$

$\Rightarrow \sqrt{3}BC - BC = 1.6 \text{ m}$

$\Rightarrow BC(\sqrt{3} - 1) = 1.6 \text{ m}$

$\Rightarrow BC(\sqrt{3} - 1) = \frac{1.6}{\sqrt{3}-1}$

$\Rightarrow BC = 0.8(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$

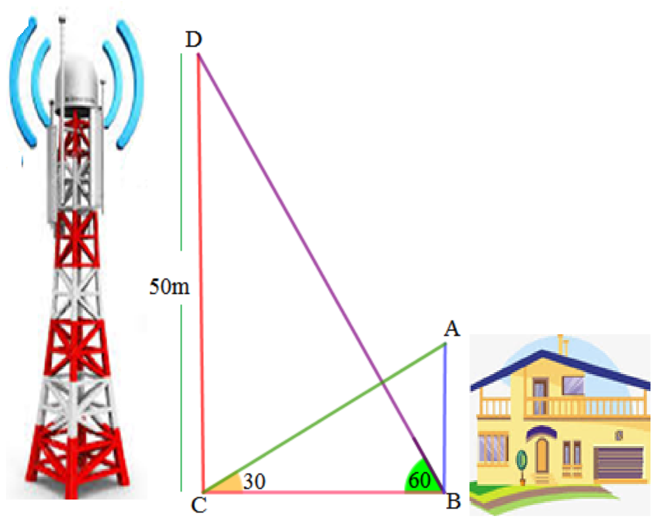
∴ಪೀಠದ ಎತ್ತರ $BC = 0.8 (\sqrt{3}+1)$ m.

9. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಮೇಲ್ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಮತ್ತು ಕಟ್ಟದದ ಪಾದದಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60 ಇದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ 50m ಇದ್ದರೆ, ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ $CD = 50$ m (ದತ್ತ)

ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ = AB ಆಗಿರಲಿ.

ಕಟ್ಟಡದ ಬುಡದಿಂದ ಗೋಪುರಕ್ಕಿರುವ ದೂರ BC



ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,

ಲಂಬಕೋನ ΔBCD ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 60° = \frac{CD}{BC}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{50}{BC}$

$\Rightarrow BC = \frac{50}{\sqrt{3}}$

ಲಂಬಕೋನ ΔABCಯಲ್ಲಿ,

$\tan 30° = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow AB = \frac{BC}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = \frac{50}{3}\text{m}$

ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ = $\frac{50}{3}\text{ m} = 16\frac{2}{3}\text{ m}$

10. 80 ಅಡಿ ಅಗಲವುಳ್ಳ ರಸ್ತೆಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಎತ್ತರವಿರುವ 2 ಕಂಬಗಳು ಅಭಿಮುಖವಾಗಿ ನಿಂತಿವೆ. ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಕಂಬದ ಮೇಲ್ತುದಿಗಳ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60^0 ಮತ್ತು 30^0 ಆಗಿದೆ. ಕಂಬಗಳ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಕಂಬಗಳಿಂದ ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

AB ಮತ್ತು CD ಗಳು ಎರಡು ಸಮ ಎತ್ತರವಿರುವ ಕಂಬಗಳು.

ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಉನ್ನತಕೋನ ಉಂಟಾಗುವ ಬಿಂದು O ಆಗಿದೆ.

ಕಂಬಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = BD

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ

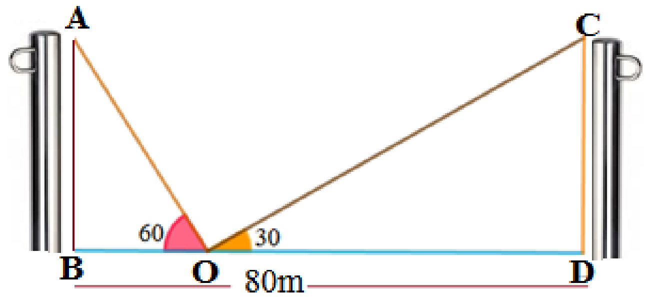
$AB = CD, OB + OD = 80$ m

ಲಂಬಕೋನ ΔCDOನಲ್ಲಿ,

$\tan 30° = \frac{CD}{OD}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{CD}{OD}$

$\Rightarrow CD = \frac{OD}{\sqrt{3}}$ ------------------- (1)



ಲಂಬಕೋನ ΔABOನಲ್ಲಿ,

$\tan 60° = \frac{AB}{OB}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{80-OD}$

$\Rightarrow AB = \sqrt{3}\,(80\text{-}OD)$

$AB = CD$ (ದತ್ತ)

$\Rightarrow \sqrt{3}\,(80\text{-}OD) = \frac{OD}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 3(80\text{-}OD) = OD$

$\Rightarrow 240 - 3\,OD = OD$

$\Rightarrow 4\,OD = 240$

$\Rightarrow OD = 60$

$OD = 60$ ಎಂದು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$CD = \frac{60}{\sqrt{3}} \Rightarrow CD = 20\sqrt{3}$ m

$OB + OD = 80$ m $\Rightarrow OB = (80\text{-}60)$ m $= 20$ m

ಆದ್ದರಿಂದ ಕಂಬಗಳ ಎತ್ತರ = $20\sqrt{3}$ m ಮತ್ತು ಉನ್ನತ ಕೋನ ಏರ್ಪಡುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕಂಬಗಳಿಗಿರುವ ದೂರಗಳು = 60ಮೀ ಮತ್ತು 20 ಮೀ ಗಳಾಗಿವೆ.

11. ಒಂದು ಕಾಲುವೆಯ ದಡದ ಮೇಲೆ ದೂರದರ್ಶನದ ಗೋಪುರವೊಂದು ನೇರವಾಗಿ ನಿಂತಿದೆ. ಗೋಪುರಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾದ ಮತ್ತೊಂದು ದಡದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಆಗಿದೆ. ಇದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಪಾದವನ್ನು ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ 20m ದೂರದ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 12.12 ನೋಡಿ). ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಕಾಲುವೆಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = AB ಆಗಿರಲಿ.

$CD = 20$ m (ದತ್ತ)

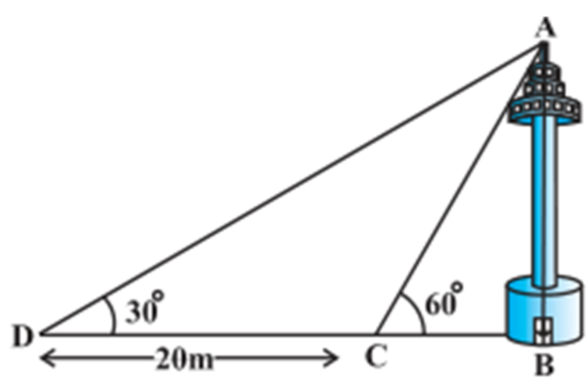
ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,

ಲಂಬಕೋನ ΔABD ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 30° = \frac{AB}{BD}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{CD+BC}$

$\Rightarrow AB = \frac{(20+BC)}{\sqrt{3}}$ -------------------- (1)



ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow AB = \sqrt{3}\,BC$ ------------------------- (2)

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$\frac{(20+BC)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,BC$

$\Rightarrow 3\,BC = 20 + BC$

$\Rightarrow 2\,BC = 20$

$\Rightarrow BC = 10$ m

BC =10 ಇದನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

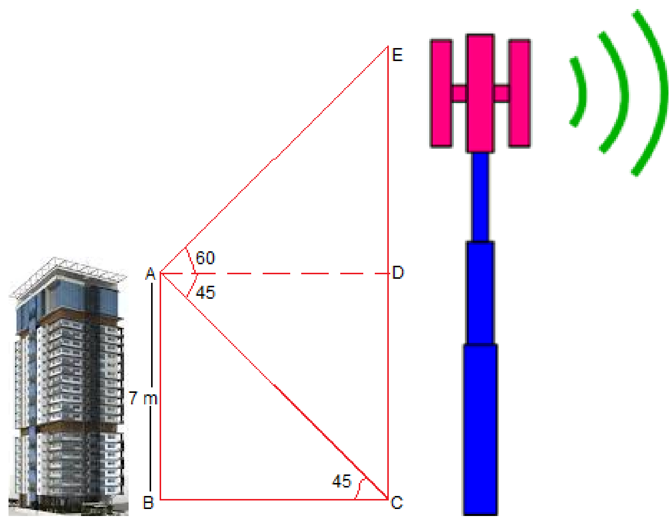
$AB = 10\sqrt{3}$ m

ಆದ್ದರಿಂದ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = $10\sqrt{3}$ m ಮತ್ತು ಕಾಲುವೆಯ ಅಗಲ= 10 m.

12. 7m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದಕ್ಕೆ ಅವನತ ಕೋನವು 45^0 ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ AB = 7 m ಮತ್ತು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = EC

A ಯು ಉನ್ನತಕೋನ ಏರ್ಪಡುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.



EC = DE + CD

CD = AB = 7 m ಮತ್ತು BC = AD

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,

ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 45° = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow 1 = \frac{7}{BC}$

$\Rightarrow BC = 7$ m = AD

ಲಂಬಕೋನ ΔADE ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 60° = \frac{DE}{AD}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{DE}{7}$

$\Rightarrow DE = 7\sqrt{3}$ m

ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = EC = DE + CD

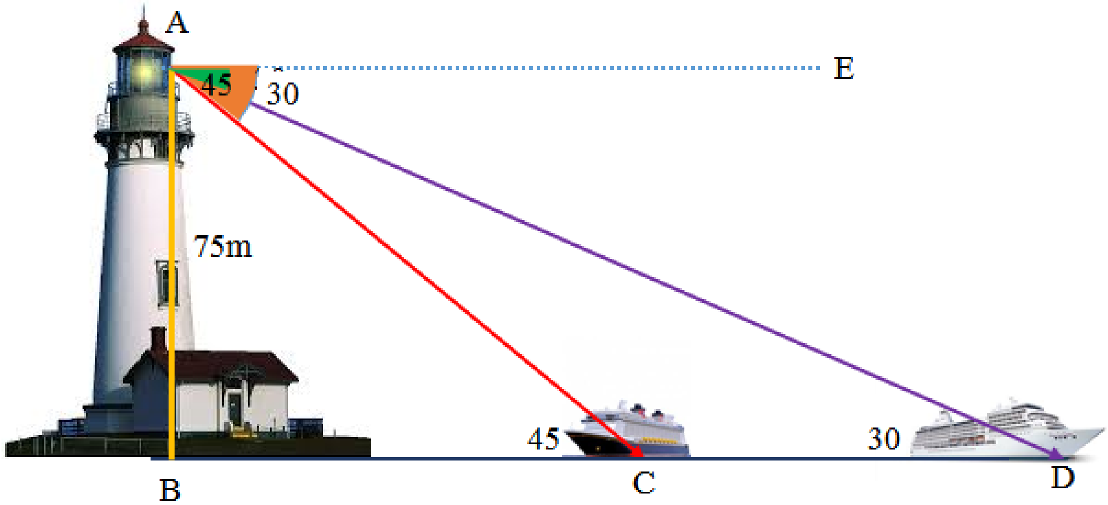
$= (7\sqrt{3} + 7)$ m $= 7\sqrt{3}+1)$ m.

13. ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಿಂದ 75m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವ ದೀಪಸ್ತಂಭವೊಂದರ ಮೇಲಿನಿಂದ ಎರಡು ಹಡಗುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30^0 ಮತ್ತು 45^0 ಆಗಿದೆ. ದೀಪಸ್ತಂಭದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹಡಗಿನ ಹಿಂದೆ ಮತ್ತೊಂದಿದ್ದರೆ ಎರಡು ಹಡಗುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೀಪ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರAB = 75 m.

C ಮತ್ತು D ಗಳು ಹಡಗುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,



$\tan 45° = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow 1 = \frac{75}{BC}$

$\Rightarrow BC = 75$ m

ಲಂಬಕೋನ ΔABD ಯಲ್ಲಿ,

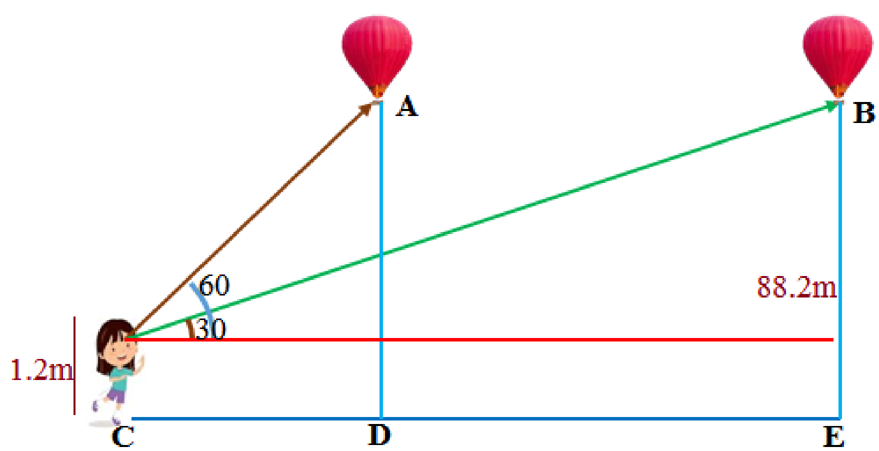
$\tan 30° = \frac{AB}{BD}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{75}{BD}$

$\Rightarrow BD = 75\sqrt{3}$m

ಹಡಗುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = CD = BD - BC = $(75\sqrt{3} - 75)$m = $75(\sqrt{3}-1)$m.

14. **1.2m ಎತ್ತರದ ಹುಡುಗಿಯು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 88.2m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಬಲೂನ್‌ಗಳೆರಡು ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿ ತೇಲುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಒಂದು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಹುಡುಗಿಯ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಬಲೂನ್‌ಗೆ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಸ್ವಲ್ಪ ಸಮಯದ ನಂತರ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಆಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 12.13 ನೋಡಿ). ಈ ಸಮಯದ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಬಲೂನ್ ಚಲಿಸಿದ ದೂರವೆಷ್ಟು?**



ಬಲೂನಿನ ಆರಂಭಿಕ ಸ್ಥಾನ A ಮತ್ತು ನಂತರದ ಸ್ಥಾನ B ಆಗಿರಲಿ.

ಬಲೂನಿನ ಎತ್ತರ = 88.2 m - 1.2 m = 87 m

ಬಲೂನ್ ಚಲಿಸಿದ ದೂರ = DE = CE - CD

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,

ಲಂಬಕೋನ ΔBEC ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 30° = \frac{BE}{CE}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{87}{CE}$

$\Rightarrow CE = 87\sqrt{3}$ m

ಲಂಬಕೋನ ΔADC ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 60° = \frac{AD}{CD}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{87}{CD}$

$\Rightarrow CD = \frac{87}{\sqrt{3}}$ m $= 29\sqrt{3}$ m

ಬಲೂನ್ ಚಲಿಸಿದ ದೂರ

$DE = CE - CD = (87\sqrt{3} - 29\sqrt{3})$ m $= 58\sqrt{3}$ m.

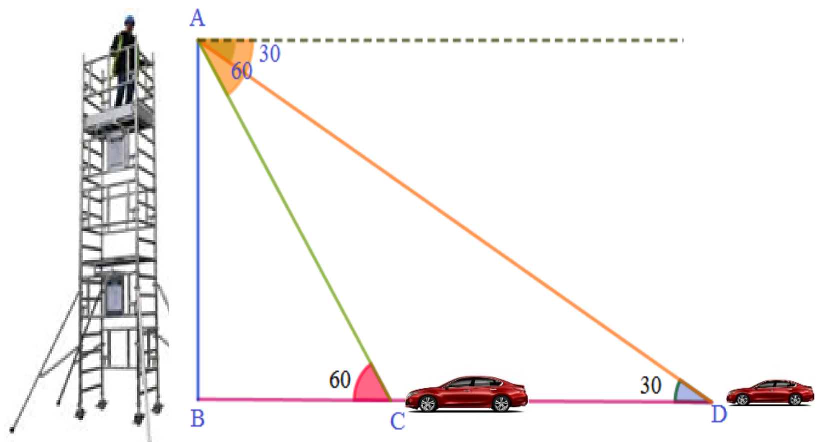
15. ಒಂದು ನೇರ ಹೆದ್ದರಿಯೂ ಗೋಪುರದ ಪಾದಕ್ಕೆ ದಾರಿಯಾಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತ ವ್ಯಕ್ತಿಯೊಬ್ಬರು ಏಕರೂಪ ಜವದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತಿರುವ ಕಾರೊಂದನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾರೆ. ಕಾರಿನ ಅವನತ ಕೋನವು 30^0 ಆಗಿದೆ. 6 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ ಕಾರಿನ ಅವನತ ಕೋನವು 60^0 ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಬರಲು ಕಾರು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯವೆಷ್ಟು?

ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = AB

D ಯು ಕಾರಿನ ಆರಂಭಿಕ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು C ಕಾರಿನ ನಂತರದ ಸ್ಥಾನವಾಗಿರಲಿ..

BC ಯು ಗೊಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ಕಾರಿಗಿರುವ ದೂರವಾಗಿರಲಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,



ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow BC = \frac{AB}{\sqrt{3}}$ m

ಲಂಬಕೋನ ΔADB ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 30° = \frac{AB}{BD}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC + CD}$

$\Rightarrow AB\sqrt{3} = \frac{AB}{\sqrt{3}} + CD$

$\Rightarrow CD = AB\sqrt{3} - \frac{AB}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow CD = AB\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow CD = AB\left(\frac{3-1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow CD = \frac{2AB}{\sqrt{3}}$ m

ಇಲ್ಲಿ ದೂರ BC ಯು ದೂರ CD ಯ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ.

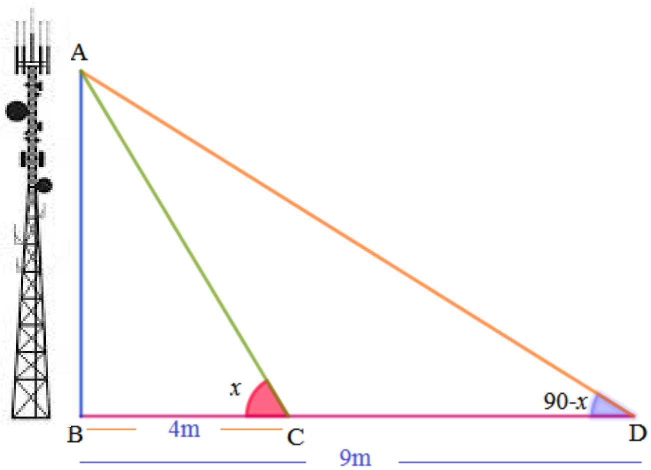
ಆದ್ದರಿಂದ ಕಾರು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯವು ಅರ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

CDದೂರ ಚಲಿಸಲು ಕಾರು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಮಯ = 6 sec.

ಆದ್ದರಿಂದ BC ದೂರ ಚಲಿಸಲು ಕಾರು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಮಯ = 6/2 = 3 sec.

16. ಗೋಪುರವೊಂದರ ಪಾದದಿಂದ 4m ಮತ್ತು 6m ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪೂರಕಗಳಾಗಿವೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು 6m ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

AB ಯು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.
C ಮತ್ತು D ಗಳು ಗೋಪರದಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ 4 m ಮತ್ತು 9 m ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.
ಪ್ರಶ್ನೆ ಪ್ರಕಾರ,
ಲಂಬಕೋನ ΔADB ಯಲ್ಲಿ,



$\tan x = \frac{AB}{BC}$
$\Rightarrow \tan x = \frac{AB}{4}$
$\Rightarrow AB = 4 \tan x$ ----------------- (1)
ಲಂಬಕೋನ ΔABD ಯಲ್ಲಿ,
$\tan (90°-x) = \frac{AB}{BD}$
$\Rightarrow \cot x = \frac{AB}{9}$
$\Rightarrow AB = 9 \cot x$ ---------------- (2)
ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ,
$AB^2 = 9 \cot x \times 4 \tan x$
$\Rightarrow AB^2 = 36$
$\Rightarrow AB = \pm 6$
ಎತ್ತರವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.
ಆದ್ದರಿಂದ AB = 6m

ಸಾರಾಂಶ

1. (i) ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆಯು ವೀಕ್ಷಕನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ, ವೀಕ್ಷಕನು ಗಮನಿಸುತ್ತಿರುವ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

(ii) ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಮೇಲೆತ್ತಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು, ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(iii) ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಕೆಳಗಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿಳಿಸಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು, ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಅವನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

2. ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಥವಾ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

13 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

13.2 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿ

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ [$i = 1$ to n]

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10ನೇ ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 100 ಅಂಕಗಳ ಗಣಿತ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
y	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

x_i	f_i	$x_i f_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	96
	$\sum f_i = 30$	$\sum x_i f_i = 1779$

ಸರಾসರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.53$

ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ "ನೇರ ವಿಧಾನ" :

ವರ್ಗಾಂತರ	10–25	25–40	40–55	55–70	70–85	85–100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	7	6	6	6

ವರ್ಗಾಂತರ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	ಮಧ್ಯಬಿಂದು (x_i)	$f_i x_i$
10–25	2	17.5	35.0
25–40	3	32.5	97.5
40–55	7	47.5	332.5
55–70	6	62.5	375.0
70–85	6	77.5	465.0
85–100	6	92.5	555.0
	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860$

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30} = 62$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ:

$d_i = x_i - a$ [ಇಲ್ಲಿ a = 47.5]

ವರ್ಗಾಂತರ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	ಮಧ್ಯಬಿಂದು (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10–25	2	17.5	–30	–60
25–40	3	32.5	–15	–45
40–55	7	47.5	0	0
55–70	6	62.5	15	90
70–85	6	77.5	30	182
85–100	6	92.5	45	270
	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$

'ಹಂತ ವಿಚಲನಾ' ವಿಧಾನ

$d_i = x_i - a$ [ಇಲ್ಲಿ a = 47.5] ಮತ್ತು h = 15

ವರ್ಗಾಂತರ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	ಮಧ್ಯಬಿಂದು (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 47.5}{15}$	$f_i u_i$
10–25	2	17.5	–2	–4
25–40	3	32.5	–1	–3
40–55	7	47.5	0	0
55–70	6	62.5	1	6
70–85	6	77.5	2	12
85–100	6	92.5	3	18
	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i u_i = 29$

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h = 47.5 + \frac{29}{30} \times 15 = 47.5 + \frac{29}{2} = 47.5 + 14.5 = 62$

ನೆನಪಿಡಿ:

ಎಲ್ಲಾ di ಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಿದ್ದರೆ ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನವು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ.
ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಪಡೆದ ಸರಾಸರಿಯು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.
ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನಗಳು ನೇರ ವಿಧಾನದ ಸರಳೀಕೃತ ರೂಪಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು, ಭಾರತದ ವಿವಿಧ ರಾಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರಾಡಳಿತ ಪ್ರದೇಶಗಳ ಗ್ರಾಮೀಣ ಭಾಗದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಶೇಕಡಾವಾರು ಹಂಚಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರೂ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಸರಾಸರಿ ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಶೇಕಡಾವಾರು	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
ರಾಜ್ಯಗಳು/ಕೇಂದ್ರಾಡಳಿತ ಪ್ರದೇಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	11	7	4	4	2	1

a = 50, h = 10

ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಶೇಕಡಾ ವಾರು x_i	ರಾಜ್ಯಗಳ/ಕೇಂ.ಪ್ರ.ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 20}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15–25	6	20	−30	−3	120	−180	−18
25–35	11	30	−20	−2	330	−220	−22
35–45	7	40	−10	−1	280	−70	−7
45–55	4	50	0	0	200	0	0
55–65	4	60	10	1	240	40	4
65–75	2	70	20	2	140	40	4
75–85	1	80	30	3	80	30	3
	$\sum f_i = 35$				1390	−360	−36

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಠಕದಿಂದ $\sum f_i = 35$, $\sum f_i x_i = 1390$, $\sum f_i d_i = -360$, $\sum f_i u_i = -36$

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 - \frac{360}{35} = 50 - 10.29 = 39.71$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h = 50 - \frac{36}{35} \times 10 = 50 - 10.29 = 39.71$

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಏಕದಿನ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಬೌಲರ್‌ಗಳು ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯು ಏನನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ?

ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	20 - 60	60 -100	100-150	150 - 250	250 - 350	350 - 450
ಬೌಲರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	5	16	12	2	3

ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x_i	ಬೌಲರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{x_i - 200}{10}$	$f_i u_i$
20 –60	7	40	−160	−8	−56
60 –100	5	80	−120	−6	−30
100 –150	16	125	−75	−3.75	−60
150 –250	12	200	0	0	0
250 –350	2	300	100	5	10
350 –450	3	400	200	10	30
	45				−106

$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h = 200 - \frac{106}{45} \times 20 = 200 - 47.11 = 152.89$

ಅಭ್ಯಾಸ 13.1

1. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಂದು ತಂಡವು ತಮ್ಮ 'ಪರಿಸರ ಅರಿವು ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ'ದ ಭಾಗವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿ ಒಂದು ಜನವಸತಿ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ 20 ಮನೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿತು. ಪ್ರತಿ ಮನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14
ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1	2	1	5	6	2	3

ನೀವು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಯಾವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೀರಿ ಮತ್ತು ಏಕೆ?

2. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ 50 ನೌಕರರ ದಿನಗೂಲಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

ದಿನಗೂಲಿ ರೂಗಳಲ್ಲಿ	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200
ನೌಕರರ ಸಂಖ್ಯೆ	12	14	8	6	10

ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ನೌಕರರ ಸರಾಸರಿ ದಿನಗೂಲಿಯನ್ನು ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಮಕ್ಕಳ ದಿನನಿತ್ಯದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣವನ್ನು (Pocket allowance) ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಸರಾಸರಿ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣವು ರೂ 18 ಆದರೆ ಬಿಟ್ಟು ಹೋಗಿರುವ ಆವೃತ್ತಿ f ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದಿನ ನಿತ್ಯದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣ(ರೂ)	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	6	9	13	f	5	4

4. ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವೈದ್ಯರ ಬಳಿ 30 ಮಹಿಳೆಯರು ತಪಾಸಣೆಗೊಳಗಾದರು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಅವರ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಲಾಯಿತು. ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಈ ಮಹಿಳೆಯರ ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷದ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	65–68	68–71	71–74	74–77	77–80	80–83	83–86
ಮಹಿಳೆಯರ ಸಂಖ್ಯೆ	2	4	3	8	7	4	2

5. ಒಂದು ಚಿಲ್ಲರೆ ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಹಣ್ಣು ಮಾರಾಟಗಾರರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮಾರುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದವು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ವಿತರಣೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200
ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1	2	1	5	6

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನೀವು ಯಾವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ?

6. ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 25 ಕುಟುಂಬಗಳ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯದ ಆಹಾರದ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ದಿನ ನಿತ್ಯದ ವೆಚ್ಚ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	100–150	150–200	200–250	250–300	300–350
ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	5	12	2	2

ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯದ ಆಹಾರದ ವೆಚ್ಚದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ SO_2 ನ ಸಾರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು (ಮಿಲಿಯನ್‌ಗಳ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ ಪಿಪಿಎಂ ಗಳಲ್ಲಿ) ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಗರದ 30 ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿದೆ.

SO_2 ನ ಸಾರತೆ	ಆವೃತಿ
0.00 – 0.04	4
0.04 – 0.08	9
0.08 – 0.12	9
0.12 – 0.16	2
0.16 – 0.20	4
0.20 – 0.24	2

ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ SO_2 ನ ಸಾರತೆಯ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಬ್ಬ ತರಗತಿ ಶಿಕ್ಷಕನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ವಾರ್ಷಿಕ ಗೈರು ಹಾಜರಾತಿಯ ದಾಖಲೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಗೈರು ಹಾಜರಾತಿಯ ದಿನಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0 – 6	6 – 10	10 – 14	14 – 20	20 – 28	28 – 30	38 – 40
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	11	10	7	4	4	3	1

9. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 35 ನಗರಗಳ ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು (ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ) ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣ %	45–55	55–65	65–75	75–85	85–95
ನಗರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	3	10	11	8	3

ಪರಿಹಾರ

1. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಂದು ತಂಡವು ತಮ್ಮ 'ಪರಿಸರ ಅರಿವು ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ'ದ ಭಾಗವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿ ಒಂದು ಜನವಸತಿ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ 20 ಮನೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿತು. ಪ್ರತಿ ಮನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14
ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1	2	1	5	6	2	3

ನೀವು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಯಾವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೀರಿ ಮತ್ತು ಏಕೆ?

a = 7 , h = 2

ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x_i	ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 7$	$u_i = \frac{x_i - 20}{2}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
0–2	1	1	−6	−3	1	−6	−3
2–4	2	3	−4	−2	6	−8	−4
4–6	1	5	−2	−1	5	−2	−1
6–8	5	7	0	0	35	0	0
8–10	6	9	2	1	54	12	6
10–12	2	11	4	2	22	8	4
12–14	3	13	6	3	39	18	9
	$\sum f_i$ =20			0	162	22	11

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $\sum f_i = 35, \sum f_i x_i = 162, \sum f_i d_i = 20, \sum f_i u_i = 11$

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1620}{20} = 8.1$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x}$ =a + $\frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$ = 7 + $\frac{22}{20}$ = 7 + 1.1 = 8.1

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x}$ = a + $\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$ x h = 7 + $\frac{11}{20}$ x 2 = 7 + 1.1 = 8.1

[ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಜಾಸ್ತಿ ಇಲ್ಲದ ಕಾರಣ ನೇರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು]

2. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ 50 ನೌಕರರ ದಿನಗೂಲಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

ದಿನಗೂಲಿ ರೂಗಳಲ್ಲಿ	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200
ನೌಕರರ ಸಂಖ್ಯೆ	12	14	8	6	10

ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ನೌಕರರ ಸರಾಸರಿ ದಿನಗೂಲಿಯನ್ನು ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

a = 75.5, h = 3

ದಿನಗೂಲಿ ರೂಗಳಲ್ಲಿ x_i	ನೌಕರರ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 150$	$u_i = \frac{x_i - 150}{20}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
100–120	12	110	−40	−2	1320	−480	−24
120–140	14	130	−20	−1	1820	−280	−14
140–160	8	150	0	0	1200	0	0
160–180	6	170	20	1	1020	120	6
180–200	10	190	40	2	1900	400	20
	$\sum f_i$ =50				7260	−240	−12

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $\sum f_i = 50, \sum f_i x_i = 7260, \sum f_i d_i = -240, \sum f_i u_i = -12$

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{7260}{50} = 145.2$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x}$ =a + $\frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$ = 150 + $\frac{-240}{50}$ = 150 – 4.8 = 145.2

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x}$ = a + $\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$ x h = 150 + $\frac{-12}{50}$ x 20 = 150 – 4.8 = 145.2

[ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ.]

3. **ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಮಕ್ಕಳ ದಿನನಿತ್ಯದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣವನ್ನು (Pocket allowance) ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಸರಾಸರಿ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣವು ರೂ 18 ಆದರೆ ಬಿಟ್ಟು ಹೋಗಿರುವ ಆವೃತ್ತಿ f ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

ದಿನ ನಿತ್ಯದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣ(ರೂ)	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	6	9	13	f	5	4

a = 18 , h = 2

ದಿನ ನಿತ್ಯದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣ (ರೂ x_i	ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 18$	$u_i = \frac{x_i - 18}{2}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
11–13	7	12	–6	–3	84	–42	–21
13–15	6	14	–4	–2	84	–24	–12
15–17	9	16	–2	–1	144	–18	–9
17–19	13	18	0	0	234	0	0
19–21	f	20	2	1	20f	2f	1f
21–23	5	22	4	2	110	20	10
23–25	4	24	6	3	96	24	12
	$\sum f_i$ =44+ f				752+20f	–40+2f	–20+ f

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $\sum f_i$ = 44+ f, $\sum f_i x_i$ = 752+ 20f, $\sum f_i d_i$ = –40 + 2f, $\sum f_i u_i$ = –20 + f

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$18 = \frac{752 + 20f}{44 + f} \Rightarrow 18(44 + f) = 752 + 20f$

$\Rightarrow 792 + 18f = 752 + 20f$

$\Rightarrow 40 = 2f \Rightarrow f = 20$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$18 = 18 + \frac{-40+2f}{44+f} \Rightarrow 0 = (-40 + 2f)$

$\Rightarrow 2f = 40 \Rightarrow f = 20$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$\Rightarrow 18 = 18 + \frac{-20+f}{44+f} \times 20$

$\Rightarrow -20 + f = 0 \Rightarrow f = 20$

[ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು]

4. ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವೈದ್ಯರ ಬಳಿ 30 ಮಹಿಳೆಯರು ತಪಾಸಣೆಗೊಳಗಾದರು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಅವರ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಲಾಯಿತು. ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಈ ಮಹಿಳೆಯರ ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷದ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	65–68	68–71	71–74	74–77	77–80	80–83	83–86
ಮಹಿಳೆಯರ ಸಂಖ್ಯೆ	2	4	3	8	7	4	2

a = 75.5 , h = 3

ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x_i	ಮಹಿಳೆಯರ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 75.5$	$u_i = \frac{x_i - 75.5}{3}$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
65–68	2	66.5	–9	–3	–18	–6
68–71	4	69.5	–6	–2	–24	–8
71–74	3	72.5	–3	–1	–9	–3
74–77	8	75.5	0	0	0	0
77–80	7	78.5	3	1	21	7
80–83	4	81.5	6	2	24	8
83–86	2	84.5	9	3	18	6
	$\sum f_i$ =30				12	4

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $\sum f_i = 30, \sum f_i d_i = 12, \sum f_i u_i = 4$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = 75.5 + \frac{12}{30} = 75.5 + 0.4 = 75.9$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \text{ x } h = 75.5 + \frac{4}{30} \text{ x } 3 = 75.5 + 0.4 = 75.9$

[ಇಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಕಷ್ಟಕರವಾಗಿದ್ದ ಕಾರಣ ನೇರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ ಉಳಿದೆರಡು ವಿಧಾನ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ]

5. ಒಂದು ಚಿಲ್ಲರೆ ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಹಣ್ಣು ಮಾರಾಟಗಾರರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮಾರುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದವು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ವಿತರಣೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	50–52	53–55	56–58	59–61	62–64
ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	15	110	135	115	25

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನೀವು ಯಾವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ?

a = 57 , h = 3

ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x_i	ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 150$	$u_i = \frac{x_i - 75.5}{3}$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
50–52	15	51	–6	–2	–90	–30
53–55	110	54	–3	–1	–330	–110
56–58	135	57	0	0	0	0
59–61	115	60	3	1	345	115
62–64	25	63	6	2	150	50
	$\sum f_i$ =400				75	25

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x}$ =a + $\frac{\sum d_i x_i}{\sum f_i}$

= 57 + $\frac{75}{400}$ = 57 + 0.1875 = 57.1875 ≈ 57.19

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x}$ = a + $\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$ x h

= 57 + $\frac{25}{400}$ x 3 = 57 + 0.1875 = 57.1875 ≈ 57.19

ಇಲ್ಲಿ ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ ಸೂಕ್ತ.

6. ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 25 ಕುಟುಂಬಗಳ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯದ ಆಹಾರದ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ದಿನ ನಿತ್ಯದ ವೆಚ್ಚ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	100–150	150–200	200–250	250–300	300–350
ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	5	12	2	2

ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯದ ಆಹಾರದ ವೆಚ್ಚದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

a = 225 , h = 50

ದಿನ ನಿತ್ಯದ ವೆಚ್ಚ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ) x_i	ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 150$	$u_i = \frac{x_i - 75.5}{3}$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
100–150	4	125	–100	–2	–400	–8
150–200	5	175	–50	–1	–250	–5
200–250	12	225	0	0	0	0
250–300	2	275	50	1	100	2
300–350	2	325	100	2	200	4
	$\sum f_i$ =25				–350	–7

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x}$ =a + $\frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

= 225 + $\frac{-350}{25}$ = 225 - 14 = 211

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x}$ = a + $\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$ x h

= 225 + $\frac{-7}{25}$ x 50 = 225 - 14 = 211

ಇಲ್ಲಿ ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ.

7. ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ SO_2 ನ ಸಾರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು (ಮಿಲಿಯನ್‌ಗಳ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ ppm ಗಳಲ್ಲಿ) ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಗರದ 30 ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿದೆ.

SO_2 ನ ಸಾರತೆ	ಆವೃತಿ
0.00 – 0.04	4
0.04 – 0.08	9
0.08 – 0.12	9
0.12 – 0.16	2
0.16 – 0.20	4
0.20 – 0.24	2

ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ SO_2 ನ ಸಾರತೆಯ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

SO_2 ನ ಸಾರತೆಯ x_i	ಆವೃತ್ತಿ f_i	x_i	f_ix_i
0.00 – 0.04	4	0.02	0.08
0.04 – 0.08	9	0.06	0.54
0.08 – 0.12	9	0.10	0.90
0.12 – 0.16	2	0.14	0.28
0.16 – 0.20	4	0.18	0.72
0.20 – 0.24	2	0.22	0.44
	$\sum f_i$ =30		2.96

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2.96}{30} = 0.099$ppm

ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ SO_2 ನ ಸಾರತೆಯ ಸರಾಸರಿ = 0.099ppm

8. ಒಬ್ಬ ತರಗತಿ ಶಿಕ್ಷಕನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ವಾರ್ಷಿಕ ಗೈರು ಹಾಜರಾತಿಯ ದಾಖಲೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಗೈರು ಹಾಜರಾತಿಯ ದಿನಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0 – 6	6 – 10	10 – 14	14 – 20	20 – 28	28 – 38	38 – 40
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	11	10	7	4	4	3	1

ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x_i	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	f_ix_i
0–6	11	3	33
6–10	10	8	80
10–14	7	12	84
14–20	4	17	68
20–28	4	24	96
28–38	3	33	99
38–40	1	39	39
	$\sum f_i$ =40		499

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $\sum f_i = 40$, $\sum f_i x_i = 499$,

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{499}{40} = 12.475$

9. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 35 ನಗರಗಳ ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು (ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ) ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣ %	45–55	55–65	65–75	75–85	85–95
ನಗರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	3	10	11	8	3

ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣ x_i	ನಗರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	f_ix_i	$d_i = x_i - 70$	f_id_i
45–55	3	50	150	–20	–60
55–65	10	60	600	–10	–100
65–75	11	70	770	0	0
75–85	8	80	640	10	80
85–95	3	90	270	20	60
	$\sum f_i = 35$		2430	0	–20

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $\sum f_i = 35$, $\sum f_i x_i = 2430$,

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2430}{35} = 69.43$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum d_i x_i}{\sum f_i}$

$= 70 + \frac{-20}{35} = 60.43$

13.3 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕ (ರೂಢಿಬೆಲೆ)

ಬಹುಲಕ ಅಥವಾ ರೂಢಿಬೆಲೆಯು ದತ್ತ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಇರುವ ಮೌಲ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: 10 ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಬೌಲರನು ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0	1	2	3	4	5	6
ಪಂದ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1	1	3	2	1	1	1

ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಬೌಲರನು ಗರಿಷ್ಠ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ 3) ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 2

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$l =$ **ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ**

$h =$ **ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಬೌಲರನು ಗರಿಷ್ಠ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ 3) ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 2**

$f_1 =$ **ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.**

$f_0 =$ **ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ, ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.**

$f_2 =$ **ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ, ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.**

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಒಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತಂಡವು ಒಂದು ಜನವಸತಿ ಪ್ರದೇಶದ 20 ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಮೀಕ್ಷೆ ನಡೆಸಿತು. ಇದರಂತೆ ಒಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿರುವ ಸದಸ್ಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಕುಟುಂಬದ ಗಾತ್ರ	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
ಕುಟುಂಬದ ಸಂಖ್ಯೆ	7	8	2	2	1

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಟ ಆವೃತ್ತಿಯು 8 ಆಗಿದ್ದು ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ವರ್ಗಾಂತರವು 3 – 5 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವು 3 – 5 ಆಗಿದೆ.

ಈಗ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ = 3 – 5,

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ $l = 3$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ h = 2

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 8$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 7$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 2$

ಈಗ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸೋಣ:

ಬಹುಲಕ = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \text{x } h$

ಬಹುಲಕ = $3 + \left[\frac{8-7}{2(8)-7-2}\right] \text{x } 2$

ಬಹುಲಕ = $3 + \left[\frac{1}{16-9}\right] \text{x } 2$

ಬಹುಲಕ = $3 + \frac{2}{7}$

ಬಹುಲಕ = 3 .286

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 3.286 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಉದಾಹರಣೆ 1 ರ ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ರಲ್ಲಿ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕ ಹಂಚಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದಲ್ಲದೆ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	10–25	25–40	40–55	55–70	70–85	85–100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	7	6	6	6

ಪರಿಹಾರ: ಉದಾಹರಣೆ 1 ರ ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ನ್ನು ನೋಡಿ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗರಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯು (ಅಂದರೆ, 7) ವರ್ಗಾಂತರ 40 – 45 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 40$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, h = 15

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 7$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 3$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 6$

ಬಹುಲಕ = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \text{x } h$

ಬಹುಲಕ = $40 + \left[\frac{7-3}{2(7)-3-6}\right] \text{x } 15$

ಬಹುಲಕ = $40 + \left[\frac{4}{14-9}\right] \text{x } 15$

ಬಹುಲಕ = $40 + \frac{4}{5} \text{ x } 15$

ಬಹುಲಕ = 40 + 12

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 52 ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 13.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ರೋಗಿಗಳ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	5 – 15	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65
ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	11	21	23	14	5

ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಈ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

2. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು 225 ವಿದ್ಯುತ್ ಉಪಕರಣಗಳ ಬಿಡಿಭಾಗಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ) ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	0 – 20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	10	35	52	61	38	29

ಉಪಕರಣಗಳ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳ ಬಾಳಿಕೆಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ 200 ಕುಟುಂಬಗಳ ಒಟ್ಟು ಮಾಸಿಕ ಗೃಹೋಪಯೋಗಿ ವೆಚ್ಚದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಕುಟುಂಬಗಳ ಮಾಸಿಕ ವೆಚ್ಚದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅಲ್ಲದೆ, ಮಾಸಿಕ ವೆಚ್ಚದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೆಚ್ಚ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1000 – 1500	24
1500 – 2000	40
2000 – 2500	33
2500 – 3000	28
3000 – 3500	30
3500 – 4000	22
4000 – 4500	16
4500 – 5000	7

4. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಭಾರತದ ರಾಜ್ಯಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶಿಕ್ಷಕ – ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಎರಡೂ ಅಳತೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

ಪ್ರತಿ ಶಿಕ್ಷಕನಿಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ರಾಜ್ಯಗಳು/ ಕೇಂ.ಪ್ರ.ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
15 – 20	3
20 – 25	8
25 – 30	9
30 – 35	10
35 – 40	3
40 – 45	0
45 – 50	0
50 – 55	2

5. ದತ್ತ ವಿತರಣೆಯು ಏಕದಿನ ಅಂತರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವದ ಕೆಲವು ಉತ್ತಮ ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ಮನ್‌ಗಳು ಗಳಿಸಿದ ರನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಗಳಿಸಿದ ರನ್ನುಗಳು	ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ಮನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
3000 – 4000	4
4000 – 5000	18
5000 – 6000	9
6000 – 7000	7
7000 – 8000	6
8000 – 9000	3
9000 – 10000	1
10000 – 11000	1

ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪ್ರತಿ 3 ನಿಮಿಷದ 100 ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋದ ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿದ್ದಾನೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0 – 10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
ಆವೃತ್ತಿ	7	14	13	12	20	11	15	8

ಪರಿಹಾರ

1. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ರೋಗಿಗಳ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	5 – 15	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65
ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	11	21	23	14	5

ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಈ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

ರೋಗಿಗಳ ಗರಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯು =23

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 35 – 45 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 35$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 10$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 23$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 21$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 14$

ಬಹುಲಕ = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \text{x } h$

ಬಹುಲಕ = $35 + \left[\frac{23 - 21}{2(23) - 21 - 14}\right] \text{x } 10$

ಬಹುಲಕ = $35 + \left[\frac{2}{46 - 35}\right] \text{x } 10$

ಬಹುಲಕ = $35 + \frac{2}{11} \text{ x } 10$

ಬಹುಲಕ = $35 + 1.81$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 36.81 ಆಗಿದೆ.

$a = 30$, $h = 10$

ವಯಸ್ಸು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ	ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 70$	$u_i = \frac{x_i - 30}{10}$	$f_i u_i$
5–15	6	10	–20	–2	–12
15–25	11	20	–10	–1	–11
25–35	21	30	0	0	0
35–45	23	40	10	1	23
45–55	14	50	20	2	28
55–65	5	60	30	3	15
	$\sum f_i$ =80				43

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= 30 + \frac{43}{80} \times 10 = 30 + 5.375 = 35.375$

ಆದ್ದರಿಂದ 36.8 ವರ್ಷ ವಯಸ್ಸಿನವರು ಅತೀ ಹೆಚ್ಚು ಮಂದಿ ಆಸ್ಪತ್ರೆಗೆ ದಾಖಲಾಗಿರುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗೂ ಆಸ್ಪತ್ರೆಗೆ ದಾಖಲಾದ ರೋಗಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು 35.37 ವರ್ಷಗಳಾಗಿವೆ.

2. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು 225 ವಿದ್ಯುತ್ ಉಪಕರಣಗಳ ಬಿಡಿಭಾಗಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ) ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಬಾಳಿಕೆ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ)	0 – 20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
ಆವೃತ್ತಿ	10	35	52	61	38	29

ಉಪಕರಣಗಳ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳ ಬಾಳಿಕೆಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

ಗರಿಷ್ಟ ಆವೃತ್ತಿ =61

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 60 – 80 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 60$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, h = 20

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 61$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 52$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 38$

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

ಬಹುಲಕ $= 60 + \left[\frac{61 - 52}{2(61) - 52 - 38}\right] \times 20$

ಬಹುಲಕ $= 60 + \left[\frac{9}{122 - 90}\right] \times 20$

ಬಹುಲಕ $= 60 + \frac{9}{32} \times 20$

ಬಹುಲಕ $= 60 + 5.625 = 65.625$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 65.625 ಆಗಿದೆ.

3. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ 200 ಕುಟುಂಬಗಳ ಒಟ್ಟು ಮಾಸಿಕ ಗೃಹೋಪಯೋಗಿ ವೆಚ್ಚದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಕುಟುಂಬಗಳ ಮಾಸಿಕ ವೆಚ್ಚದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅಲ್ಲದೆ, ಮಾಸಿಕ ವೆಚ್ಚದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೆಚ್ಚ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1000 – 1500	24
1500 – 2000	40
2000 – 2500	33
2500 – 3000	28
3000 – 3500	30
3500 – 4000	22
4000 – 4500	16
4500 – 5000	7

ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ = 40

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 1500 – 2000 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 1500$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 500$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 40$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 24$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 33$

ಬಹುಲಕ = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \text{x } h$

ಬಹುಲಕ = $1500 + \left[\frac{40 - 24}{2(40) - 24 - 33}\right] \text{x } 500$

ಬಹುಲಕ = $1500 + \left[\frac{16}{80 - 57}\right] \text{x } 500$

ಬಹುಲಕ = $1500 + \frac{16}{23} \text{ x } 500$

ಬಹುಲಕ = $1500 + 347.83 = 1847.83$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 1847.83 ಆಗಿದೆ.

ವೆಚ್ಚ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 2750$	$u_i = \frac{x_i - 2750}{500}$	$f_i u_i$
1000 – 1500	24	1250	–1500	–3	–72
1500 – 2000	40	1750	–1000	–2	–80
2000 – 2500	33	2250	–500	–1	–33
2500 – 3000	28	2750	0	0	0
3000 – 3500	30	3250	500	1	30
3500 – 4000	22	3750	1000	2	44
4000 – 4500	16	4250	1500	3	48
4500 – 5000	7	4750	2000	4	28
	$\sum f_i = 200$				-35

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \text{ x h}$

$= 2750 + \frac{-35}{200} \text{ x } 500 = 2750 - 87.5 = 2662.5$

5. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಭಾರತದ ರಾಜ್ಯಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶಿಕ್ಷಕ – ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಎರಡೂ ಅಳತೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

ಪ್ರತಿ ಶಿಕ್ಷಕನಿಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ರಾಜ್ಯಗಳು/ ಕೇಂ.ಪ್ರ.ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
15 – 20	3
20 – 25	8
25 – 30	9
30 – 35	10
35 – 40	3
40 – 45	0
45 – 50	0
50 – 55	2

ಗರಿಷ್ಟ ಆವೃತ್ತಿ = 10

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 30 – 35 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 30$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 5$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 10$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 9$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 3$

ಬಹುಲಕ = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \text{x } h$

ಬಹುಲಕ = $30 + \left[\frac{10-9}{2(10)-9-3}\right] \text{x } 5$

ಬಹುಲಕ = $30 + \left[\frac{1}{20-12}\right] \text{x } 5$

ಬಹುಲಕ = $30 + \frac{1}{8} \text{ x } 5$

ಬಹುಲಕ = $30 + 0.625 = 30.625$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 30.625 ಆಗಿದೆ.

ಪ್ರತಿ ಶಿಕ್ಷಕನಿಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ರಾಜ್ಯಗಳು/ ಕೇಂ.ಪ್ರ.ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 32.5$	$u_i = \frac{x_i - 32.5}{5}$	$f_i u_i$
15 – 20	3	17.5	–15	–3	–9
20 – 25	8	22.5	–10	–2	–16
25 – 30	9	27.5	–5	–1	–9
30 – 35	10	32.5	0	0	0
35 – 40	3	37.5	5	1	3
40 – 45	0	42.5	10	2	0
45 – 50	0	47.5	15	3	0
50 – 55	2	52.5	20	4	8
	$\sum f_i = 35$				–23

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} \times h$

$= 32.5 + \frac{-23}{35} \times 5 = 32.5 - 3.29 = 29.21$

ಶಿಕ್ಷಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅನುಪಾತವು 30.625 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು 29.21 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

6. ದತ್ತ ವಿತರಣೆಯು ಏಕದಿನ ಅಂತರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವದ ಕೆಲವು ಉತ್ತಮ ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ಮನ್‌ಗಳು ಗಳಿಸಿದ ರನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಗಳಿಸಿದ ರನ್ನುಗಳು	ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ಮನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
3000 – 4000	4
4000 – 5000	18
5000 – 6000	9
6000 – 7000	7
7000 – 8000	6
8000 – 9000	3
9000 – 10000	1
10000 – 11000	1

ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ = 18

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 4000 – 5000 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 4000$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 1000$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 18$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 4$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 9$

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

ಬಹುಲಕ $= 4000 + \left[\frac{18 - 4}{2(18) - 4 - 9}\right] \times 1000$

ಬಹುಲಕ $= 4000 + \left[\frac{14}{36 - 13}\right] \times 1000$

ಬಹುಲಕ $= 4000 + \frac{14}{23} \times 1000$

ಬಹುಲಕ $= 4000 + 608.7 = 4608.7$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 4608.7 ಆಗಿದೆ.

7. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪ್ರತಿ 3 ನಿಮಿಷದ 100 ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋದ ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿದ್ದಾನೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0 – 10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
ಆವೃತ್ತಿ	7	14	13	12	20	11	15	8

ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ = 20

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 40 – 50 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 40$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 10$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 20$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 12$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 11$

ಬಹುಲಕ = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

ಬಹುಲಕ = $40 + \left[\frac{20 - 12}{2(20) - 12 - 11}\right] \times 10$

ಬಹುಲಕ = $40 + \left[\frac{8}{40 - 23}\right] \times 10$

ಬಹುಲಕ = $40 + \frac{8}{17} \times 10$

ಬಹುಲಕ = $40 + 4.71 = 44.71$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 44.71 ಆಗಿದೆ.

13.4 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ (ಮಧ್ಯಮ ಬೆಲೆ)

ಮಧ್ಯಾಂಕವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಒಂದು ಅಳತೆಯಾಗಿದ್ದು, ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗಿದೆ. ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಮೊದಲಾಗಿ ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ `n' ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು `n' ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು $\left(\frac{n}{2}\right)$ ನೇ ಮತ್ತು $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ನಂತರ, ನಾವು ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ (ಮಧ್ಯಮ ಬೆಲೆ)

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

ಇಲ್ಲಿ, l = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ.

n = ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

cf = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

f = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

h = ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10ನೇ ತರಗತಿಯ 51 ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರಗಳಿಗೆ (cm ಗಳಲ್ಲಿ) ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಲಾಯಿತು ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಯಿತು.

ಎತ್ತರಗಳು(ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಳಲ್ಲಿ)	ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ
140ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	4
145ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	11
150ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	29
155ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	40
160ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	46
165ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	51

ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
140ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	4	4
140 – 145	7	11
145 – 150	18	29
150 – 155	11	40
155 – 160	6	46
160 – 165	5	51

ಈಗ n = 51, $\therefore \frac{n}{2} = 25.5$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 145 – 150 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 145 .

cf (145 - 150ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 11

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 145 – 150 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 18

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 5

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $145 + \left[\frac{25.5 - 11}{18}\right] \times 5$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $145 + \left[\frac{72.5}{18}\right] = 149.03$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 149.03 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 525. ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಯು 100 ಆಗಿದ್ದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವೃತ್ತಿ
0 –100	2
100–200	5
200–300	x
300–400	12
400–500	17
500–600	20
600–700	y
700–800	9
800–900	7
900–1000	4

ಪರಿಹಾರ :

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
0 –100	2	2
100–200	5	7
200–300	x	7+x
300–400	12	19+x
400–500	17	36+x
500–600	20	56+x
600–700	y	56+x+y
700–800	9	65+x+y
800–900	7	72+x+y
900–1000	4	76+x+y

ಇಲ್ಲಿ, n = 100

∴ $76 + x + y = 100$ ಅಂದರೆ,

$x + y = 24$ .... (1)

ಮಧ್ಯಾಂಕವು 525,

ಇದು 500 – 600 ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ

∴ $l = 500$, $f = 20$, $cf = 36 + x$, $h = 100$

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

$525 = 500 + \left[\frac{50 - 36-x}{20}\right] \times 100$

$525 = 500 + [14 - x] \times 5$

$25 = 70 - 5x$

$5x = 70 - 25$

$5x = 45$

∴ $x = 9$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ $9 + y = 24$

$y = 15$

ಗಮನಿಸಿ:1. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಗಳ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳ ನಡುವೆ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಬಂಧವಿದೆ

3 ಮಧ್ಯಾಂಕ = ಬಹುಲಕ + 2 ಸರಾಸರಿ

ಅಭ್ಯಾಸ 13.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 68 ಗ್ರಾಹಕರ ಮಾಸಿಕ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ.

ಮಾಸಿಕ ಬಳಕೆ (ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	ಗ್ರಾಹಕರ ಸಂಖ್ಯೆ
65 – 85	4
85 – 105	5
105 – 125	13
125 – 145	20
145 – 165	14
165 – 185	8
185 – 205	4

2. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 28.5 ಆಗಿದ್ದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವೃತ್ತಿ
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
ಒಟ್ಟು	60

3. ಒಬ್ಬ ಜೀವ ವಿಮಾ ಏಜೆಂಟನು ಪಡೆದ 100 ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ವಿತರಣೆಯ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇವೆ. ಪಾಲಿಸಿಗಳನ್ನು 18 ವರ್ಷ ದಾಟಿದ ಮತ್ತು 60 ವರ್ಷಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ವಯಸ್ಸಿರುವ ಜನರಿಗೆ ಮಾತ್ರ ನೀಡಿದ್ದರೆ, ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	2
25 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	6
30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	24
35 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	45
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	78
45 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	89
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	92
55 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	98
60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	100

4. ಒಂದು ಗಿಡದ 40 ಎಲೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸಮೀಪದ ಮಿಲಿಮೀಟರ್‌ಗೆ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಅಳತೆ ಮಾಡಿದೆ ಮತ್ತು ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದೆ.

ಉದ್ದ(ಮಿ.ಮೀ.ಗಳಲ್ಲಿ)	ಎಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

ಎಲೆಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[ಸುಳುಹು: ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಿರಂತರ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಯಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ ಏಕೆಂದರೆ ಸೂತ್ರವು ನಿರಂತರ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು 117.5 – 126.5, 126.5 – 135.5, ..., 171.5 – 180.5 ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ.]

5. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 400 ನಿಯಾನ್ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
1500-2000	14
2000-2500	56
2500-3000	60
3000-3500	86
3500-4000	74
4000-4500	62
4500-5000	48

ಬಲ್ಬ್‌ನ ಬಾಳಿಕೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಸ್ಥಳೀಯ ದೂರವಾಣಿ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಿ (Telephone directory) ಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ 100 ಉಪನಾಮಗಳನ್ನು (surname) ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಆಂಗ್ಲಭಾಷಾ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19
ಉಪನಾಮಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	30	40	16	4	4

ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ. ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಅಲ್ಲದೆ, ಉಪನಾಮಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತೂಕ(ಕೆ.ಜಿ.ಗಳಲ್ಲಿ)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	8	6	6	3	2

ಪರಿಹಾರ:

1. ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 68 ಗ್ರಾಹಕರ ಮಾಸಿಕ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ.

ಮಾಸಿಕ ಬಳಕೆ (ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	ಗ್ರಾಹಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
65 – 85	4	4
85 – 105	5	9
105 – 125	13	22
125 – 145	20	42
145 – 165	14	56
165 – 185	8	64
185 – 205	4	68

ಈಗ $n = 68, \therefore \frac{n}{2} = 34$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 125 – 145 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 125 .

cf (125 - 145ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 22

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 145 – 150 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 20

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 20

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $125 + \left[\frac{34 - 22}{20}\right] \times 20$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $125 + \left[\frac{12}{20}\right] \times 20 = 125 + 12 = 137$units

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 137units ಆಗಿದೆ.

ಸರಾಸರಿ:

ಮಾಸಿಕ ಬಳಕೆ (ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	ಗ್ರಾಹಕರ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 135$	$u_i = \frac{x_i - 135}{20}$	$f_i d_i$
65 – 85	4	75	–60	–3	–12
85 – 105	5	95	–40	–2	–10
105 – 125	13	115	-20	-1	-13
125 – 145	20	135	0	0	0
145 – 165	14	155	20	1	14
165 – 185	8	175	40	2	16
185 – 205	4	195	60	3	12
	$\sum f_i$ =68				7

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \text{ x } h$

$= 135 + \frac{7}{68} \text{ x } 20 = 135 + 2.1 = 137.05$

ಬಹುಲಕ:

ಗರಿಷ್ಟ ಆವೃತ್ತಿ = 20

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 125 – 145 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 125$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 20$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 20$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 13$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 14$

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \text{ x } h$

ಬಹುಲಕ $= 125 + \left[\frac{20 - 13}{2(20) - 13 - 14}\right] \text{ x } 20$

ಬಹುಲಕ $= 125 + \left[\frac{7}{40 - 27}\right] \text{ x } 20$

ಬಹುಲಕ $= 125 + \frac{7}{13} \text{ x } 20$

ಬಹುಲಕ $= 125 + 10.77 = 135.77$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 135.77 ಆಗಿದೆ.

ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.

2. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 28.5 ಆಗಿದ್ದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
0 - 10	5	5
10 - 20	x	5+x
20 - 30	20	25+x
30 - 40	15	40+x
40 - 50	y	40+x+y
50 - 60	5	45+x+y
ಒಟ್ಟು	60	

ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಗಳು = 45 + x + y

$\Rightarrow 60 = 45 + x + y$

$\Rightarrow x + y = 15$ --------------------------(1)

ಈಗ $n = 60, \therefore \frac{n}{2} = 30$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 20 – 30 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 20 .

cf (20 - 30ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 5 + x

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 20 – 30 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 20

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 10

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

$28.5 = 20 + \left[\frac{30 - (5 + x)}{20}\right] \times 10$

$8.5 \times 20 = (30 - 5 - x)10$

$170 = 250 - 10x$

$10x = 80 \Rightarrow x = 8$

x = 8 ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 137units ಆಗಿದೆ.

$\Rightarrow 8 + y = 15 \Rightarrow y = 7$

ಆದ್ದರಿಂದ x = 8 ಮತ್ತು y = 7

3. ಒಬ್ಬ ಜೀವ ವಿಮಾ ಏಜೆಂಟನು ಪಡೆದ 100 ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ವಿತರಣೆಯ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇವೆ. ಪಾಲಿಸಿಗಳನ್ನು 18 ವರ್ಷ ದಾಟಿದ ಮತ್ತು 60 ವರ್ಷಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ವಯಸ್ಸಿರುವ ಜನರಿಗೆ ಮಾತ್ರ ನೀಡಿದ್ದರೆ, ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ
20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	2
25 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	6
30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	24
35 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	45
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	78
45 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	89
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	92
55 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	98
60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	100

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ
15–20	2	2
20–25	4	6
25–30	18	24
30–35	21	45
35–40	33	78
40–45	11	89
45–50	3	92
50–55	6	98
55–60	2	100

ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಗಳು = 100

ಈಗ n = 100, $\therefore \frac{n}{2} = 50$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 35 – 40 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 35

cf (35 - 40ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 45

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 20 – 30 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 33

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 5

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= 35 + \left[\frac{50 - 45}{33}\right] \times 5$

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= 35 + \left[\frac{5}{33}\right] \times 5$

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= 35 + \frac{25}{33}$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = 35 + 0.76

ಮಧ್ಯಾಂಕ = 35.76

4. ಒಂದು ಗಿಡದ 40 ಎಲೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸಮೀಪದ ಮಿಲಿಮೀಟರ್‌ಗೆ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಅಳತೆ ಮಾಡಿದೆ ಮತ್ತು ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದೆ.

ಉದ್ದ(ಮಿ.ಮೀ.ಗಳಲ್ಲಿ)	ಎಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

ಎಲೆಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[ಸುಳುಹು: ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಿರಂತರ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಯಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ ಏಕೆಂದರೆ ಸೂತ್ರವು ನಿರಂತರ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು 117.5 – 126.5, 126.5 – 135.5, ..., 171.5 – 180.5 ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ.]

ಉದ್ದ(ಮಿ.ಮೀ.ಗಳಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
117.5 – 126.5	3	3
126.5 – 135.5	5	8
135.5 – 144.5	9	17
144.5 – 153.5	12	29
153.5 – 162.5	5	34
162.5 – 171.5	4	38
171.5 – 180.5	2	40

ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಗಳು = 100

ಈಗ n = 40, $\therefore \frac{n}{2} = 20$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 144.5 – 153.5 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 144.5

cf (144.5 – 153.5ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 17

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 20 – 30 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 12

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 9

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $144.5 + \left[\frac{20 - 17}{12}\right] \times 9$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $144.5 + \left[\frac{3}{12}\right] \times 9$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $144.5 + \frac{27}{12}$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = 144.5 + 2.25

ಮಧ್ಯಾಂಕ = 146.75mm

5. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 400 ನಿಯಾನ್ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
1500-2000	14
2000-2500	56
2500-3000	60
3000-3500	86
3500-4000	74
4000-4500	62
4500-5000	48

ಬಲ್ಬ್‌ನ ಬಾಳಿಕೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
1500-2000	14	14
2000-2500	56	70
2500-3000	60	130
3000-3500	86	216
3500-4000	74	290
4000-4500	62	352
4500-5000	48	400

ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಗಳು = 400

ಈಗ n = 400, $\therefore \frac{n}{2} = 200$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 3000 – 3500 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 3000

cf (3000 – 3500ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 130

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 20 – 30 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 86

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 500

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $3000 + \left[\frac{200 - 130}{86}\right] \times 500$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $3000 + \left[\frac{70}{86}\right] \times 500$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = 3000 + 406.98

ಮಧ್ಯಾಂಕ = 3406.98

6. ಒಂದು ಸ್ಥಳೀಯ ದೂರವಾಣಿ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಿ (Telephone directory) ಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ 100 ಉಪನಾಮಗಳನ್ನು (surname) ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಆಂಗ್ಲಭಾಷಾ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19
ಉಪನಾಮಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	30	40	16	4	4

ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ. ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಅಲ್ಲದೆ, ಉಪನಾಮಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
1-4	6	6
4-7	30	36
7-10	40	76
10-13	16	92
13-16	4	96
16-19	4	100

ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಗಳು = 100

ಈಗ n = 100, $\therefore \frac{n}{2} = 50$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 7 – 10 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 7

cf (7 – 10ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 36

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 20 – 30 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 40

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 3

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= 7 + \left[\frac{50 - 36}{40}\right] \times 3$

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= 7 + \left[\frac{14}{40}\right] \times 3$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = 7 + 1.05

ಮಧ್ಯಾಂಕ = 8.05

ಸರಾಸರಿ:

a = 8.5, h = 3

ಮಾಸಿಕ ಬಳಕೆ (ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	ಗ್ರಾಹಕರ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 135$	$u_i = \frac{x_i - 135}{20}$	$f_i d_i$
1-4	6	2.5	−6	−2	−12
4-7	30	5.5	−3	−1	−30
7-10	40	8.5	0	0	0
10-13	16	11.5	3	1	16
13-16	4	14.5	6	2	8
16-19	4	17.5	9	3	12
	$\sum f_i$ =100				-6

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x}$ = a + $\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$ x h

= 8.5 + $\frac{-6}{100}$ x 3 = 8.5 - 0.18 = 8.32

ಬಹುಲಕ:

ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ = 40

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 7 – 10 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 7$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, h = 3

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 30$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 30$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 16$

ಬಹುಲಕ = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

ಬಹುಲಕ = $7 + \left[\frac{40 - 30}{2(40) - 30 - 16}\right] \times 3$

ಬಹುಲಕ = $7 + \left[\frac{10}{80 - 46}\right] \times 3$

ಬಹುಲಕ = $7 + \frac{10}{34} \times 3$

ಬಹುಲಕ = 7 + 0.88 = 7.88

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 7.88 ಆಗಿದೆ.

7. **ಒಂದು ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

ತೂಕ(ಕೆ.ಜಿ.ಗಳಲ್ಲಿ)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	8	6	6	3	2

ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಅಲ್ಲದೆ, ಉಪನಾಮಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
40-45	2	2
45-50	3	5
50-55	8	13
55-60	6	19
60-65	6	25
65-70	3	28
70-75	2	30

ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಗಳು = 30

ಈಗ n = 30, ∴ $\frac{n}{2} = 15$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 55 – 60 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 55

cf (55 – 60ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 13

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 55 – 60 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 6

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 5

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $55 + \left[\frac{15 - 13}{6}\right] \times 5$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = 7 + $\left[\frac{2}{6}\right] \times 5$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = 55 + 1.67 = 56.67kg

13.5 ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು

ಉದಾಹರಣೆ 9: ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ವ್ಯಾಪಾರ ಮಳಿಗೆಯ 30 ಅಂಗಡಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ವಾರ್ಷಿಕ ಲಾಭದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

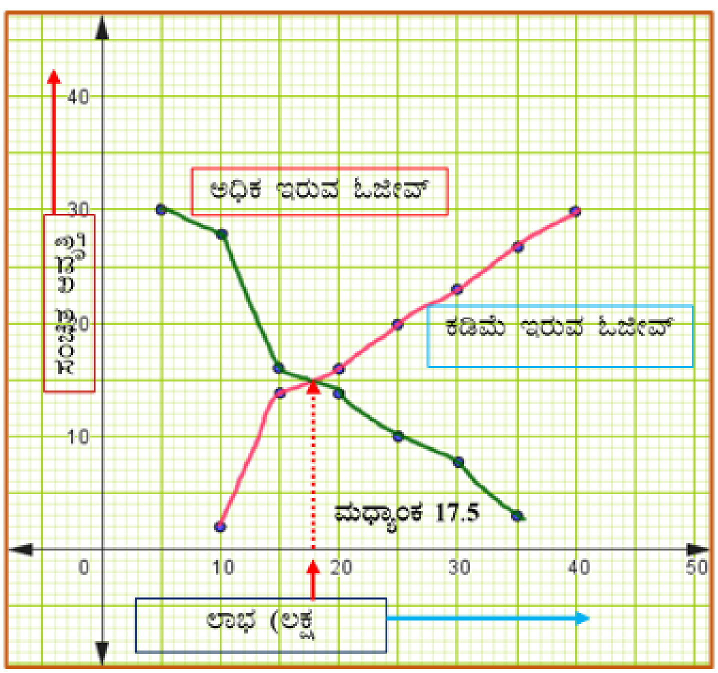
ಲಾಭ (ಲಕ್ಷ ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	ಅಂಗಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ(ಆವೃತ್ತಿ)
5 ಅಥವಾ 5ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	30
10 ಅಥವಾ 10ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	28
15 ಅಥವಾ 15ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	16
20 ಅಥವಾ 20ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	14
25 ಅಥವಾ 25ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	10
30 ಅಥವಾ 30ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	7
35 ಅಥವಾ 35ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	3

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಎರಡೂ ಓಜೀವ್‌ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅದರಿಂದ ಲಾಭಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

ಪರಿಹಾರ : ನಾವು ಮೊದಲು, x - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಲಾಭಾಂಶದ ಕೆಳಮಿತಿಗಳು ಮತ್ತು y - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳು ಇರುವಂತೆ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ ನಂತರ (5, 30), (10, 28), (15, 16, (20, 14), (25, 10), (30, 7) ಮತ್ತು (35, 3) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಧನಗಳ ನೆರವಿಲ್ಲದೆ ಸೇರಿಸಿದಾಗ "ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ" ಓಜೀವ್‌ನ್ನು ಚಿತ್ರ 13.5 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು, ಅವುಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ.

ವರ್ಗಾಂತರ	5-10	10-15	15-20	20-15	25-30	30-35	35-40
ಅಂಗಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	12	2	4	3	4	3
ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ	2	14	16	20	23	27	30



ಅಭ್ಯಾಸ 13.4

1. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ 50 ಕೆಲಸಗಾರರ ದೈನಂದಿನ ಆದಾಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

ದೈನಂದಿನ ಆದಾಯ(ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	12	14	8	6	10

ಮೇಲಿನ ವಿತರಣೆಯನ್ನು "ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ" ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ.

2. ಒಂದು ತರಗತಿಯ 35 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳು, ಅವರ ವೈದ್ಯಕೀಯ ತಪಾಸಣೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ದಾಖಲಾದವು.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
38 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	0
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	3
42 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	5
44 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	9
46 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	14
48 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	28
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	32
52 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	35

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ "ಕಡಿಮೆ ವಿಧಾನ" ದ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ತೂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿ.

3. ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ 100 ಹೊಲಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಹೆಕ್ಟೇರ್‌ಗೆ ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ಗೋಧಿಯ ಇಳುವರಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

ಉತ್ಪಾದನಾ ಇಳುವರಿ(Kg/ha)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
ಹೊಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	8	12	24	38	16

ಈ ವಿತರಣೆಯನ್ನು "ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ" ವಿತರಣೆಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ, ಇದರ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ.

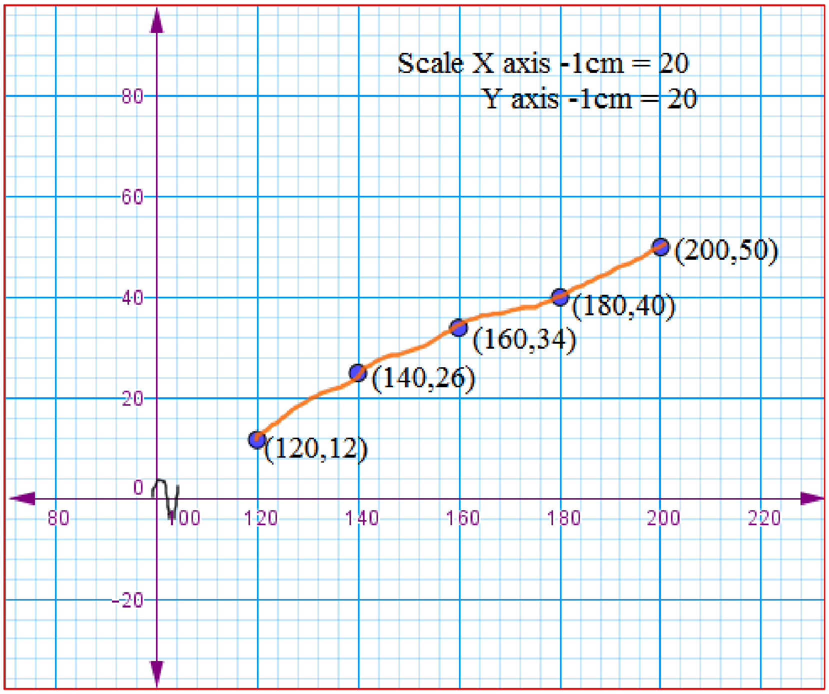
ಅಭ್ಯಾಸ 13.4

1. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ 50 ಕೆಲಸಗಾರರ ದೈನಂದಿನ ಆದಾಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

ದೈನಂದಿನ ಆದಾಯ(ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	12	14	8	6	10

ಮೇಲಿನ ವಿತರಣೆಯನ್ನು "ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ" ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ.

ದೈನಂದಿನ ಆದಾಯ(ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	12	14	8	6	10
ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ	12	26	34	40	50

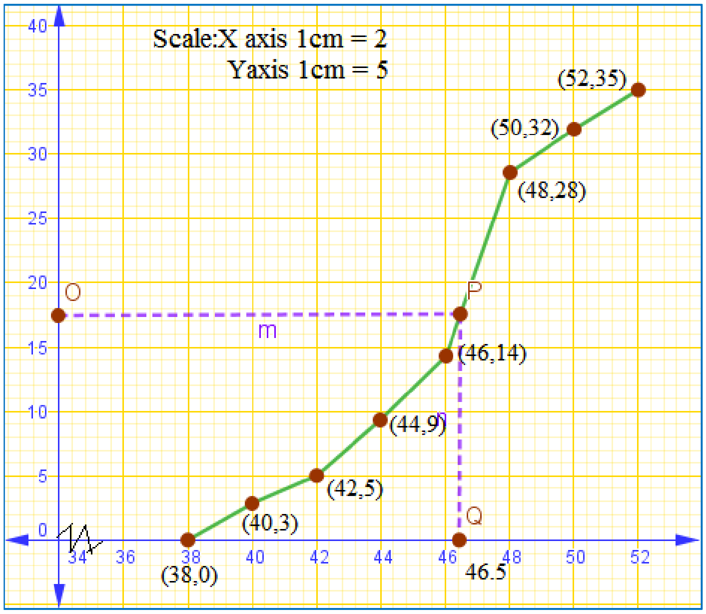


2. ಒಂದು ತರಗತಿಯ 35 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳು, ಅವರ ವೈದ್ಯಕೀಯ ತಪಾಸಣೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ದಾಖಲಾದವು.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
38 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	0
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	3
42 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	5
44 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	9
46 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	14
48 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	28
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	32
52 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	35

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ "ಕಡಿಮೆ ವಿಧಾನ" ದ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ತೂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	38	40	42	44	46	48	50	52
ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	0	3	5	9	14	28	32	35

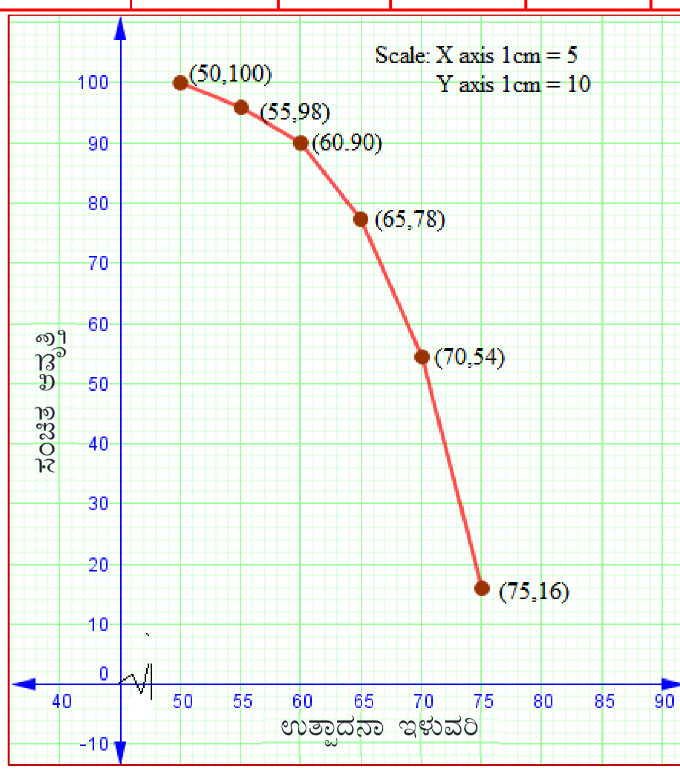


3. ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ 100 ಹೊಲಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಹೆಕ್ಟೇರ್‌ಗೆ ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ಗೋಧಿಯ ಇಳುವರಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

ಉತ್ಪಾದನಾ ಇಳುವರಿ(Kg/ha)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
ಹೊಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	8	12	24	38	16

ಈ ವಿತರಣೆಯನ್ನು "ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ" ವಿತರಣೆಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ, ಇದರ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಉತ್ಪಾದನಾ ಇಳುವರಿ	50	55	60	65	70	75
ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ	2	10	22	46	84	100
ಆವೃತ್ತಿ	100	98	90	78	54	16



ಸಾರಾಂಶ

1. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ನೇರ ವಿಧಾನ: $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ: $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ: $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯು ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರಿಕೃತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಲಾಗಿದೆ.

2. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$
ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕೇತಗಳು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ

3. ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

4. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಈ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$
ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕೇತಗಳು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

5. ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯಾಗಿ ಅಥವಾ ಓಜೀವ್ ಆಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

6. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಎರಡೂ ಓಜೀವ್‌ಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ x - ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವೇ ಆ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಇದನ್ನು ನಾವು ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯಬಹುದು.

14 ಸಂಭವನೀಯತೆ

14.2 ಸಂಭವನೀಯತೆ : ಒಂದು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ವಿಧಾನ.

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಚಿಮ್ಮಲಾಗಿದೆ. ನಾಣ್ಯವು ನೆಲಕ್ಕೆ ಬೀಳುವ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶಿರ ಅಥವಾ ಪುಚ್ಛ ಮಾತ್ರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು.

ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದರೆ,
ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳು 1,2,3,4,5 ಮತ್ತು 6 ಆಗಿವೆ.

ಒಂದು ಘಟನೆ 'E' ಯ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅಥವಾ ಅನುಭವವೇದ್ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ

$$P(E) = \frac{\text{ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸಿದ ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ನಾವು ನಾಣ್ಯದ ಬಗ್ಗೆ ಹೇಳುವಾಗ ಇದು ಕುಂದಿಲ್ಲದ (fair) ನಾಣ್ಯವೆಂದು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿ ಅದು ಕೆಳಕ್ಕೆ ಬಂದಾಗ ಒಂದೇ ಬದಿಯು ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಬೀಳಲು ಯಾವುದೇ ಕಾರಣ ಇರದಂತೆ ಅದು ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ನಾಣ್ಯದ ಈ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ನಾವು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತ (unbiased) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. 'ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆ' ಈ ಪದವನ್ನು, ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಪಕ್ಷಪಾತ (bias) ಅಥವಾ ಹಸ್ತಕ್ಷೇಪ (interference) ಇಲ್ಲದೆ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಬೀಳಲು ಬಿಡಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಅರ್ಥೈಯಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ (ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ),

E ಯನ್ನು P(E) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

$$P(E) = \frac{\text{ಘಟನೆ E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ, ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಒಂದು ಪುಚ್ಛವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಯದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ: ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಚಿಮ್ಮುವುದು.

S - { ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಚಿಮ್ಮುವುದು};

S - {H, T} [ಇಲ್ಲಿ H ಅಂದರೆ ಶಿರ ಮತ್ತು T ಅಂದರೆ ಪುಚ್ಛ] – n(S) = 2

A - { ಶಿರವು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವುದು }- n(A) = 1

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$

B - { ಪುಚ್ಛವು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವುದು }- n(B) = 1

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರದ ಒಂದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡು, ಒಂದು ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಮತ್ತು ಒಂದು ಹಳದಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಕೃತಿಕಾಳು ಚೀಲದೊಳಗೆ ನೋಡದೆಯೇ, ಅದರಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತಾಳೆ ಅವಳು ತೆಗೆಯುವ ಚೆಂಡು ಒಂದು (i) ಹಳದಿ ಚೆಂಡು (ii) ಕೆಂಪುಚೆಂಡು (iii) ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡಿಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

S – {ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಚೆಂಡುಗಳು } –{ ಕೆಂಪು, ನೀಲಿ, ಹಳದಿ}

n(S) = 3

A – { ಕೃತಿಕಾಳು ಹಳದಿ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು} – n(A) = 1

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{3}$

B – { ಕೃತಿಕಾಳು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು} – n(B) = 1

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{3}$

C – { ಕೃತಿಕಾಳು ನೀಲಿ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು} – n(C) = 1

$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{3}$

ಗಮನಿಸಿ: ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: ನಾವು ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಿದ್ದೇವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. (i) 4 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? (ii) 4 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 4 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

S – {ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆಯುವುದು } – { 1,2,3,4,5,6}

n(S) = 6

A – { 4ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು} – {5,6} - n(A) = 2

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

B – { 4ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 4ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು} – {1,2,3,4} - n(B) = 4

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$: ಇಲ್ಲಿ A ಯು ಒಂದು ಘಟನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, $\bar{A}$ ಅದರ ಪೂರಕ ಘಟನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಂಭವಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು '0'. ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು(ಮುಖಗಳ ಮೇಲೆ 1ರಿಂದ 6ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರುವ) ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವುದು.

ಖಚಿತವಾಗಿ (ಅಥವಾ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ) ಸಂಭವಿಸುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು ಖಚಿತ ಘಟನೆ ಅಥವಾ ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ 7 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವುದು.

$0 \le P(E) \le 1$

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆ ಕಾರ್ಡ್

(i) ಒಂದು ಏಸ್ ಆಗಿರುವ,

(ii) ಒಂದು ಏಸ್ ಆಗಿಲ್ಲದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆಟದ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಕಟ್ಟು 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ 13 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಂತೆ 4 ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ (suits) ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ. ಸ್ಪೇಡ್ (♠), ಹಾರ್ಟ್(♥), ಡೈಮಂಡ್ (♦) ಮತ್ತು ಕ್ಲಬ್ (♣). ಕ್ಲಬ್ಸ್ ಮತ್ತು ಸ್ಪೇಡ್ಸ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದವುಗಳಾಗಿದ್ದು ಹಾರ್ಟ್ಸ್ ಮತ್ತು ಡೈಮಂಡ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ್ದಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳೆಂದರೆ, ಏಸ್, ರಾಜ, ರಾಣಿ, ಜ್ಯಾಕ್, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 ಮತ್ತು 2. ರಾಜ, ರಾಣಿ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಕ್ ಈ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು (ಗೌರವಾನ್ವಿತ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

(i) S – ಇಸ್ಪೀಟ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು

n(S) = 52

E – ತೆಗೆದ ಕಾರ್ಡ್ ಒಂದು ಏಸ್ ಆಗಿರುವುದು.

P(E) = 4

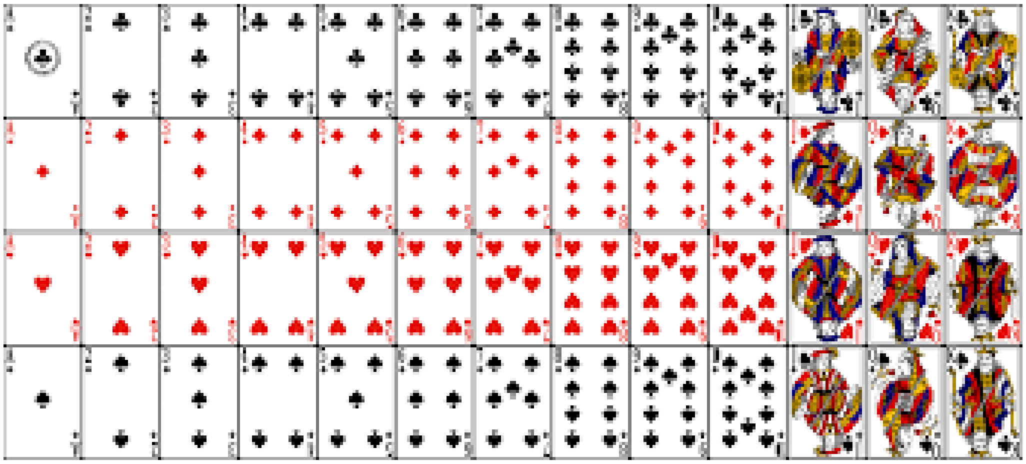
$P(A) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) F - ತೆಗೆದ ಕಾರ್ಡ್ ಒಂದು ಏಸ್ ಆಗಿರದಿರುವುದು.

n(F) = 48

$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{48}{52} = \frac{11}{13}$

ಅಥವಾ $P(F) = P(\bar{E}) = 1 - p(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{11}{13}$



ಉದಾಹರಣೆ 5: ಸಂಗೀತಾ ಮತ್ತು ರೇಶ್ಮಾ ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ಆಟಗಾರ್ತಿಯರು ಒಂದು ಟೆನ್ನಿಸ್ ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಆಡುತ್ತಾರೆ. ಸಂಗೀತಾಳು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.62 ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ರೇಶ್ಮಾಳು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಸಂಗೀತಾ ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $P(A) = 0.62$

ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಷ್ಮಾ ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.62 = 0.38$

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಸವಿತಾ ಮತ್ತು ಹಮೀದಾ ಗೆಳತಿಯರು ಇವರಿಬ್ಬರ ಜನ್ಮದಿನವು

(i) ಪ್ರತ್ಯೇಕ ದಿನಗಳಾಗಿರುವ

(ii) ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? (ಅಧಿಕ ವರ್ಷವನ್ನು ನಿರ್ಲಕ್ಷಿಸಿ)

(i) ಸವಿತಾ ಮತ್ತು ಹಮೀದಾರ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬವು ಪ್ರತೇಕ ದಿನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅನುಕೂಲಿಸುವ ದಿನಗಳು $365-1 = 364$

ಜನ್ಮದಿನ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ದಿನಗಳಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{364}{365}$

ಜನ್ಮದಿನ ಒಂದೇ ದಿನವಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{1}{365}$

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10 ನೇ ತರಗತಿಯ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 25 ಬಾಲಕಿಯರು ಮತ್ತು 15 ಬಾಲಕರಿದ್ದಾರೆ. ತರಗತಿ ಶಿಕ್ಷಕರು ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ತರಗತಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಯಾಗಿ ಆರಿಸಬೇಕಿದೆ. ಶಿಕ್ಷಕರು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಹೆಸರನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. ನಂತರ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಕಲಕುತ್ತಾರೆ. ನಂತರ ಅವರು ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಚೀಲದಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಕಾರ್ಡ್‌ನಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಹೆಸರು (i) ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕಿಯ (ii) ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕನದ್ದಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ: $n(S) = 40$

ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ – $n(A) = 25$

ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ – $n(B) = 15$

ಬಾಲಕಿಯ ಹೆಸರಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

ಬಾಲಕನ ಹೆಸರಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

ಅಥವಾ $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 3 ನೀಲಿ, 2 ಬಿಳಿ ಮತ್ತು 4 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಅದು

(i) ಬಿಳಿ (ii) ನೀಲಿ (iii) ಕೆಂಪು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಗೋಲಿಗಳು = $n(S) = 9$

ಗೋಲಿಯು ಬಿಳಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(W) = \frac{2}{9}$

ಗೋಲಿಯು ನೀಲಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(B) = \frac{3}{9}$

ಗೋಲಿಯು ಕೆಂಪಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(B) = \frac{4}{9}$

ಉದಾಹರಣೆ 9: ಹರ್ಪ್ರೀತಳು ಎರಡು ಭಿನ್ನ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸುತ್ತಾಳೆ. (ರೂ 1 ರ ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಮತ್ತು ರೂ 2 ರ ಒಂದು ನಾಣ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ) ಅವಳು ಕನಿಷ್ಟ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಎರಡು ಭಿನ್ನ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಫಲಿತ ಗಣ

$S = \{ HH, HT, TH, TT \}$

$n(S) = 4$

ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು – $\{HT, TH, TT\}$

ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ – $\frac{3}{4}$

[ಉದಾಹರಣೆ 10 ಮತ್ತು 11 ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅಲ್ಲವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೈ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.]

ಉದಾಹರಣೆ 12: ಒಂದು ರಟ್ಟಿನ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 100 ಶರ್ಟ್‌ಗಳಿವೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 88 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಉತ್ತಮವಾಗಿವೆ. 8 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಅಲ್ಪದೋಷಗಳಿಂದ ಕೂಡಿವೆ ಮತ್ತು 4 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಹೆಚ್ಚು ದೋಷಗಳಿಂದ ಕೂಡಿವೆ. ಜಿಮ್ಮಿ ಎಂಬ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಉತ್ತಮ ಶರ್ಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸ್ವೀಕರಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಸುಜಾತ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಹೆಚ್ಚು ದೋಷವಿರುವ ಶರ್ಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತಿರಸ್ಕರಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಶರ್ಟ್‌ನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ.

(i) ಇದನ್ನು ಜಿಮ್ಮಿಯು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ

(ii) ಇದನ್ನು ಸುಜಾತಳು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಒಟ್ಟು ಶರ್ಟ್‌ಗಳು = $n(S) = 100$

ಉತ್ತಮವಾದ ಶರ್ಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 88

(i) ಜಿಮ್ಮಿಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ (ಆತ ಸ್ವೀಕರಿಸುವ) ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 88

ಜಿಮ್ಮಿ ಶರ್ಟ್ ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{88}{100} = 0.88$

(ii) ಸುಜಾತಳಿಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $88 + 8 = 96$

ಸುಜಾತಳು ಶರ್ಟ್ ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{96}{100} = 0.96$

ಉದಾಹರಣೆ 13: ಒಂದು ನೀಲಿ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬೂದು ಬಣ್ಣದ ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆದಿದೆ. ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ದಾಳಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

(i) 8 (ii) 13 (iii) 12 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 12 ಕ್ಕೆ ಸಮ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),(1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

$n(S) = 6x6 = 36$

(i) A - ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 8 ಆಗಿರುವುದು

$A – \{ (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$

$n(A) = 5$

∴ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 8 ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{5}{36}$

(ii) B - ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 13 ಆಗಿರುವುದು

$n(B) = 0$

∴ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 8 ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{0}{36} = 0$

(iii) C - ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 12ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಅಥವಾ 12ಕ್ಕೆ ಸಮ ಆಗಿರುವುದು

$n(C) = 36$

∴ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 8 ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{36}{36} = 1$

ಅಭ್ಯಾಸ 14.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ.

   (i) ಒಂದು ಘಟನೆ E ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ + E ಅಲ್ಲದ' ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ = ________

   (ii) ಸಂಭವಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ________ ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು ________ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

   (iii) ಖಚಿತವಾಗಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ________ ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು ________ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

   (iv) ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ________

   (v) ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ________ ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಅಥವಾ ಸಮ ಮತ್ತು ________ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

2. ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಸಮಾನ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ? ವಿವರಿಸಿ.

   (i) ಒಬ್ಬ ಚಾಲಕನು ಕಾರನ್ನು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕಾರು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಆಗುವುದು ಅಥವಾ ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಆಗದಿರುವುದು.

   (ii) ಒಬ್ಬ ಆಟಗಾರ ಬಾಸ್ಕೆಟ್‌ಬಾಲ್‌ನ್ನು ಗುರಿಯತ್ತ ಎಸೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾನೆ ಅವನ/ಅವಳ ಗುರಿ ಮುಟ್ಟುವುದು ಅಥವಾ ಗುರಿಮುಟ್ಟದೇ ಇರುವುದು.

   (iii) ಸರಿ – ತಪ್ಪು ಉತ್ತರವಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲಾಗಿದೆ ಉತ್ತರವು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ಆಗಿರುವುದು.

   (iv) ಒಂದು ಮಗುವು ಜನಿಸಿದೆ ಇದು ಒಂದು ಗಂಡು ಅಥವಾ ಒಂದು ಹೆಣ್ಣು ಆಗಿರುವುದು.

3. ಒಂದು ಫುಟ್‌ಬಾಲ್ ಆಟದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ, ಯಾವ ತಂಡವು ಮೊದಲು ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು ಒಂದು ಉತ್ತಮ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಏಕೆ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ?

4. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

   A) $\frac{2}{3}$ B) -1.5 C) 15% D) 0.7 3

5. $P(E) = 0.05$ ಆದರೆ, ` E ಅಲ್ಲದ' ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

6. ಒಂದು ಚೀಲವು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಮಾಲಿನಿಯು ಚೀಲದೊಳಗೆ ನೋಡದೆ ಒಂದು ಕ್ಯಾಂಡಿಯನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳು ಹೊರತೆಗೆಯುವ ಕ್ಯಾಂಡಿಯು

   (i) ಒಂದು ಕಿತ್ತಳೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

   (ii) ಒಂದು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

7. 3 ಮಕ್ಕಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ, 2 ಮಕ್ಕಳ ಜನ್ಮದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.992 ಎಂದು ನೀಡಿದೆ. 2 ಮಕ್ಕಳ ಜನ್ಮದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

8. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 3 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು 5 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಚೀಲದಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ತೆಗೆದ ಚೆಂಡು (i) ಕೆಂಪು (ii) ಕೆಂಪು ಅಲ್ಲದ ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

9. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 5 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳು, 8 ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಗಳು ಮತ್ತು 4 ಹಸುರು ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೊರತೆಗೆದ ಗೋಲಿಯು (i) ಕೆಂಪು (ii) ಬಿಳಿ (iii) ಹಸುರು ಅಲ್ಲದ ಗೋಲಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?
10. ಒಂದು ಗೋಲಕವು (ಹಣದ ಹುಂಡಿ) 50 ಪೈಸೆಯ 100 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, ರೂ 1 ರ 50 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, ರೂ 2 ರ 20 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ರೂ 5 ರ 10 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಅದನ್ನು ಬೋರಲು ಹಾಕಿದಾಗ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಹೊರ ಬೀಳುವ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ. ಆ ನಾಣ್ಯವು (i) ಒಂದು 50 ಪೈಸೆ ನಾಣ್ಯವಾಗಿರುವ (ii) ಒಂದು ರೂ 5 ರ ನಾಣ್ಯ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?
11. ಗೋಪಿಯು ತನ್ನ ಅಕ್ವೇರಿಯಂ ಗೆ ಒಂದು ಅಂಗಡಿಯಿಂದ ಒಂದು ಮೀನನ್ನು ಖರೀದಿಸುತ್ತಾನೆ. ಅಂಗಡಿಯವನು ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನಲ್ಲಿರುವ 5 ಗಂಡು ಮೀನುಗಳು ಮತ್ತು 8 ಹೆಣ್ಣು ಮೀನುಗಳಿಂದ (ಚಿತ್ರ 14.4 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಮೀನನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾನೆ. ಹೊರ ತೆಗೆಯುವ ಮೀನು ಗಂಡು ಮೀನು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

Fig. 15.4

12. ಒಂದು ಅವಕಾಶದ ಆಟದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸೂಚಕವು (ಬಾಣವು) ಚಕ್ರಾಕಾರವಾಗಿ ತಿರುಗಿ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ಈ ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅಂಕಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ನಿಶ್ಚಲವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ (ಚಿತ್ರ 14.5 ನ್ನು ನೋಡಿ). ಸೂಚಕವು (i) 8 (ii) ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ (iii) 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (iv) 9 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

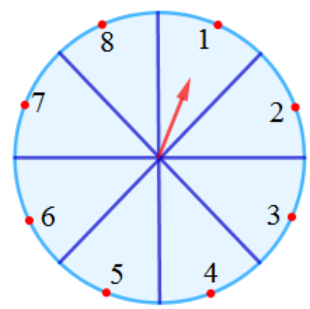


Fig 14.5

13. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ.(i) ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ (ii) 2 ಮತ್ತು 6 ರ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (iii) ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
14. ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. (i) ಒಂದು ಕೆಂಪು ರಾಜ (ii) ಒಂದು ಮುಖ (ಗೌರವಾನ್ವಿತ) ಕಾರ್ಡ್(iii) ಒಂದು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಮುಖ (ಗೌರವಾನ್ವಿತ) ಕಾರ್ಡ್ (iv) ಹಾರ್ಟ್‌ನ ಜ್ಯಾಕ್(v) ಒಂದು ಸ್ಪೇಡ್ (vi) ಡೈಮಂಡ್‌ನ ರಾಣಿ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
15. ಡೈಮಂಡ್‌ನ 5 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಾದ, 10, ಜ್ಯಾಕ್, ರಾಣಿ, ರಾಜ ಮತ್ತು ಏಸ್‌ಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಮುಖ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಇರುವಂತೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಲಾಗಿದೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ.

    (i) ಆ ಕಾರ್ಡ್ ರಾಣಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

    (ii) ರಾಣಿ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದು ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರಿಸಿ, ಎರಡನೇ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಅದು a) ಒಂದು ಏಸ್ b) ಒಂದು ರಾಣಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?
16. 12 ದೋಷಪೂರಿತ ಪೆನ್‌ಗಳು ಆಕಸ್ಮಿಕವಾಗಿ 132 ಉತ್ತಮ ಪೆನ್‌ಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಕೊಂಡಿವೆ. ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ನೋಡಿದ ಕೂಡಲೇ ಅದು ದೋಷಪೂರಿತವೇ? ಅಲ್ಲವೇ? ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ಗುಂಪಿನಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೊರತೆಗೆದ ಪೆನ್ ಉತ್ತಮವಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
17. (i) 20 ಬಲ್ಬ್‌ಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 4 ಬಲ್ಬ್‌ಗಳು ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿವೆ. ಗುಂಪಿನಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಬಲ್ಬನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದು ದೋಷಪೂರಿತ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

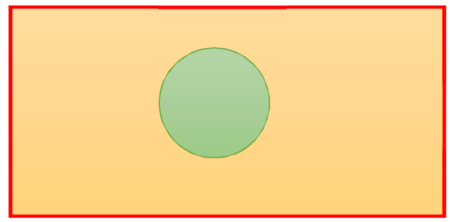
(ii) (i) ರಲ್ಲಿ ಹೊರ ತೆಗೆದ ಬಲ್ಬ್ ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿರದಿದ್ದರೂ ಸಹ ಅದನ್ನು ಬಲ್ಬ್ ಗಳ ಗುಂಪಿನಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿದೆ. ಈಗ ಉಳಿದ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳಿಂದ ಒಂದು ಬಲ್ಬ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಹೊರ ತೆಗೆದರೆ ಈ ಬಲ್ಬ್ ದೋಷಪೂರಿತ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

18. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ 90 ರರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮೂದಾಗಿರುವ 90 ಬಿಲ್ಲೆಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದರೆ ಅದು (i) 2 ಅಂಕಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (ii) ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ (iii) 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಬವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. ಒಂದು ಮಗುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಾಳವಿದೆ. ಅದರ ಮುಖಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತಿವೆ. ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಿದೆ. i) A ii) ಆ ಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ

A B C D E A

20. ಚಿತ್ರ 14.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನೀವು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಆಯತಾಕಾರದ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಬೀಳಿಸಿದ್ದೀರಿ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದು 1 m ವ್ಯಾಸದ ವೃತ್ತಾಕಾರದೊಳಗೆ ನಿಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ 15.6

21. ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ 144 ಬಾಲ್‌ಪೆನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ 20 ಪೆನ್ನುಗಳು ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದವು ಉತ್ತಮವಾಗಿವೆ. ನೂರಿಯು ಪೆನ್ನು ಉತ್ತಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಖರೀದಿಸುತ್ತಾನೆ, ಆದರೆ ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಖರೀದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂಗಡಿಯವನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಕೆಗೆ ನೀಡುತ್ತಾನೆ.(i) ಅವಳು ಇದನ್ನು ಖರೀದಿಸುವ (ii) ಅವಳು ಇದನ್ನು ಖರೀದಿಸದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

22. ಉದಾಹರಣೆ 13 ನ್ನು ನೋಡಿ (i) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ

ಘಟನೆ ಎರಡು ದಾಳಗಳ ಮೊತ್ತ	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
ಸಂಭವನೀಯತೆ	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು 'ಇಲ್ಲಿ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ಮತ್ತು 12 ಎಂಬ 11 ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಂದು ವಾದಿಸುತ್ತಾನೆ. ನೀವು ಈ ವಾದವನ್ನು ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಾ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

23. ಒಂದು ಆಟದಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೂಪಾಯಿಯ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಸಲದ ಫಲಿತವನ್ನು ದಾಖಲಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹನೀಫನು, ಪ್ರತಿ ಸಲವೂ ಒಂದೇ ಫಲಿತಾಂಶ ಅಂದರೆ, 3 ಶಿರಗಳು ಅಥವಾ 3 ಪುಚ್ಛಗಳು ಬಂದರೆ, ಆಟದಲ್ಲಿ ಗೆಲ್ಲುತ್ತಾನೆ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಸೋಲುತ್ತಾನೆ. ಹನೀಫನು ಆಟದಲ್ಲಿ ಸೋಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

24. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು 2 ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ. (I) ಎರಡೂ ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬರದಿರುವ (ii) ಕನಿಷ್ಟ ಒಂದು ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?
[ಸುಳುಹು: ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಎಸೆಯುವುದು ಮತ್ತು ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆಯುವುದು, ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು]

25. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಾದಗಳು ಸರಿಯಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಯಾವುವು ತಪ್ಪಾಗಿವೆ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ.

(i) ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ. ಮೂರು ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಇರುತ್ತವೆ – ಎರಡು ಶಿರಗಳು, ಎರಡು ಪುಚ್ಛಗಳು ಅಥವಾ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಒಂದರಂತೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(ii) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ, ಎರಡು ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು ಇರುತ್ತವೆ – ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

ಅಭ್ಯಾಸ 14.1

1. **ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ.**

(i) ಒಂದು ಘಟನೆ E ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ + E ಅಲ್ಲದ' ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ = __________

(ii) ಸಂಭವಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು _________ ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು _________ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

(iii) ಖಚಿತವಾಗಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು _________ ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು __________ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

(iv) ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು _________

(v) ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು _________ ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಅಥವಾ ಸಮ ಮತ್ತು _________ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉತ್ತರಗಳು:

(i) 1
(ii) 0 , ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ
(iii) 1, ಖಚಿತ ಘಟನೆ
(iv) 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ
(v) 0 , 1

2. **ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಸಮಾನ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ? ವಿವರಿಸಿ.**

(i) ಒಬ್ಬ ಚಾಲಕನು ಕಾರನ್ನು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕಾರು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಆಗುವುದು ಅಥವಾ ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಆಗದಿರುವುದು.

(ii) ಒಬ್ಬ ಆಟಗಾರ ಬಾಸ್ಕೆಟ್‌ಬಾಲ್‌ನ್ನು ಗುರಿಯತ್ತ ಎಸೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾನೆ ಅವನ/ಅವಳ ಗುರಿ ಮುಟ್ಟುವುದು ಅಥವಾ ಗುರಿಮುಟ್ಟದೇ ಇರುವುದು.

(iii) ಸರಿ – ತಪ್ಪು ಉತ್ತರವಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲಾಗಿದೆ ಉತ್ತರವು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ಆಗಿರುವುದು.

(iv) ಒಂದು ಮಗುವು ಜನಿಸಿದೆ ಇದು ಒಂದು ಗಂಡು ಅಥವಾ ಒಂದು ಹೆಣ್ಣು ಆಗಿರುವುದು.

(i) ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಕಾರು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಆಗದಿರಲು ಅದರ ಮೆಕಾನಿಸಂ ನಲ್ಲಿ ತೊಂದರೆ ಉಂಟಾದರೆ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ.

(ii) ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಇದರಲ್ಲಿ ಗುರಿಗಾರನ ತೀಕ್ಷ್ಣತೆ, ಅವನಿಗೆ ಲಭಿಸಿದ ತರಬೇತಿ ಮುಂತಾದ ಅನೇಕ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಅವನಿಗೆ ಸರಿ ಇಲ್ಲವೆ ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಿಸುವ ಅವಕಾಶ ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ.

(iv) ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಹುಟ್ಟುವ ಮಗು ಗಂಡು ಇಲ್ಲವೇ ಹೆಣ್ಣು ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

3. **ಒಂದು ಫುಟ್‌ಬಾಲ್ ಆಟದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ, ಯಾವ ತಂಡವು ಮೊದಲು ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು ಒಂದು ಉತ್ತಮ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಏಕೆ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ?**

ನಾಣ್ಯ ಚಿಮ್ಮುಗೆಯು ಎರಡೇ ಫಲಿತವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಶಿರ ಅಥವಾ ಪುಚ್ಛ. ಮತ್ತು ಇದರ ಫಲಿತಾಂಶವು ಪೂರ್ವ ನಿರ್ಧರಿತವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

4. **ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.**

A) $\frac{2}{3}$ B) -1.5 C) 15% D) 0.7 3

B) -1.5 ಇದು ಯಾವುದೇ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಯಾವತ್ತೂ $0 \leq$ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ≤ 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

5. **$P(E) = 0.05$ ಆದರೆ, 'E ಅಲ್ಲದ' ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

'E ಅಲ್ಲದ' ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= 1 - P(E) = 1 - 0.05 = 0.95$

6. **ಒಂದು ಚೀಲವು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಮಾಲಿನಿಯು ಚೀಲದೊಳಗೆ ನೋಡದೆ ಒಂದು ಕ್ಯಾಂಡಿಯನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳು ಹೊರತೆಗೆಯುವ ಕ್ಯಾಂಡಿಯು**

(i) ಒಂದು ಕಿತ್ತಳೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

(ii) ಒಂದು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

(i) ಒಂದು ಕಿತ್ತಳೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು = 0
ಏಕೆಂದರೆ ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಕಿತ್ತಾಳೆ ಪರಿಮಳದ ಯಾವುದೇ ಕ್ಯಾಂಡಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) ಒಂದು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು = 1
ಏಕೆಂದರೆ ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ಯಾಂಡಿಗಳು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

7. **3 ಮಕ್ಕಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ, 2 ಮಕ್ಕಳ ಜನ್ಮದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.992 ಎಂದು ನೀಡಿದೆ. 2 ಮಕ್ಕಳ ಜನ್ಮದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

ಜನ್ಮ ದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = 1 – ಜನ್ಮ ದಿನ ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ
$= 1 - 0.992 = 0.008$

8. **ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 3 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು 5 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಚೀಲದಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ತೆಗೆದ ಚೆಂಡು (i) ಕೆಂಪು (ii) ಕೆಂಪು ಅಲ್ಲದ ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಚೆಂಡುಗಳು = $n(S) = 3 + 5 = 8$

(i) ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $n(A) = 3$

ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

(ii) ಕೆಂಪು ಅಲ್ಲದ ಚೆಂಡು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

9. **ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 5 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳು, 8 ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಗಳು ಮತ್ತು 4 ಹಸುರು ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೊರತೆಗೆದ ಗೋಲಿಯು (i) ಕೆಂಪು (ii) ಬಿಳಿ (iii) ಹಸುರು ಅಲ್ಲದ ಗೋಲಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಚೆಂಡುಗಳು = $n(S) = 5 + 8 + 4 = 17$

(i) ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $n(A) = 5$

ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{17}$

(ii) ಬಿಳಿ ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $n(B) = 8$

ಬಿಳಿ ಚೆಂಡು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{8}{17}$

(iii) ಹಸುರು ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $n(C) = 4$

ಬಿಳಿ ಚೆಂಡು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{17}$

10. **ಒಂದು ಗೋಲಕವು (ಹಣದ ಹುಂಡಿ) 50 ಪೈಸೆಯ 100 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, ರೂ 1 ರ 50 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, ರೂ 2 ರ 20 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ರೂ 5 ರ 10 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಅದನ್ನು ಬೋರಲು ಹಾಕಿದಾಗ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಹೊರ ಬೀಳುವ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ. ಆ ನಾಣ್ಯವು (i) ಒಂದು 50 ಪೈಸೆ ನಾಣ್ಯವಾಗಿರುವ (ii) ಒಂದು ರೂ 5 ರ ನಾಣ್ಯ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

ಗೋಲಕದಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ನಾಣ್ಯಗಳು = $100 + 50 + 20 + 10 = 180$

ಗೋಲಕದಲ್ಲಿರುವ 50 ಪೈಸೆಯ ನಾಣ್ಯಗಳು = $n(A) = 100$

ಗೋಲಕದಲ್ಲಿರುವ 5ರೂ ನಾಣ್ಯಗಳು = $n(B) = 10$

(i) ಒಂದು 50 ಪೈಸೆ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$

(ii)ಒಂದು 5ರೂ ನಾಣ್ಯವಾಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ $1 - P(B) = 1 - \frac{n(B)}{n(S)} = 1 - \frac{10}{180} = \frac{17}{18}$

11. ಗೋಪಿಯು ತನ್ನ ಅಕ್ವೇರಿಯಂ ಗೆ ಒಂದು ಅಂಗಡಿಯಿಂದ ಒಂದು ಮೀನನ್ನು ಖರೀದಿಸುತ್ತಾನೆ. ಅಂಗಡಿಯವನು ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನಲ್ಲಿರುವ 5 ಗಂಡು ಮೀನುಗಳು ಮತ್ತು 8 ಹೆಣ್ಣು ಮೀನುಗಳಿಂದ (ಚಿತ್ರ 14.4 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಮೀನನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾನೆ. ಹೊರ ತೆಗೆಯುವ ಮೀನು ಗಂಡು ಮೀನು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?


Fig. 15.4

ಟ್ಯಾಂಕ್ ನಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಮೀನುಗಳು = $n(S) = 5+8 = 13$

ಗಂಡು ಮೀನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $n(A) = 5$

ಆದ್ದರಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆದ ಮೀನು ಗಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ

$= P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{13}$

12. ಒಂದು ಅವಕಾಶದ ಆಟದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸೂಚಕವು (ಬಾಣವು) ಚಕ್ರಾಕಾರವಾಗಿ ತಿರುಗಿ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ಈ ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅಂಕಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ನಿಶ್ಚಲವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ (ಚಿತ್ರ 14.5 ನ್ನು ನೋಡಿ). ಸೂಚಕವು (i) 8 (ii) ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ (iii) 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (iv) 9 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು $= 8$

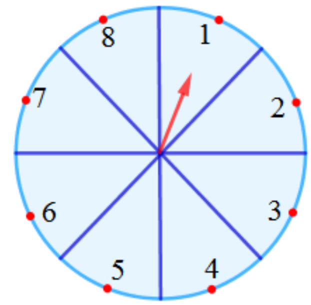


Fig 14.5

(i) ಸೂಚಕವು 8 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 1

ಸೂಚಕವು 8 ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{1}{8}$

(ii) ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆ (1, 3, 5 ಮತ್ತು 7) = 4

ಸೂಚಕವು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(iii) 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 3, 4, 5, 6, 7 ಮತ್ತು 8

2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6

ಸೂಚಕವು 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{6}{8} = \frac{4}{4}$

(iv) 9 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 1,2,3,4,5,6,7,8

9 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 8

ಸೂಚಕವು 9ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{8}{8} = 1$

13. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ.(i) ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ (ii) 2 ಮತ್ತು 6 ರ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (iii) ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6

ದಾಳದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 1,2,3,4,5 ಮತ್ತು 6

(i) ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 2, 3 ಮತ್ತು 5

ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 3

ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) 2 ಮತ್ತು 6ರ ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 3, 4 ಮತ್ತು 5

2ರಿಂದ6ರ ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 3

2 ರಿಂದ 6ರ ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(iii) ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $= 1, 3$ ಮತ್ತು 5

ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು $= 3$

ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

14. ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. (i) ಒಂದು ಕೆಂಪು ರಾಜ (ii) ಒಂದು ಮುಖ (ಗೌರವಾನ್ವಿತ) ಕಾರ್ಡ್ (iii) ಒಂದು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಮುಖ (ಗೌರವಾನ್ವಿತ) ಕಾರ್ಡ್ (iv) ಹಾರ್ಟ್‌ನ ಜ್ಯಾಕ್ (v) ಒಂದು ಸ್ಪೇಡ್ (vi) ಡೈಮಂಡ್‌ನ ರಾಣಿ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು $= 52$

(i) ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ರಾಜರ ಸಂಖ್ಯೆ $= 2$

ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ರಾಜನನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

(ii) ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಸಮಖ್ಯೆ $= 12$

ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

(iii) ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು $= 6$

ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

(iv) ಹಾರ್ಟ್ ಜಾಕ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $=1$

ಹಾರ್ಟ್ ಜಾಕ್ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{1}{52}$

(v) ಸ್ಪೇಡ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 13$

ಸ್ಪೇಡ್ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

(vi) ಡೈಮಂಡಿನ ರಾಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 1$

ಡೈಮಂಡಿನ ರಾಣಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{1}{52}$

15. ಡೈಮಂಡ್‌ನ 5 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಾದ, 10, ಜ್ಯಾಕ್, ರಾಣಿ, ರಾಜ ಮತ್ತು ಏಸ್‌ಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಮುಖ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಇರುವಂತೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಲಾಗಿದೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(i) ಆ ಕಾರ್ಡ್ ರಾಣಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) ರಾಣಿ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದು ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರಿಸಿ, ಎರಡನೇ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಅದು a) ಒಂದು ಏಸ್ b) ಒಂದು ರಾಣಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಟ್ಟು ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 5$

(i) ಒಟ್ಟು ರಾಣಿ $= 1$

ರಾಣಿಯನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{1}{5}$

(ii) ರಾಣಿ ಕಾರ್ಡ್ ತೆಗೆದು ಪಕ್ಕಕ್ಕಿರಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು $= 4$

(a) ಏಸ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 1$

ಏಸ್‌ನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{1}{4}$

(b) ಒಟ್ಟು ರಾಣಿ $= 0$

ರಾಣಿಯನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{0}{4} = 0$

16. 12 ದೋಷಪೂರಿತ ಪೆನ್‌ಗಳು ಆಕಸ್ಮಿಕವಾಗಿ 132 ಉತ್ತಮ ಪೆನ್‌ಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಕೊಂಡಿವೆ. ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ನೋಡಿದ ಕೂಡಲೇ ಅದು ದೋಷಪೂರಿತವೇ? ಅಲ್ಲವೇ? ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ಗುಂಪಿನಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೊರತೆಗೆದ ಪೆನ್ ಉತ್ತಮವಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೋಷಪೂರಿತ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 12

ಉತ್ತಮ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 132

ಒಟ್ಟು ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 132 + 12 = 144

ಹೊರ ತೆಗೆದ ಪೆನ್ನು ಉತ್ತಮ ಪೆನ್ನು ಆಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 132

ಹೊರ ತೆಗೆದ ಪೆನ್ನು ಉತ್ತಮ ಪೆನ್ನು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{132}{144} = \frac{11}{12}$

17. (i) 20 ಬಲ್ಬ್‌ಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 4 ಬಲ್ಬ್‌ಗಳು ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿವೆ. ಗುಂಪಿನಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಬಲ್ಬನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದು ದೋಷಪೂರಿತ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) (i) ರಲ್ಲಿ ಹೊರ ತೆಗೆದ ಬಲ್ಬ್ ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿರದಿದ್ದರೂ ಸಹ ಅದನ್ನು ಬಲ್ಬ್ ಗಳ ಗುಂಪಿನಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿದೆ. ಈಗ ಉಳಿದ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳಿಂದ ಒಂದು ಬಲ್ಬ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಹೊರ ತೆಗೆದರೆ ಈ ಬಲ್ಬ್ ದೋಷಪೂರಿತ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(i) ಒಟ್ಟು ಬಲ್ಬುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 20

ದೋಷಪೂರಿತ ಬಲ್ಬುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4

ದೋಷಪೂರಿತ ಬಲ್ಬು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

(ii) (i) ರಲ್ಲಿ ದೋಷಪೂರಿತ ಬಲ್ಬು ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಅದನ್ನು ಹೊಗಿಟ್ಟಾಗ ಉಳಿದ ಬಲ್ಬುಗಳು = 19

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 19

ದೋಷಪುರಿತವಲ್ಲದ ಬಲ್ಬು ಪಡೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 19 - 4 = 15

ದೋಷಪೂರಿತವಲ್ಲದ ಬಲ್ಬು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{15}{19}$

18. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ 90 ರರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮೂದಾಗಿರುವ 90 ಬಿಲ್ಲೆಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದರೆ ಅದು (i) 2 ಅಂಕಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (ii) ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ (iii) 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಬವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಟ್ಟು ಬಿಲ್ಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 50

(i) ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆ = 81

ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{81}{90} = \frac{9}{10}$

(ii) ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 ಮತ್ತು 81

ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 9

ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{9}{90} = \frac{1}{10}$

(iii) 5ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85ಮತ್ತು 90

5ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 18

5ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{18}{90} = \frac{1}{5}$

19. ಒಂದು ಮಗುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಾಳವಿದೆ. ಅದರ ಮುಖಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತಿವೆ.

A	B	C	D	E	A

ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಿದೆ. i) A ii) D ಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6

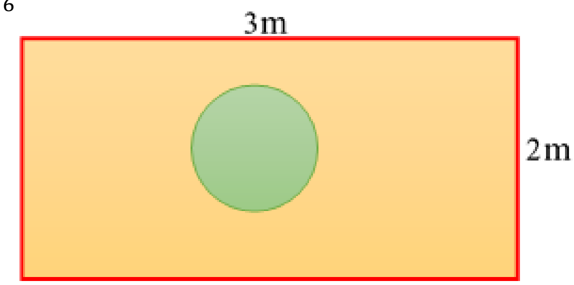
(i) A ಅಕ್ಷರವಿರುವ ಮುಖಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 2

A ಅಕ್ಷರವಿರುವ ಮುಖವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ= $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) D ಅಕ್ಷರವಿರುವ ಮುಖಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 1$

D ಅಕ್ಷರವಿರುವ ಮುಖವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{1}{6}$

20. ಚಿತ್ರ 14.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನೀವು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಆಯತಾಕಾರದ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಬೀಳಿಸಿದ್ದೀರಿ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದು 1m ವ್ಯಾಸದ ವೃತ್ತಾಕಾರದೊಳಗೆ ನಿಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?



(ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅಲ್ಲ)

ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= (3 \times 2)\ m^2 = 6m^2$

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\ m^2$

ದಾಳವು ವ್ಯಾಸದ ವೃತ್ತಾಕಾರದೊಳಗೆ ನಿಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{\frac{\pi}{4}}{6} = \frac{\pi}{24}$

21. ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ 144 ಬಾಲ್‌ಪೆನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ 20 ಪೆನ್ನುಗಳು ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದವು ಉತ್ತಮವಾಗಿವೆ. ನೂರಿಯು ಪೆನ್ನು ಉತ್ತಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಖರೀದಿಸುತ್ತಾನೆ, ಆದರೆ ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಖರೀದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂಗಡಿಯವನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಕೆಗೆ ನೀಡುತ್ತಾನೆ.(i) ಅವಳು ಇದನ್ನು ಖರೀದಿಸುವ (ii) ಅವಳು ಇದನ್ನು ಖರೀದಿಸದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

ದೋಷಪೂರಿತ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 20$

ಉತ್ತಮವಾಗಿರುವ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 144 - 20 = 124$

(i) ಖರೀದಿಸುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು $= 124$

ಆಕೆಯು ಪೆನ್ನನ್ನು ಖರೀದಿಸುವ ಸಮಬವನೀಯತೆ $= \frac{124}{144} = \frac{31}{36}$

(ii) ಖರೀದಿಸದಿರುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು $= 20$

ಆಕೆಯು ಖರೀದಿಸದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{20}{144} = \frac{5}{36}$

22. ಉದಾಹರಣೆ 13 ನ್ನು ನೋಡಿ (i) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ

ಘಟನೆ ಎರಡು ದಾಳಗಳ ಮೊತ್ತ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ಸಂಭವನೀಯತೆ	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು 'ಇಲ್ಲಿ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ಮತ್ತು 12 ಎಂಬ 11 ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{1}{11}$ ಎಂದು ವಾದಿಸುತ್ತಾನೆ. ನೀವು ಈ ವಾದವನ್ನು ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಾ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),(1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

$n(S) = 6x6 = 36$

(i) ಮೊತ್ತ 2 ಆಗಿರುವುದು = (1,1)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,2) ಮತ್ತು (2,1)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,3); (3,1); ಮತ್ತು (2,2)
ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,4); (4,1); (2,3); ಮತ್ತು (3,2)
ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,5); (5,1); (2,4); (4,2); ಮತ್ತು (3,3)
ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,6); (6,1); (5,2); (2,5); (4,3); ಮತ್ತು (3,4)
ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (2,6); (6,2); (3,5); (5,3); ಮತ್ತು (4,4)
ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (3,6); (6,3); (4,5); ಮತ್ತು (5,4)
ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (4,6); (6,4) ಮತ್ತು (5,5)
ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (5,6) ಮತ್ತು (6,5)
ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (6,6)

ಘಟನೆ ಎರಡು ದಾಳಗಳ ಮೊತ್ತ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ಸಂಭವನೀಯತೆ	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) ಒಪ್ಪಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಅವು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

23. ಒಂದು ಆಟದಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೂಪಾಯಿಯ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಸಲದ ಫಲಿತವನ್ನು ದಾಖಲಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹನೀಫನು, ಪ್ರತಿ ಸಲವೂ ಒಂದೇ ಫಲಿತಾಂಶ ಅಂದರೆ, 3 ಶಿರಗಳು ಅಥವಾ 3 ಪುಚ್ಛಗಳು ಬಂದರೆ, ಆಟದಲ್ಲಿ ಗೆಲ್ಲುತ್ತಾನೆ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಸೋಲುತ್ತಾನೆ. ಹನೀಫನು ಆಟದಲ್ಲಿ ಸೋಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಫಲಿತಗಳು = HHH, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, TTT

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 8

ಹನೀಫನು ಸೋಲುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು – HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT

ಹನೀಫನು ಸೋಲುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6

ಹನೀಫನು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಸೋಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

24. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು 2 ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ. (I) ಎರಡೂ ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬರದಿರುವ (ii) ಕನಿಷ್ಟ ಒಂದು ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

[ಸುಳುಹು: ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಎಸೆಯುವುದು ಮತ್ತು ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆಯುವುದು, ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು]

(i) ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6 x 6 = 36

ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),(1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4),(4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,6)

ಎರಡೂ ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬಾರದಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 25

ಎರಡೂ ಸಲ ಮೇಲೆ 5 ಬಾರದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{25}{36}$

(ii) 5 ಕನಿಷ್ಟ ಒಂದು ಬಾರಿ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = 1 – ಎರಡೂ ಸಲ ಮೇಲೆ 5 ಬಾರದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ

Probability $= 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

25. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಾದಗಳು ಸರಿಯಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಯಾವುವು ತಪ್ಪಾಗಿವೆ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ.

(i) ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ. ಮೂರು ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಇರುತ್ತವೆ – ಎರಡು ಶಿರಗಳು, ಎರಡು ಪುಚ್ಛಗಳು ಅಥವಾ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಒಂದರಂತೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{1}{3}$

(ii) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ, ಎರಡು ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು ಇರುತ್ತವೆ – ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು–$\frac{1}{2}$

(i) ತಪ್ಪು

ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯುಳ್ಳ ಘಟನೆಗಳಲ್ಲ.

ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಘಟನೆಗಳು: (H,H); (H,T); (T,H) ಮತ್ತು (T,T)

ಎರಡು ಶಿರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{1}{4}$

ಒಂದು ಶಿರ ಮತ್ತು ಒಂದು ಪುಚ್ಛ ಪಡೆಯುವ ಸಂಬವನೀಯತೆ $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(ii)ಸರಿ – ಈ ಎರಡೂ ಘಟನೆಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯುಳ್ಳ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾರಾಂಶ:

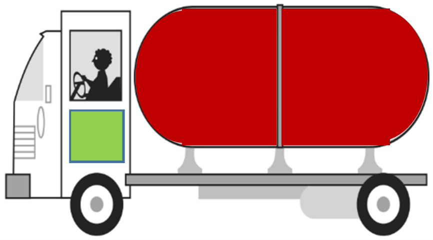
1. ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮತ್ತು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ
2. ಒಂದು ಘಟನೆ `E' ಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ (ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ) ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

   $$P(E) = \frac{\text{ಘಟನೆ E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

   ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಗಳ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯದಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ.
3. ಖಚಿತ ಘಟನೆ (ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ) ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 1 ಆಗಿದೆ.
4. ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0 ಆಗಿದೆ.
5. ಒಂದು ಘಟನೆ `E' ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ P(E) ಯು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು $0 \le$ ಕ(ಇ) ≤ 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
6. ಒಂದು ಘಟನೆಗೆ ಕೇವಲ ಒಂದು ಫಲಿತವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
7. ಯಾವುದೇ ಘಟನೆ `E' ಗೆ $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

15 ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು

ನೀರು ಅಥವಾ ತೈಲವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಳದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹೋಗುವ ಲಾರಿಯ ಹಿಂಬದಿಯಲ್ಲಿನ ಸಂಗ್ರಹಕವನ್ನು ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್, ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರವನ್ನು ಅದರ ಎರಡು ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿ ಮಾಡಿದೆ ಎಂದು ನೀವು ಊಹಿಸಬಹುದು.
ವಿಜ್ಞಾನ ಪ್ರಯೋಗಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯು ಸಹ ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಮಾಡಿದೆ.



15.2 ಜೋಡಿಸಿದ ಘನಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಸಂಗ್ರಹಕ, ಪ್ರಣಾಳ ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಅಥವಾ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಇಲ್ಲವೆ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.
ಅಂದರೆ
ಸಂಗ್ರಹಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
ಪ್ರಣಾಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸಿಲಿಂಡಿರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಉದಾಹರಣೆ 1: ರಶೀದನು ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬದ ಉಡುಗೊರೆಯಾಗಿ ಒಂದು ಬುಗರಿಯನ್ನು ಪಡೆದನು. ಬಗುರಿಯ ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬಣ್ಣ ಇರಲಿಲ್ಲ. ಅವನ ಬಳಿ ಇರುವ ಬಣ್ಣದ ಕಡ್ಡಿ (crayons) ಗಳಿಂದ ಬಣ್ಣ ಬಳಿಯಲು ಬಯಸಿದ್ದಾನೆ. ಬಗುರಿಯು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಇರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.6 ನೋಡಿ). ಬಗುರಿಯ ಸಂಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರವು 5 cm ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು 3.5 cm ಇದ್ದರೆ, ಅವನು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ =ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

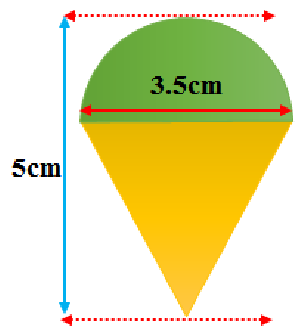


Fig 15.6

ಪರಿಹಾರ:
ಆಟಿಕೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಶಂಕುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $2\pi r^2 = \left(2\text{x}\ \frac{22}{7}\ \text{x}\ \frac{3.5}{2}\ \text{x}\ \frac{3.5}{2}\right)\text{cm}^2$

ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ = ಬಗುರಿಯ ಎತ್ತರ – ಅರ್ಧಗೋಳದ ಎತ್ತರ (ತ್ರಿಜ್ಯ)

$= 5 - 1.75 = 3.25\text{cm}$

ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ (l) = $\sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{(1.75)^2 + (3.25)^2} \approx 3.7\text{cm}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi\, rl$

$= \left(\frac{22}{7}\ \text{x}\ \frac{3.5}{2}\ \text{x}\ 3.7\right)\text{cm}^2$

∴ ಬಗುರಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\left(2\text{x}\ \frac{22}{7}\ \text{x}\ \frac{3.5}{2}\ \text{x}\ \frac{3.5}{2}\right) + \left(\frac{22}{7}\ \text{x}\ \frac{3.5}{2}\ \text{x}\ 3.7\right)$

$= \frac{22}{7}\ \text{x}\ \frac{3.5}{2}(3.5 + 3.7)$

$= 11\ \text{x}\ 0.5(3.5 + 3.7)$

$= 5.5\ \text{x}\ 7.2$

$= 39.6\text{cm}^2$

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಚಿತ್ರ 15.7 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಅಲಂಕಾರಿಕ ವಸ್ತುವು ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳ ಈ ಎರಡು ಘನಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದೆ. ವಸ್ತುವಿನ ಪಾದವು 5 cm ಬಾಹುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲೆ 4.2 cm ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಇರಿಸಿದೆ. ವಸ್ತುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ =ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

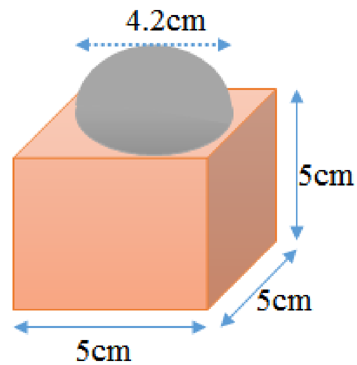


Fig 15.7

ಪರಿಹಾರ: ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= 6 x (ಬಾಹು)^2 = = $6 \times 5 \times 5 = 150$ cm^2

ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ– ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= (150 - \pi r^2 + 2\pi r^2)$cm^2

$= (150 + \pi r^2)$cm^2

$= (150 + \frac{22}{7}$x 2.1 x 2.1)cm^2

$= (150 + 13.86)$cm^2

$= 163.86$cm^2

ಉದಾಹರಣೆ 3: . ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಮೇಲೆ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದವನ್ನು ಇರಿಸಿ, ಒಂದು ಮರದ ಆಟಿಕೆಯ ರಾಕೆಟ್‌ಅನ್ನು ಚಿತ್ರ 15.8 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಾಡಿದೆ. ರಾಕೆಟ್‌ನ ಸಂಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರವು 26 cm ಹಾಗೆಯೇ, ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಭಾಗದ ಎತ್ತರವು 6cm ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 5 cm. ಹಾಗೆಯೇ, ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 3 cm ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಭಾಗವನ್ನು ಕಿತ್ತಳೆ ಬಣ್ಣ ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಭಾಗವನ್ನು ಹಳದಿ ಬಣ್ಣವನ್ನು ಹಚ್ಚಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಿದ ರಾಕೆಟ್‌ನಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(π = 3.14 ಎಂದು ಬಳಸಿ).

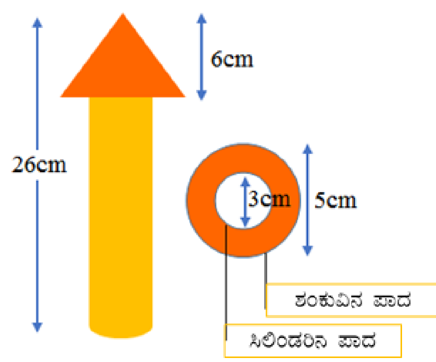


Fig 15.8

ಪರಿಹಾರ: ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು r ಎಂದು, ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ l ಎಂದು, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ h ಎಂದು, ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ r' ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ h' ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ r = 2.5 cm, h = 6 cm, r^1 = 1.5 cm, h^1 = 26 - 6 = 20 cm ಮತ್ತು $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= l = \sqrt{2.5^2 + 6^2} = 6.5$cm

ಇಲ್ಲಿ, ಶಂಕುವಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದವು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. ಆದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದವು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಒಂದು ಭಾಗಕ್ಕೆ (ಉಂಗುರ) ಮಾತ್ರ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕು.

ಇಲ್ಲಿ, ಕಿತ್ತಳೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚ ಬೇಕಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \pi r l + \pi r^2 - \pi (r^1)^2$

$= \pi [(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2]$ cm^2

$= \pi [20.25]$ cm^2

$= 3.14 \times 20.25$ cm^2

$= 63.585$ cm^2

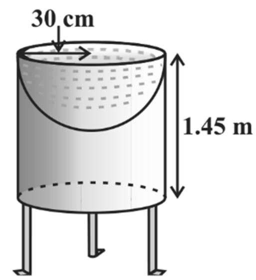
ಈಗ, ಹಳದಿ ಬಣ್ಣ ಬಳೆಯಬೇಕಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಂದು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

$= 2\pi r^1h^1 + \pi(r^1)^2$

$= \pi r^1 (2h^1 + r^1)$

$= (3.14\times1.5)(2\times20 + 1.5)\ cm^2$

$= 4.71\times 41.5\ cm^2 = 195.465\ cm^2$



ಉದಾಹರಣೆ 4: ಮಯಾಂಕನು ಅವನ ಕೈ ತೋಟದಲ್ಲಿ ಪಕ್ಷಿಗಳು ಸ್ನಾನ ಮಾಡಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ, ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದಲ್ಲಿ ತಗ್ಗಾಗುವಂತೆ, ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಚಿತ್ರ 15.9 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಿರ್ಮಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ 1.45 m ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 30 cm ಇದೆ. ಈ ಸಾಧನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ =ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಪರಿಹಾರ: ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ `h' ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದ್ದು, ಅದು `r' ಎಂದಿರಲಿ. ನಂತರ, ಈ ಸಾಧನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r (h + r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30 (145 + 30)\ cm^2$

$= 33000\ cm^2 = 3.3 m^2$

ಅಭ್ಯಾಸ 15.1

(π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

1. 64 cm^3 ಘನಫಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 2 ವರ್ಗ ಘನಗಳ ಮುಖಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿ ಮಾಡಿದೆ. ಈ ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯ ಆಕಾರವು ಟೊಳ್ಳಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಂದು ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಟೊಳ್ಳಾದ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮಾಡಿದೆ. ಅರ್ಧಗೋಳದ ವ್ಯಾಸವು 14 cm ಮತ್ತು ಪಾತ್ರೆಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು 13 cm ಇದೆ. ಈ ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲೆ ಅದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಶಂಕುವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಒಂದು ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಅವೇರಡರ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 3.5 cm ಆಗಿದೆ. ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು 15.5 cm ಆದರೆ ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಪ್ರತಿ ಅಂಚು 7 cm ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲ್ಮುಖದ ಮೇಲೆ ಅರ್ಧಗೋಳವು ಇರಿಸಿದೆ. ಅರ್ಧಗೋಳದ ಗರಿಷ್ಠ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ? ಈ ಪೂರ್ಣ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮರದ ವಸ್ತುವಿನ ಒಂದು ಮುಖದ ಒಳಭಾಗವು ತಗ್ಗಾಗುವಂತೆ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಕೊರೆಯಲಾಗಿದೆ. ವರ್ಗ ಘನದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದವು ಅರ್ಧಗೋಳದ ವ್ಯಾಸ l ಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ನೂತನವಾಗಿ ಉಂಟಾದ ಘನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಔಷಧದ ಕ್ಯಾಪ್ಸುಲ್‌ನ ಆಕಾರವು ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪ್ರತಿ ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಅಂಟಿಸಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.10 ನೋಡಿ). ಕ್ಯಾಪ್ಸುಲ್‌ನ ಸಂಪೂರ್ಣ ಉದ್ದವು 14 mm ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯಾಸವು 5 mm ಇದೆ. ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದವನ್ನು ಶಂಕುವು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆವರಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಡೇರೆಯು ಇದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು 2.1 m ಮತ್ತು 4 m ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇದೆ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ

2.8 m ಆದರೆ, ಡೇರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬಳಸಿದ ತಾಡಪತ್ರಿ (canvas) ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹಾಗೆಯೇ, ತಾಡಪತ್ರಿಯ ದರವು ರೂ 500 ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ಆದರೆ, ತಾಡಪತ್ರಿಯನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಬೇಕಾಗುವ ಹಣವೆಷ್ಟು? (ಡೇರೆಯ ಪಾದವನ್ನು ತಾಡಪತ್ರಿಯಿಂದ ಹಾಸಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).

8. ಒಂದು ಘನ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ 2.4 m ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ 1.4 m ಇದೆ. ಇದರಿಂದ ಒಂದೇ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಹಳ್ಳವನ್ನು ಕೊರೆದು ಟೊಳ್ಳಗಿಸಿದೆ. ನೂತನ ಘನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದ ಬೆಲೆಗೆ cm^2 ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. ಮರದಿಂದ ಮಾಡಿದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎರಡು ವೃತ್ತಕಾರದ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಚಿತ್ರ 15.11 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕೊರೆದು ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ 10 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 cm ಆದರೆ, ವಸ್ತುವಿನ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

(π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

1. 64 cm^3 ಘನಫಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 2 ವರ್ಗ ಘನಗಳ ಮುಖಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿ ಮಾಡಿದೆ. ಈ ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಗಳ ಘನಫಲ = 64ಸೆಂ.ಮೀ^{2}

ಆದ್ದರಿಂದ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ = 4ಸೆಂ.ಮೀ.

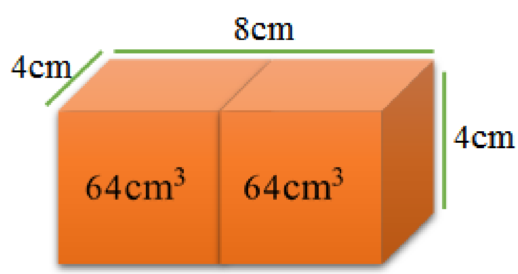
ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯತ ಘನದ ಉದ್ದ l = 4+4 = 8 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಗಲ b = 4ಸೆಂ.ಮೀ.ಮತ್ತು ಎತ್ತರ h = 4ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆಯತ ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 2(lb+bh+hl)

= 2(8x4+4x4+4x8)

= 2(32+16+32)= 2(80) = 160 cm^2



2. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯ ಆಕಾರವು ಟೊಳ್ಳಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಂದು ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಟೊಳ್ಳಾದ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮಾಡಿದೆ. ಅರ್ಧಗೋಳದ ವ್ಯಾಸವು 14 cm ಮತ್ತು ಪಾತ್ರೆಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು 13 cm ಇದೆ. ಈ ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =

ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ+ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಒಳಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

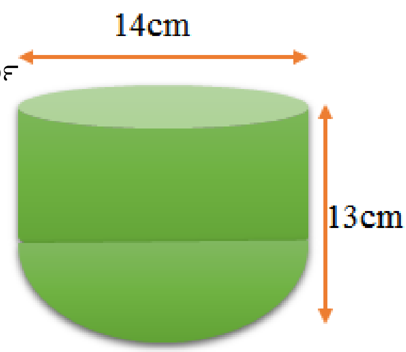
$\pi = \frac{22}{7}$; $r = \frac{14}{2} = 7$cm; ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ h = 13 – 7 = 6cm

$= 2x\ \frac{22}{7} x\ 7x\ 6 + 2x\frac{22}{7}\ x\ 7x\ 7$

= 2x 22x 6 + 2x22 x 7

= 264 + 308

= 572 cm^2



3. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲೆ ಅದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಶಂಕುವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಒಂದು ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಅವೇರಡರ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 3.5 cm ಆಗಿದೆ. ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು 15.5 cm ಆದರೆ ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= $\pi rl + 2\pi r^2$

$\pi = \frac{22}{7}$; r = 3.5 ; h = 15.5 – 3.5 = 12cm

$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 3.5^2} = \sqrt{144 + 12.25}$

$l = \sqrt{156.25} = 12.5$cm

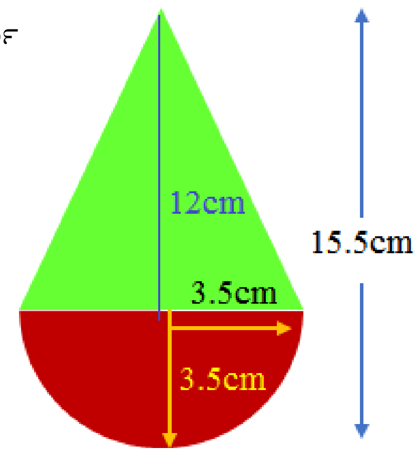
ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{22}{7}$ x 3.5 x 12.5 + 2x $\frac{22}{7}$x3.5^2

= 22 x 0.5 x 12.5 + 2x 22x0.5x3.5

= 11 x 12.5 + 11x7

= 11 x 19.5

=214.5cm^2



4. ಪ್ರತಿ ಅಂಚು 7 cm ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲ್ಮುಖದ ಮೇಲೆ ಅರ್ಧಗೋಳವು ಇರಿಸಿದೆ. ಅರ್ಧಗೋಳದ ಗರಿಷ್ಠ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ? ಈ ಪೂರ್ಣ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅರ್ಧಗೋಳದ ಗರಿಷ್ಠ ವ್ಯಾಸ = ವರ್ಗಾಕೃತಿಯ ಬಾಹು = 7ಸೆಂ.ಮೀ.

ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ವರ್ಗಘನದ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

– ಅರ್ಧಗೋಳದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= $6a^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2$

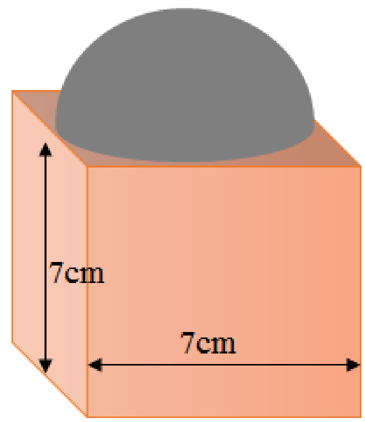
= $6\text{x}7^2 + 2 \text{ x } \frac{22}{7} \text{x} \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{22}{7} \text{ x } \left(\frac{7}{2}\right)^2$

= 6x49 + 11x7 - 11 x $\frac{7}{2}$

= 294 + 77 - 11 x $\frac{7}{2}$

= 371 – 38.5

= 332.5cm^2



5. ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮರದ ವಸ್ತುವಿನ ಒಂದು ಮುಖದ ಒಳಭಾಗವು ತಗ್ಗಾಗುವಂತೆ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಕೊರೆಯಲಾಗಿದೆ. ವರ್ಗ ಘನದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದವು ಅರ್ಧಗೋಳದ ವ್ಯಾಸ l ಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ನೂತನವಾಗಿ ಉಂಟಾದ ಘನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ವರ್ಗಾಘನದ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ

– ಅರ್ಧಗೋಳದ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

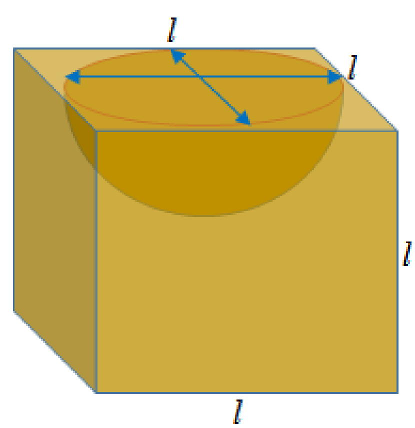
= $6l^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2$

= $6l^2 + 2\pi \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{l}{2}\right)^2$

= $6l^2 + 2\pi \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{l}{2}\right)^2$

= $6l^2 + \pi \left(\frac{l}{2}\right)^2$

= $\frac{l^2}{4}(24 + \pi)$



6. ಒಂದು ಔಷಧದ ಕ್ಯಾಪ್ಸುಲ್‌ನ ಆಕಾರವು ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪ್ರತಿ ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಅಂಟಿಸಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.10 ನೋಡಿ). ಕ್ಯಾಪ್ಸುಲ್‌ನ ಸಂಪೂರ್ಣ ಉದ್ದವು 14 mm ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯಾಸವು 5 mm ಇದೆ. ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕ್ಯಾಪ್ಸೂಲ್‌ನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =

2ಅರ್ಧಗೋಳಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಸಿಲಂಡರಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$2(2\pi r^2) + 2\pi rh$

$\pi = \frac{22}{7}$; $r = 2.5mm$; h = 9mm

$= 2(2\pi r^2) + 2\pi rh$

$= 2\pi r(2r + h)$

$= 2x\frac{22}{7} x \frac{5}{2}(2x2.5 + 9)$

$= \frac{110}{7}(14) = 110 x 2$

$=220mm^2$

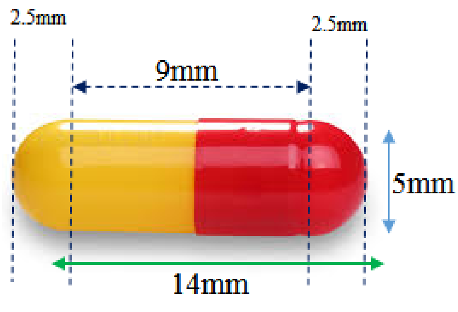


Fig 15.8

7. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದವನ್ನು ಶಂಕುವು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆವರಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಡೇರೆಯು ಇದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು **2.1 m** ಮತ್ತು **4 m** ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇದೆ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ **2.8 m** ಆದರೆ, ಡೇರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬಳಸಿದ ತಾಡಪತ್ರಿ **(canvas)** ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹಾಗೆಯೇ, ತಾಡಪತ್ರಿಯ ದರವು ರೂ **500** ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ಆದರೆ, ತಾಡಪತ್ರಿಯನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಬೇಕಾಗುವ ಹಣವೆಷ್ಟು? (ಡೇರೆಯ ಪಾದವನ್ನು ತಾಡಪತ್ರಿಯಿಂದ ಹಾಸಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).

ತಾಡಪತ್ರಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi rh + \pi rl$

$= \pi r(2h + l)$

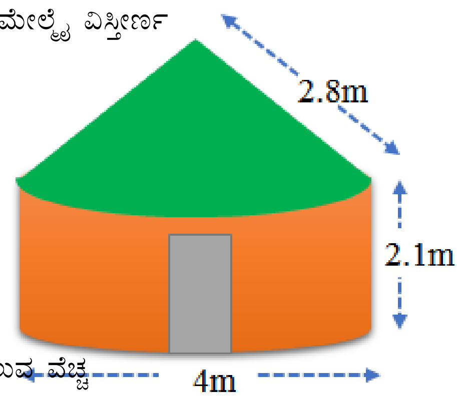
$\pi = \frac{22}{7}$; $r = 2m$; h = 2.1m ; l = 2.8m

$= \frac{22}{7} x 2(2x2.1 + 2.8)$

$= \frac{44}{7} x 7 (2x0.3 + 0.4)$

$= 44 (0.6 + 0.4)$

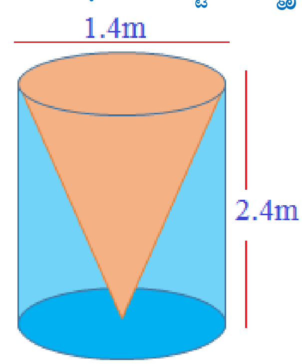
$= 44m^2$



ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ರೂ 500 ರಂತೆ 44 ಚದರ ಮೀಟರಿಗೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ

= 44x500 = 22000ರೂಗಳು.

8. ಒಂದು ಘನ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ **2.4 m** ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ **1.4 m** ಇದೆ. ಇದರಿಂದ ಒಂದೇ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಹಳ್ಳವನ್ನು ಕೊರೆದು ಟೊಳ್ಳಗಿಸಿದೆ. ನೂತನ ಘನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದ ಬೆಲೆಗೆ cm^2 ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪೂರ್ಣಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಶಂಕುವಿನ ಒಳಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ

– ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi r(r + h) + \pi rl - \pi r^2$

$\pi = \frac{22}{7}$; $r = 0.7m$; h = 2.4m

$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{2.4^2 + 0.7^2} = \sqrt{5.76 + 0.49} = \sqrt{6.25} = 2.5m$

$= 2x\frac{22}{7}x0.7(0.7 + 2.4) + \frac{22}{7}x 0.7x2.5 - \frac{22}{7}x0.7x0.7$

$= 2x22x0.1(3.1) + 22x 0.1x2.5 - 22x0.1x0.7$

= $4.4(3.1) + 2.2x2.5 - 2.2x0.7$
= $13.64 + 5.5 - 1.54$
= $13.64 + 5.5 - 1.54$
= $17.6m^2 \approx 18m^2$

9. ಮರದಿಂದ ಮಾಡಿದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎರಡು ವೃತ್ತಕಾರದ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಚಿತ್ರ 15.11 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕೊರೆದು ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ 10 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 cm ಆದರೆ, ವಸ್ತುವಿನ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಸ್ತುವಿನ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸಿಲಿಂಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + 2ಅರ್ಧಗೋಳಗಳ ಒಳ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= $2\pi rh + 2x2\pi r^2$

$\pi = \frac{22}{7}$; r = 3.5cm ; h = 10m

= $2\pi r(h + 2r)$

= $2x \frac{22}{7} x\, 3.5\, (10 + 2x3.5)$

= $2x\, 22\, x\, 0.5\, (10 + 7)$

= $22\, (17)$

= $22\, (17)$

= $374cm^2$

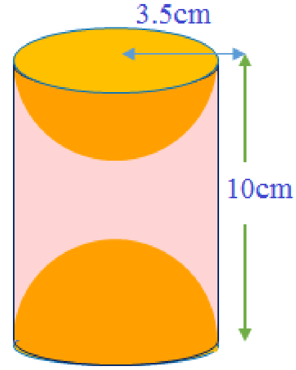


Fig 15.10

15.3 ಜೋಡಿಸಿದ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲ

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಶಾಂತ ಅವರು ಜೋಪಡಿ (shed)ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೈಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ನಡೆಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಜೋಪಡಿಯ ಆಕಾರವು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಯು ಅರ್ಧ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಿಂದ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆವರಿಸಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.12 ನೋಡಿ). ಜೋಪಾಡಿಯ ಪಾದದ ಅಳತೆಯು 7 m × 15 m ಮತ್ತು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ 8 m ಆದರೆ ಜೋಪಾಡಿಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮುಂದುವರೆದು, ಜೋಪಾಡಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ಯಂತ್ರಗಳ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲವು 300 m^3 ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿನ 20 ಕೆಲಸಗಾರರು, ಪ್ರತಿ ಕೆಲಸಗಾರರು ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ 0.08 m^3 ಅವಕಾಶವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, ನಂತರ ಜೋಪಡಿಯಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ ಗಾಳಿ ಎಷ್ಟು? ($\pi = \frac{22}{7}$ =ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಪರಿಹಾರ: ಜೋಪಡಿನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲವು (ಜೋಪಡಿಯಲ್ಲಿನ ಯಂತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಕೆಲಸಗಾರರು ಇರದೇ ಇದ್ದಾಗ) ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ ಮತ್ತು ಅರ್ಧ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಳಭಾಗದ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 15 m, 7 m ಮತ್ತು 8 m ಆಗಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಅರ್ಧ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವ್ಯಾಸವು 7 m ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರ 15 m ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

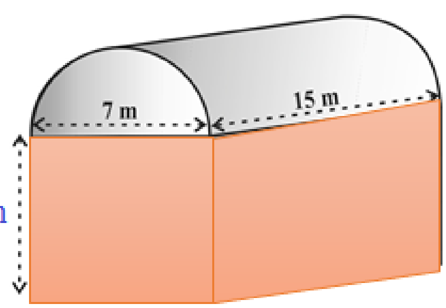


Fig 15.11

ಆಪೇಕ್ಷಿತ ಘನಫಲ = ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ+ $\frac{1}{2}$ x ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ

= $\left[15\, x\, 7\, x\, 8\, + \frac{1}{2}\, x\, \frac{22}{7}\, x\, \frac{7}{2}\, x\, \frac{7}{2}\, x\, 15\right] m^3$ = = $1128.75\ m^3$

ನಂತರ, ಯಂತ್ರಗಳಿಂದ ಆವರಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲ = 300 m^3

ಕೆಲಸಗಾರರಿಂದ ಆವರಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಅವಕಾಶ = $20 \times 0.08\ m^3 = 1.6 m^3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಯಂತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಕೆಲಸಗಾರರು ಇದ್ದಾಗ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲ

= 1128.86 – (300.00 + 1.60)

= 827.15 m^3

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಚಿತ್ರ 15.13 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಹಣ್ಣಿನ ರಸದ ವ್ಯಾಪಾರಿಯುಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ ಗಾಜಿನ ಲೋಟದಲ್ಲಿ ಹಣ್ಣಿನ ರಸವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಒಳ ವ್ಯಾಸವು 5 cm ಇದೆ. ಆದರೆ ಲೋಟದ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿಅರ್ಧಗೋಳದಷ್ಟು ಎತ್ತರಿಸಿದ ಭಾಗವು ಇದ್ದು, ಇದು ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಎತ್ತರವು 10 cm ಆದರೆ ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಾಣುವ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಮತ್ತು ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ :

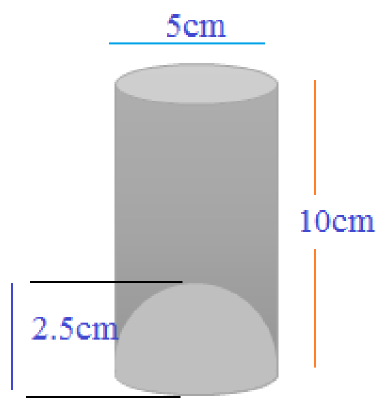


Fig 15.13

ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಒಳ ವ್ಯಾಸ = 5 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ = 10 cm

ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಾಣುವ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ = $\pi r^2 h$

$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10\ cm^3$

$= 196.25\ cm^3$

ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವು ಲೋಟದ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲದಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, ಕಡಿಮೆಯಾಗುವ ಗಾತ್ರ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5$

$= 32.71\ cm^3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ = ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಾಣುವ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ – ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ

= (196.25 – 32.71) cm^3

ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಇರಿಸಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 2 cm ಮತ್ತು ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 4 cm ಇದೆ. ಆಟಿಕೆಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಆವೃತಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಘನಫಲದ ನಡುವಿನವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಪರಿಹಾರ :

ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ = $\pi r^2 h$

ದತ್ತಾಂಶಗಳು: ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ h = ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ + ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ = 2+2 = 4ಸೆಂ.ಮೀ.

$\pi = 3.14$; ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ = ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ = ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ = 2ಸೆಂ.ಮೀ.

$= 3.14 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 4 = 3.14 \text{ x } 16 = 50.24 cm^3$

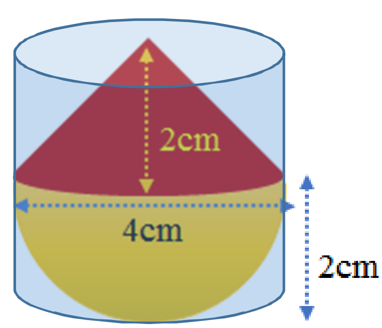


Fig 15.14

ಆಟಿಕೆಯ ಘನಫಲ = $\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi r^2[2r + h]$

$= \frac{1}{3} \text{x } 3.14 \text{x } 2^2[4 + 2]$

$= \frac{1}{3} \text{x } 3.14 \text{x } 4[6]$

$= \frac{1}{3} \text{x } 3.14 \text{x } 4[6]$

$= 25.12 cm^3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾದ ಘನಫಲದಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

$= 50.24 - 25.12\ cm^3$

$= 25.12 cm^3$

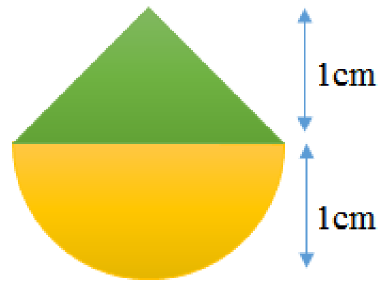
ಅಭ್ಯಾಸ 15.2

(π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

1. ಒಂದು ಘನದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆವರಿಸುವಂತೆ ಶಂಕುವು ನಿಂತಿದೆ. ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 1 cm ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಈ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು π ಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ.
2. ರೇಚಲ್ ಒಬ್ಬ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿ. ಅವರು ತೆಳುವಾದ ಅಲ್ಯುಮಿನಿಯಂ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎರಡು ವೃತ್ತ ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಶಂಕುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಮಾದರಿಯನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಮಾದರಿಯ ವ್ಯಾಸವು 3 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಒಟ್ಟಾರೆ ಉದ್ದವು 12 cm ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವು 2 cm ಆದರೆ ರೆಚೇಲ್ ಮಾಡಿದ ಈ ಮಾದರಿಯೊಳಗಿನ ಗಾಳಿಯಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಮಾದರಿಯ ಹೊರ ಹಾಗೂ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ಅಳತೆಗಳು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ)
3. ಒಂದು ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮೂನ್‌ನಲ್ಲಿ ಅದರ ಘನಫಲದ ಶೇ 30 ರಷ್ಟು ಸಕ್ಕರೆಯ ಪಾಕವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮುನು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದ್ದು, ಅದರ ಎರಡು ಅಂತ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳಗಳಿವೆ. ಗುಲಾಬ್ ಜಾಮುನಿನ ಒಟ್ಟಾರೆ ಉದ್ದ 5cm ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು 2.8cm ಆದರೆ, 45 ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮುನ್‌ನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಕ್ಕರೆ ಪಾಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 15.15 ನೋಡಿ).
4. ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದ ಮರದ ಲೇಖನಿಧಾರಕ (Pen stand)ದಲ್ಲಿ ಲೇಖನಿಗಳನ್ನು ಇಡಲು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ನಾಲ್ಕು ತಗ್ಗುಗಳನ್ನು ಕೊರೆದಿದೆ. ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಅಳತೆಯು 15cm × 10 cm × 3.5 cm ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಹಳ್ಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 0.5cm ಮತ್ತು ಆಳವು 1.4cm ಇದೆ. ಲೇಖನಿಧಾರಕದಲ್ಲಿನ ಮರದ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 15.16 ನೋಡಿ).
5. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯು ತಲೆಕೆಳಗಾದ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಎತ್ತರ 8 cm ಮತ್ತು ತೆರೆದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 5cm ಇದೆ. ಅದರ ಅಂಚಿನವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ 0.5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಸೀಸದ ಗೋಳಗಳನ್ನು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದಾಗ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಒಂದು ಭಾಗದಷ್ಟು ನೀರು ಹೊರ ಚಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದ ಸೀಸದ ಗೋಳಗಳೆಷ್ಟು?
6. ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣದ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವು 220cm ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 24cm ಆಗಿರುವ ಘನ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಇದರ ಮೇಲೆ 60cm ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 8cm ಇರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. $1cm^3$ ಕಬ್ಬಿಣದ ಸರಿಸುಮಾರು ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು 8g ಆದರೆ ಕಂಬದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)
7. 60cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ 120 cm ಎತ್ತರ ಮತ್ತು 60cm ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಶಂಕುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೀರಿನಿಂದ ತುಂಬಿದ ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿ ತಳವನ್ನು ಮುಟ್ಟುವಂತೆ ನೇರವಾಗಿ ಈ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಮುಳುಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವು 60 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 180cm ಆದರೆ ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿದಿರುವ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. 8.5cm ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಗಾಜಿನ ಪಾತ್ರೆಯು 8cm ಉದ್ದ ಮತ್ತು 2cm ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಆಕಾರದ ಕೊರಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಒಂದು ಮಗುವು ಅದರಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ನೀರಿನ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಅದರ ಘನಫಲವು $345\ cm^3$ ಇದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾಳೆ. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳು ಅದರ ಒಳಭಾಗದ ಅಳತೆಗಳು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಅವಳ ಉತ್ತರವು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ

1. ಒಂದು ಘನದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆವರಿಸುವಂತೆ ಶಂಕುವು ನಿಂತಿದೆ. ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 1 cm ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಈ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು π ಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ.



ಘನಫಲ = ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ

ಘನಫಲ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$

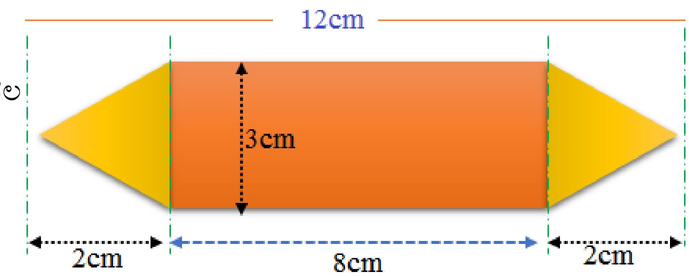
ಇಲ್ಲಿ, $\pi = \frac{22}{7}$; h = 1cm; r = 1cm

ಘನಫಲ = $\frac{1}{3}\pi \times 1 \times 1 + \frac{2}{3}\pi \times 1 \times 1 \times 1$

$= \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi$

$= \frac{3}{3}\pi = \pi\ cm^3$

2. ರೇಚಲ್ ಒಬ್ಬ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿ. ಅವರು ತೆಳುವಾದ ಅಲ್ಯುಮಿನಿಯಂ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎರಡು ವೃತ್ತ ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಶಂಕುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಮಾದರಿಯನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಮಾದರಿಯ ವ್ಯಾಸವು 3 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಒಟ್ಟಾರೆ ಉದ್ದವು 12 cm ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವು 2 cm ಆದರೆ ರೆಚೇಲ್ ಮಾಡಿದ ಈ ಮಾದರಿಯೊಳಗಿನ ಗಾಳಿಯಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಮಾದರಿಯ ಹೊರ ಹಾಗೂ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ಅಳತೆಗಳು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ)



ಯಂತ್ರದೊಳಗಿನ ಗಾಳಿಯ ಗಾತ್ರ

= 2ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ + ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ

$= 2 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2$

ಇಲ್ಲಿ, ಇಲ್ಲಿ, $\pi = \frac{22}{7}$; r = 1.5cm;

$h_1 = 2cm$; $h_2 = 8cm$

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (1.5)^2 \times 2 + \frac{22}{7} \times (1.5)^2 8$

$= \frac{44}{21} \times 2.25 \times 2 + \frac{22}{7} \times 2.25 \times 8$

$= \frac{44}{21} \times 4.5 + \frac{22}{7} \times 18$

$= \frac{198}{21} + \frac{396}{7}$

$= \frac{198}{21} + \frac{1188}{21} = \frac{1386}{21} = 66cm^3$

3. ಒಂದು ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮೂನ್‌ನಲ್ಲಿ ಅದರ ಘನಫಲದ ಶೇ 30 ರಷ್ಟು ಸಕ್ಕರೆಯ ಪಾಕವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮುನು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದ್ದು, ಅದರ ಎರಡು ಅಂತ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳಗಳಿವೆ. ಗುಲಾಬ್ ಜಾಮುನಿನ ಒಟ್ಟಾರೆ ಉದ್ದ 5cm ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು 2.8cm ಆದರೆ, 45 ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮುನ್‌ನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಕ್ಕರೆ ಪಾಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 15.15 ನೋಡಿ).

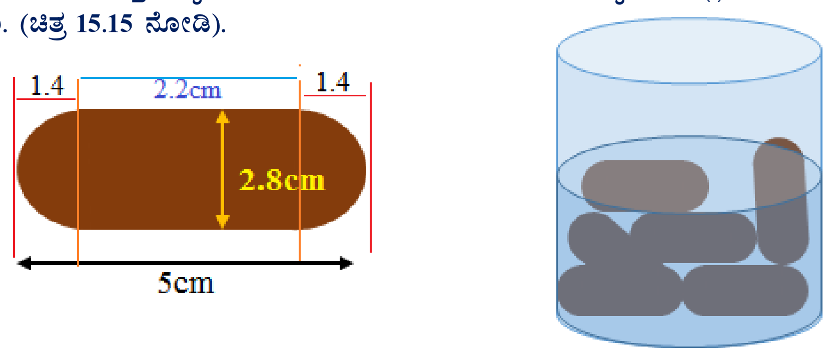


Fig 15.15

ಜಾಮೂನಿನ ಘನಫಲ = 2ಅರ್ಧಗೋಳಗಳ ಘನಫಲ + ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ

$= 2x\frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$

ಇಲ್ಲಿ, ಇಲ್ಲಿ, $\pi = \frac{22}{7}$; r = 1.4cm; h = 2.2cm;

$= 2x\frac{2}{3}x\frac{22}{7}x\ 1.4\ x\ 1.4\ x\ 1.4 + \frac{22}{7}\ x\ 1.4\ x1.4\ x\ 2.2$

$= 4x\frac{22}{3}x\ 0.2\ x\ 1.4x1.4\ +\ 22\ x\ 0.2\ x1.4\ x\ 2.2$

$= \frac{34.496}{3} + 13.552 = 11.5 + 13.552 = 25.05\ cm^3$

ಆದ್ದರಿಂದ ಜಮೂನಿನಲ್ಲಿರು ಸಕ್ಕರೆಯ ಪ್ರಮಾಣ $= 25.05\ x\frac{30}{100} = 6.53cm^3$

ಆದ್ದರಿಂದ 45 ಜಾಮೂನಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಕ್ಕರೆಯ ಪ್ರಮಾಣ = 7.515x 45

$= 338.175cm^3 \approx 338cm^3$

4. ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದ ಮರದ ಲೇಖನಿಧಾರಕ (Pen stand)ದಲ್ಲಿ ಲೇಖನಿಗಳನ್ನು ಇಡಲು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ನಾಲ್ಕು ತಗ್ಗುಗಳನ್ನು ಕೊರೆದಿದೆ. ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಅಳತೆಯು 15cm × 10 cm × 3.5 cm ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಹಳ್ಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 0.5cm ಮತ್ತು ಆಳವು 1.4cm ಇದೆ. ಲೇಖನಿಧಾರಕದಲ್ಲಿನ ಮರದ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 15.16 ನೋಡಿ).

ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ತಗ್ಗುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯ r = 0.5cm, ಆಳ h_1 = 1.4 cm

ಆಯತಾಕಾರದ ಉದ್ದ l = 15cm ಅಗಲ b = 10cm ಎತ್ತರ ħ = 3.5cm

4 (ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ತಗ್ಗಿನ ಘನಫಲ) $= 4\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h_1\right)$

$= 4\left(\frac{1}{3}x\frac{22}{7}x\ 0.5\ x0.5\ x1.4\right)$

$= 4\left(\frac{1}{3}x22x\ 0.5\ x0.5\ x\ 0.2\right)$

$= 4\left(\frac{1}{3}x22x\ 0.5\ x0.5\ x\ 0.2\right)$

$= 1.47cm^3$

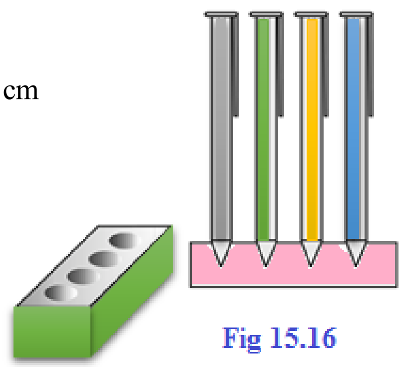


Fig 15.16

ಲೇಖನಿಧಾರಕ ಮರದ ಗಾತ್ರ = ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಗಾತ್ರ – 4 (ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ತಗ್ಗಿನ ಘನಫಲ)

= 15x10x3.5 – 1.47

$= 525 - 1.47 = 523.53cm^3$

5. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯು ತಲೆಕೆಳಗಾದ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಎತ್ತರ 8 cm ಮತ್ತು ತೆರೆದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 5cm ಇದೆ. ಅದರ ಅಂಚಿನವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ 0.5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಸೀಸದ ಗೋಳಗಳನ್ನು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದಾಗ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಒಂದು ಭಾಗದಷ್ಟು ನೀರು ಹೊರ ಚಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದ ಸೀಸದ ಗೋಳಗಳೆಷ್ಟು?

ಸೀಸದ ಗೋಲಿಯ ಗಾತ್ರ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\ x\ \frac{22}{7}\ x\ \frac{1}{2}\ x\ \frac{1}{2}\ x\ \frac{1}{2} = \frac{11}{21}\ cm^3$

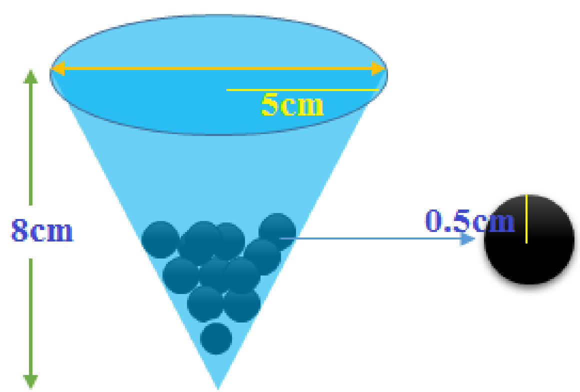
ಶಂಕುವಿನಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಗಾತ್ರ $= \frac{1}{3}\ \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}x\frac{22}{7}x\ 5^2x\ 8 = \frac{4400}{21}\ cm^3$

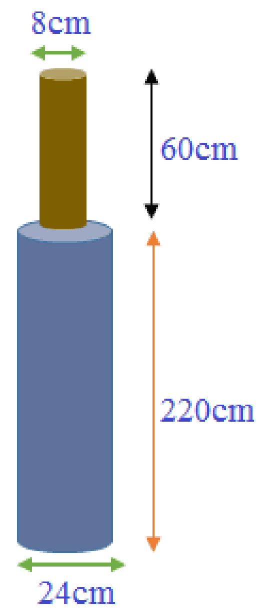
ಹೊರಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣ $= \frac{4400}{21}x\ \frac{1}{4} = \frac{1100}{21}cm^3$

∴ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $\frac{\text{ಹೊರಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣ}}{\text{ಗೋಲಿಯ ಗಾತ್ರ}}$

∴ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $\frac{\frac{1100}{21}}{\frac{11}{21}}$ = 100 ಗೋಲಿಗಳು



6. ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣದ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವು 220cm ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 24cm ಆಗಿರುವ ಘನ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಇದರ ಮೇಲೆ 60cm ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 8cm ಇರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. $1cm^3$ ಕಬ್ಬಿಣದ ಸರಿಸುಮಾರು ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು 8g ಆದರೆ ಕಂಬದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)



$r_1 = 8cm; r_2 = \frac{24}{2} = 12cm; h_1 = 60cm; h_2 = 220cm$

ಕಂಬದ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲ = ದೊಡ್ಡ ಕಂಬದ ಗಾತ್ರ + ಚಿಕ್ಕ ಕಂಬದ ಗಾತ್ರ

$= \pi r_2^2 h_2 + \pi r_1^2 h_1$

= 3.14 x 12 x 12 x 220 + 3.14 x 8 x 8 x 60

= 99475.2 + 12057.6

= $111532.8cm^3$

$1cm^3$ ಕಬ್ಬಿಣದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ = 8g

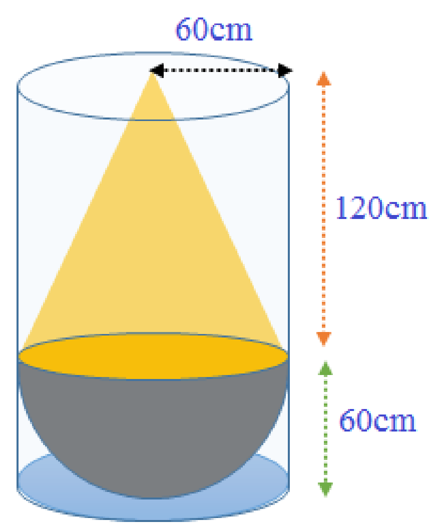
∴ ಕಂಬದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ = 111532.8 x 8 = 892262.4 g

= 892.26kg

7. 60cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ 120 cm ಎತ್ತರ ಮತ್ತು 60cm ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಶಂಕುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೀರಿನಿಂದ ತುಂಬಿದ ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿ ತಳವನ್ನು ಮುಟ್ಟುವಂತೆ ನೇರವಾಗಿ ಈ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಮುಳುಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವು 60 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 180cm ಆದರೆ ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿದಿರುವ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ r = 60cm; ಎತ್ತರ h = 180cm

ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎತ್ತರ $h_1 = 120cm$



ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ = $\pi r^2 h$

= $\frac{22}{7}$x 60 x 60 x 180 = $2036571.43cm^3$

ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h_1$

= $\frac{22}{7}$ x 20 x 60 x 120 = $452571. 43cm^3$

ಅರ್ಧಗೋಲದ ಘನಫಲ = $\frac{2}{3}\pi r^3$

= $\frac{2}{3}$ x $\frac{22}{7}$ x 60 x60 x60 = $4525571.43cm^3$

∴ ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿದಿರುವ ನೀರು

= 2036571.43 – (452571.43 + 452571.43)

= 2036571.43 – 905142.86

= $1131428.57cm^3 = 1.131m^3$

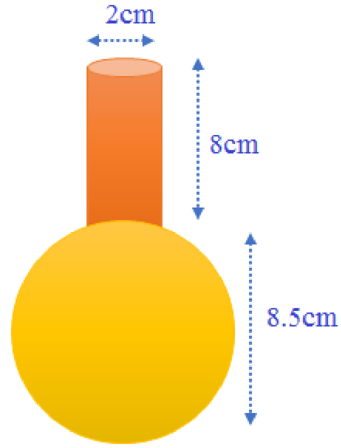
ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ

ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿದಿರುವ ನೀರು = $\left[\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{2}{3}\pi r^3\right] = \pi r^2\left[h - \frac{1}{3}h_1 + \frac{2}{3}r\right]$

= $\frac{22}{7}$x 60x60 $\left[180 - \frac{1}{3}x120 + \frac{2}{3}x60\right]$ = $\frac{22}{7}$x 60x60[180 – (40 + 40)]

= $\frac{22}{7}$x 60x60x 100 = = $1131428.57cm^3 = 1.131m^3$

8. 8.5cm ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಗಾಜಿನ ಪಾತ್ರೆಯು 8cm ಉದ್ದ ಮತ್ತು 2cm ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಆಕಾರದ ಕೊರಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಒಂದು ಮಗುವು ಅದರಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ನೀರಿನ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಅದರ ಘನಫಲವು 345 cm³ ಇದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾಳೆ. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳು ಅದರ ಒಳಭಾಗದ ಅಳತೆಗಳು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಅವಳ ಉತ್ತರವು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)



ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ h = 8cm; ತ್ರಿಜ್ಯ $r_1 = \frac{2}{2} = 1$cm

ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r_2 = \frac{8.5}{2}$ cm

ಪಾತ್ರೆಯ ಘನಫಲ = ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ + ಗೋಳದ ಘನಫಲ

$= \pi {r_1}^2 h + \frac{4}{3}\pi r_2^3$

$= 3.14 x 1^2 x\, 8 + \frac{4}{3} x 3.14 x \left(\frac{8.5}{2}\right)^3$

$= 25.12 + \frac{11}{21} x\, 8.5 x 8.5 x 8.5$

$= 25.12 + 321.39 = 346.51 cm^3$

ಅವಳ ಉತ್ತರವು ಸ್ವಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

15.4 ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಒಂದು ಆಕಾರದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಆಕಾರಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು.

ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಅದರ ಆಕಾರವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಘನಫಲದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬದಲಾವಣೆ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 24 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 6 cm ಇದೆ. ಮಾದರಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದ ಜೇಡಿ ಮಣ್ಣಿನಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದೆ. ಒಂದು ಮಗುವು ಇದನ್ನು ಗೋಲಾಕೃತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ, ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ cm³

ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯವು `r ' ಎಂದಾದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲವು $\frac{4}{3}\pi r^3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಜೇಡಿ ಮಣ್ಣಿನಿಂದ ಮಾಡಿದ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ ಮತ್ತು ಗೋಲದ ಘನಫಲವು ಸಮನಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ cm³

$r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3^3 \times 2^3$

r = 3 x 2 = 6

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 6 cm.

ಉದಾಹರಣೆ 9: ಸೆಲ್ವಿಯ ಮನೆಯ ಮೇಲಿನ ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಸಂಪ್ (ನೆಲದ ಕೆಳಗಿನ ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿ)ನಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಸಂಪ್‌ನ ಅಳತೆಯು 1.57 m × 1.44 m × 95 m ಇದೆ. ಮನೆಯ ಮೇಲಿನ ತೊಟ್ಟಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು 60 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 95 cm ಇದೆ. ಸಂಪ್ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೀರಿನಿಂದ ಭರ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಈಗ ಈ ನೀರನ್ನು ಮನೆಯ ಮೇಲಿನ ತೊಟ್ಟಿಗೆ ಕಳುಹಿಸಿ, ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಭರ್ತಿ ಮಾಡಿದೆ. ಸಂಪ್‌ನಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ತೊಟ್ಟಿಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಮತ್ತು ಸಂಪ್‌ನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಪರಿಹಾರ: ಮನೆ ಮೇಲಿನ ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯ ಘನಫಲವು ಸಂಪ್‌ನಿಂದ ಹೊರತೆಗೆದ ನೀರಿನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಮನೆ ಮೇಲಿನ ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯ ಘನಫಲ (ಸಿಲಿಂಡರ್) = $\pi r^2 h$

$= 3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95\ m^3$

ನೀರು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಿದಾಗ ಸಂಪ್‌ನಲ್ಲಿನ ನೀರಿನ ಘನಫಲ = $l \times b \times h$

$= 1.57 \times 1.44 \times 0.95\ m^3$

ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿ ತುಂಬಿದ ನಂತರ ಸಂಪ್‌ನಲ್ಲಿನ ನೀರಿನ ಘನಫಲ

$= [(1.57 \times 1.44 \times 0.95) - (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)]\ m^3$

$= (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2)\ m^3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಂಪ್‌ನಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ $h = \frac{\text{ಸಂಪ್ ನಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ}}{lxb}$

$= \frac{1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2}{1.57x1.44}\ m \quad = 0.475\ m = 47.5\ cm$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{\text{ತೊಟ್ಟಿಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ}}{\text{ಸಂಪ್ ನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ}} = \frac{3.14\ x\ 0.6\ x\ 0.6\ x\ 0.95}{1.57\ x\ 1.44\ x\ 0.95} = \frac{1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ತೊಟ್ಟಿಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವು ಸಂಪ್‌ನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10: ಒಂದು ತಾಮ್ರದ ಸರಳಿನ ವ್ಯಾಸ 1 cm ಮತ್ತು ಉದ್ದ 8 cm ಇದೆ. ಇದನ್ನು ಒಂದೇ ದಪ್ಪ ಹೊಂದಿರುವ 1 m ಉದ್ದದ ತಂತಿಯಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ತಂತಿಯ ದಪ್ಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಸರಳಿನ ಘನಫಲ = $\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 x\ 8\ cm^3 = = 2\pi\ cm^3$

ಅದೇ ಘನಫಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತಂತಿಯ ಉದ್ದ = 18 m = 1800 cm

ತಂತಿಯ ಅಡ್ಡ ಸೀಳಿಕೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯ `r' ಎಂದಿರಲಿ,

ಅದರ ಘನಫಲ = $\pi r^2 \times 1800\ cm^3$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\pi r^2 \times 1800 = 2\pi$

$r^2 = \frac{1}{900} \Rightarrow r = \frac{1}{30}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ತಂತಿಯ ಅಡ್ಡ ಸೀಳಿಕೆಯ ವ್ಯಾಸ ಅಂದರೆ ತಂತಿಯ ದಪ್ಪವು $\frac{1}{15}$cm

ಅಂದರೆ 0.67 mm (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)

ಉದಾಹರಣೆ 11: ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಿದ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ನೀರನ್ನು ಒಂದು ಕೊಳವೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಪ್ರತಿ ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗೆ $3\frac{4}{7}$ ಲೀಟರ್‌ನಂತೆ ಖಾಲಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ತೊಟ್ಟಿಯ ವ್ಯಾಸ 3 m ಆದರೆ ಅರ್ಧ ತೊಟ್ಟಿಯಷ್ಟು ನೀರನ್ನು ಖಾಲಿ ಮಾಡಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ ಎಷ್ಟು? ($\pi = \frac{22}{7}$ =ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಪರಿಹಾರ: ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದ ತೊಟ್ಟಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ = $\frac{3}{2}$ m

ತೊಟ್ಟಿಯ ಘನಫಲ = $\frac{2}{3}\ x\ \frac{22}{7}\ x\ \frac{3}{2}\ m^3 = \frac{99}{14}\ m^3$

ಹಾಗೆಯೇ ಖಾಲಿ ಮಾಡಬೇಕಾದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ = $\frac{1}{2}\ x\ \frac{99}{14}\ m^3$

$= \frac{99}{28}$ x 1000 ಲೀಟರ್‌ಗಳು = $\frac{99000}{28}$ ಲೀಟರ್‌ಗಳು

ಹಾಗಾಗಿ $\frac{25}{7}$ ಲೀಟರ್ ನೀರು 1 ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಖಾಲಿಯಾದರೆ,

$\frac{99000}{28}$ ಲೀಟರ್ ನೀರು ಖಾಲಿಯಾಗಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ = $\frac{99000}{28}\ x\ \frac{7}{25}$ ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳು

= 16.5 ನಿಮಿಷ.

ಅಭ್ಯಾಸ 15.3

(π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

1. 4.2 cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಲೋಹದ ಗೋಳವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಅದನ್ನು 6 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಮರುರೂಪ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. 6 cm, 8 cm ಮತ್ತು 10 cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಲೋಹದ ಮೂರು ಗೋಳಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಒಂದು ಲೋಟದ ಗೋಳವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಹೀಗೆ ಉಂಟಾದ ನವೀನ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. 20 m ಆಳ ಮತ್ತು 7 m ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಬಾವಿಯನ್ನು ತೋಡಿದೆ ಮತ್ತು ಭೂಮಿಯಿಂದ ತೆಗೆದ ಮಣ್ಣನ್ನು ಸಮವಾಗಿ ಹರಡಿ 22 m × 14 m ವೇದಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ವೇದಿಕೆಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಬಾವಿಯ ವ್ಯಾಸ 3 m ಮತ್ತು ಆಳ 14 m ಇರುವಂತೆ ತೋಡಿದೆ. ಭೂಮಿಯಿಂದ ತೆಗೆದ ಮಣ್ಣನ್ನು ಬಾವಿಯ ಸುತ್ತಲು ಸಮವಾಗಿ ಹರಡಿ 4 m ಅಗಲವಿರುವ ವೃತ್ತಕಾರದ ಕಟ್ಟೆಯನ್ನು ಕಟ್ಟಿದೆ. ಕಟ್ಟೆಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯು ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ವ್ಯಾಸ 12 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 15 cm ಇದ್ದು, ಅದರ ತುಂಬ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್ ಇದೆ. ಈ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮನ್ನು 12 cm ಎತ್ತರ ಮತ್ತು 6 cm ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಶಂಕುವಿನಲ್ಲಿ, ಅದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳವಿರುವಂತೆ ತುಂಬಬೇಕಾಗಿದೆ, ಈ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮನ್ನು ಎಷ್ಟು ಶಂಕುಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು?
6. 1.75 cm ವ್ಯಾಸ ಹಾಗೂ 2 mm ದಪ್ಪ ಇರುವ ಬೆಳ್ಳಿ ನಾಣ್ಯಗಳಿವೆ. ಈ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿ 5.5 cm × 10 cm × 3.5 cm ಅಳತೆಯ ಒಂದು ಆಯತ ಘನವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಬೆಳ್ಳಿಯ ನಾಣ್ಯಗಳು ಬೇಕು?
7. 32 cm ಎತ್ತರ ಮತ್ತು 18 cm ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಬಕೇಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮರಳನ್ನು ತುಂಬಿದೆ. ಬಕೇಟ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಮರಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಸುರಿದಾಗ ಅದು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಮರಳಿನ ರಾಶಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ. ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ರಾಶಿಯ ಎತ್ತರವು 24 cm ಆದರೆ, ಮರಳಿನ ರಾಶಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹಾಗೂ ಓರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. 6 m ಅಗಲ ಮತ್ತು 1.5 m ಆಳ ಇರುವ ಕಾಲುವೆಯಲ್ಲಿ ನೀರು 10 km/h ಜವದಲ್ಲಿ ಹರಿಯುತ್ತಿದೆ. 8 cm ನೀರು ನಿಲ್ಲುವ ಹಾಗೆ, 30 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಹರಿಯುವ ನೀರಿನಿಂದ ಎಷ್ಟು ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನೀರಾವರಿ ಮಾಡಬಹುದು?
9. 20 cm ಒಳ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಕೊಳವೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, ಕಾಲುವೆಯಿಂದ ತನ್ನ ಹೊಲದಲ್ಲಿರುವ 10 m ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು 2 m ಆಳ ಇರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ತೊಟ್ಟಿಗೆ ಒಬ್ಬ ರೈತ ನೀರನ್ನು ಹರಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಕೊಳವೆಯ ಮೂಲಕ ನೀರು 3 km/h ದರದಲ್ಲಿ ಹರಿದರೆ, ತೊಟ್ಟಿ ತುಂಬಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಅವಧಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

(π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

1. 4.2 cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಲೋಹದ ಗೋಳವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಅದನ್ನು 6 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಮರುರೂಪ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r_1 = 4.2$cm, ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ $r_2 = 6$cm

$\frac{4}{3}\pi {r_1}^3 = \pi r_2^2 h$

$= \frac{4}{3} x\ 4.2^3 = 6^2 h$

= 4 x 1.4 x 4.2 x 4.2= 36h

= 4 x 1.4 x 4.2 x 4.2= 36h

98.784 = 36h

⇒h = 2.744cm

2. 6 cm, 8 cm ಮತ್ತು 10 cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಲೋಹದ ಮೂರು ಗೋಳಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಒಂದು ಲೋಹದ ಗೋಳವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಹೀಗೆ ಉಂಟಾದ ನವೀನ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$r_1 = 6\text{cm}, r_2 = 8\text{cm}, r_3 = 10\text{cm}$

ನವೀನ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ = r ಆಗಿರಲಿ.

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \left(\frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi r_2^3 + \frac{4}{3}\pi r_3^3\right)$

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3)$

$r^3 = (6^3 + 8^3 + 10^3)$

$r^3 = (216 + 512 + 1000)$

$r^3 = 1728$

r = 12cm

3. 20 m ಆಳ ಮತ್ತು 7 m ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಬಾವಿಯನ್ನು ತೋಡಿದೆ ಮತ್ತು ಭೂಮಿಯಿಂದ ತೆಗೆದ ಮಣ್ಣನ್ನು ಸಮವಾಗಿ ಹರಡಿ 22 m × 14 m ವೇದಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ವೇದಿಕೆಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬಾವಿಯ ಆಳ h = 20m; ಬಾವಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ $r = \frac{7}{2}$ m

ವೇದಿಕೆಯ ಉದ್ದ l = 22m ಅಗಲ b = 14m ಎತ್ತರ H = ?

ಬಾವಿಯ ಗಾತ್ರ = ವೇದಿಕೆಯ ಗಾತ್ರ

$\pi r^2 h = lbh$

$\frac{22}{7} \text{ x } \frac{7}{2} \text{ x } \frac{7}{2} \text{ x } 20 = 22 \text{ m} \times 14\text{h}$

$\frac{22}{7} \text{ x } \frac{7}{2} \text{ x } \frac{7}{2} \text{ x } 20 = 22 \text{ m} \times 14\text{h}$

14h = 22 x 7 x 5

$h = \frac{770}{308} = 2.5\text{m}$

4. ಒಂದು ಬಾವಿಯ ವ್ಯಾಸ 3 m ಮತ್ತು ಆಳ 14 m ಇರುವಂತೆ ತೋಡಿದೆ. ಭೂಮಿಯಿಂದ ತೆಗೆದ ಮಣ್ಣನ್ನು ಬಾವಿಯ ಸುತ್ತಲು ಸಮವಾಗಿ ಹರಡಿ 4 m ಅಗಲವಿರುವ ವೃತ್ತಕಾರದ ಕಟ್ಟೆಯನ್ನು ಕಟ್ಟಿದೆ. ಕಟ್ಟೆಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬಾವಿಯ ಘನಫಲ = $\pi r^2 h = \frac{22}{7}$ x 1.5 x 1.5 x 14

= 22 x 2.25 x 2 = 44 x 2.25 =99cm^3

ಕಟ್ಟೆಯ ಘನಫಲ = $\frac{22}{7}\left[\frac{11}{2} \text{x} \frac{11}{2} - \frac{3}{2} \text{ x } \frac{3}{2}\right]\text{h}$

$= \frac{22}{7}h\ [30.25 - 2.25]$

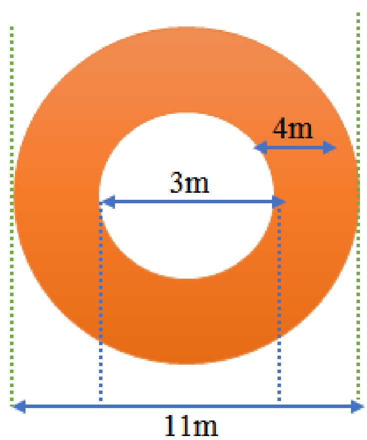
$= \frac{22}{7}\ [28]\text{h} = 88\text{h}$

ಕಟ್ಟೆಯ ಘನಫಲ = ಬಾವಿಯ ಘನಫಲ

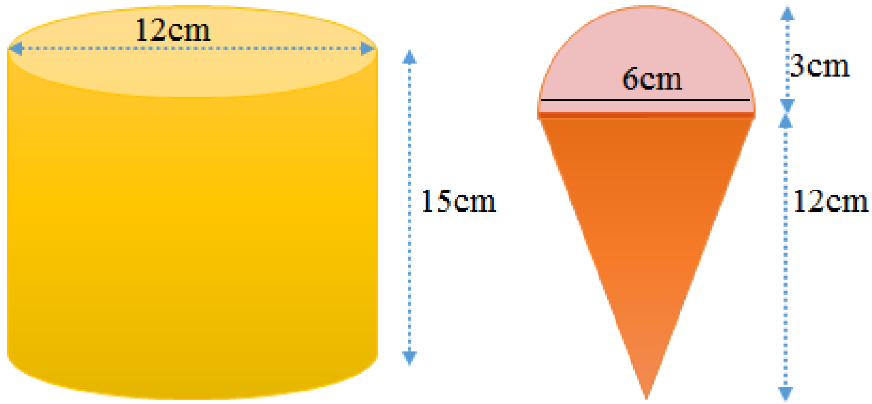
$88\text{h} = 99 \Rightarrow \text{h} = \frac{99}{88} = 1.125$

$\Rightarrow \frac{2662}{7}h = 99$

$\Rightarrow h = \frac{99 \text{x } 7}{2662} =$



5. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯು ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ವ್ಯಾಸ 12 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 15 cm ಇದ್ದು, ಅದರ ತುಂಬ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್ ಇದೆ. ಈ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮನ್ನು 12 cm ಎತ್ತರ ಮತ್ತು 6 cm ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಶಂಕುವಿನಲ್ಲಿ, ಅದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳವಿರುವಂತೆ ತುಂಬಬೇಕಾಗಿದೆ, ಈ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮನ್ನು ಎಷ್ಟು ಶಂಕುಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು?



ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಂ = ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ + ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ

$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{2}{3} x \frac{22}{7} x\, 3^3 + \frac{1}{3} x \frac{22}{7}$ x 3 x 3 x 12

$= 2x \frac{22}{7} x\, 9 + \frac{22}{7}$ x 3 x 12 $= \frac{396}{7} + \frac{792}{7} = \frac{1188}{7} cm^3$

ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿರುವ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಂ = ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ = $\frac{22}{7}$ x 6 x 6 x 15 = $\frac{11880}{7}$ cm^3

ಕೋನ್‌ಗಲ ಸಂಖ್ಯೆ = $\frac{\frac{11880}{7}}{\frac{1188}{7}} = \frac{11880}{1188} = 10$

6. 1.75 cm ವ್ಯಾಸ ಹಾಗೂ 2 mm ದಪ್ಪ ಇರುವ ಬೆಳ್ಳಿ ನಾಣ್ಯಗಳಿವೆ. ಈ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿ 5.5 cm × 10 cm × 3.5 cm ಅಳತೆಯ ಒಂದು ಆಯತ ಘನವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಬೆಳ್ಳಿಯ ನಾಣ್ಯಗಳು ಬೇಕು?

ಬೆಳ್ಳಿ ನಾಣ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $\frac{\text{ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲ}}{\text{ಬೆಳ್ಳಿ ನಾಣ್ಯದ ಘನಫಲ}} = \frac{lbh}{\pi r^2 h}$

ಬೆಳ್ಳಿ ನಾಣ್ಯಗಳ ಘನಫಲ lbh = 5.5 x 10 x 3.5 = $192.5 cm^3$

ಆಯತ ಘನದ ಘನಫಲ $\pi r^2 h = \frac{22}{7}\, x\, \frac{1.75}{2}\, x\, \frac{1.75}{2}\, x\, 0.2 = 0.48125$

ಬೆಳ್ಳಿ ನಾಣ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{192.5}{0.48125} = 400$

7. 32 cm ಎತ್ತರ ಮತ್ತು 18 cm ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಬಕೇಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮರಳನ್ನು ತುಂಬಿದೆ. ಬಕೇಟ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಮರಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಸುರಿದಾಗ ಅದು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಮರಳಿನ ರಾಶಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ. ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ರಾಶಿಯ ಎತ್ತರವು 24 cm ಆದರೆ, ಮರಳಿನ ರಾಶಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹಾಗೂ ಓರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಬಕೇಟ್‌ನ ಎತ್ತರ h = 32cm; ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 18cm

ಶಂಕುವಿನ ಮರಳಿನ ಎತ್ತರ H = 24cm

ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಬಕೇಟಿನ ಘನಫಲ = $\pi r^2 h = \frac{22}{7}$ x 18 x18 x 32 = $\frac{228096}{7}$

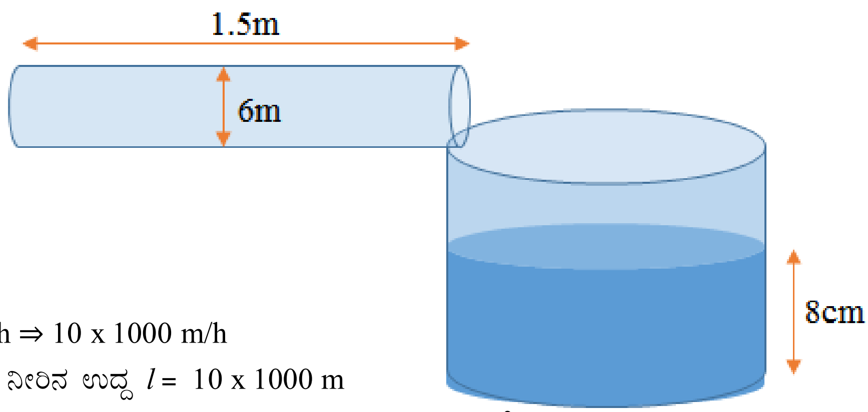
ಶಂಕುವಿನ ಮರಳಿನ ಘನಫಲ $\frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\, x\, \frac{22}{7}\, x\, r^2\, x\, 24 = \frac{528}{21} r^2$

ಶಂಕುವಿನ ಮರಳಿನ ಘನಫಲ = ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಬಕೇಟಿನ ಘನಫಲ

$\frac{528}{21} r^2 = \frac{228096}{7} \Rightarrow r^2 = \frac{228096 x 21}{7 x 528} = 1296$

$l = \sqrt{24^2 + 36^2} = \sqrt{576 + 1296} = \sqrt{1872} = \sqrt{144 x 13} = 12\sqrt{13}$ cm

8. 6 m ಅಗಲ ಮತ್ತು 1.5 m ಆಳ ಇರುವ ಕಾಲುವೆಯಲ್ಲಿ ನೀರು 10 km/h ಜವದಲ್ಲಿ ಹರಿಯುತ್ತಿದೆ. 8 cm ನೀರು ನಿಲ್ಲುವ ಹಾಗೆ, 30 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಹರಿಯುವ ನೀರಿನಿಂದ ಎಷ್ಟು ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನೀರಾವರಿ ಮಾಡಬಹುದು?



ನೀರಿನ ವೇಗ = 10km/h ⇒ 10 x 1000 m/h

ಒಂದು ಗಂಟೆ ಹರಿಯುವ ನೀರಿನ ಉದ್ದ l = 10 x 1000 m

ಆಯತಾಕಾರದ ಕಾಲುವೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಉದ್ದ x ಅಗಲ = 6 x 1.5 = 9m^2

ಒಂದು ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಹರಿದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ = ಕಾಲುವೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ x ಒಂದು ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಹರಿದ ನೀರಿನ ಉದ್ದ

= 9 x 10 x1000 m^3

30 ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಹರಿದ ನೀರಿನ ಗಾತ್ರ = $\frac{9 \text{ x } 10 \text{ x}1000 \text{ m3}}{2}$ = 45000m^3

∴ 8 cm = $\frac{8}{100}$ m ನೀರು ನಿಲ್ಲುವ ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಬೇಕಾಗುವ ಪ್ರದೇಶ

= $\frac{450000}{8}$ x 100 = 562500m^3 = 56.25hec [1hec = 10000m^3]

9. 20 cm ಒಳ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಕೊಳವೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, ಕಾಲುವೆಯಿಂದ ತನ್ನ ಹೊಲದಲ್ಲಿರುವ 10 m ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು 2 m ಆಳ ಇರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ತೊಟ್ಟಿಗೆ ಒಬ್ಬ ರೈತ ನೀರನ್ನು ಹರಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಕೊಳವೆಯ ಮೂಲಕ ನೀರು 3 km/h ದರದಲ್ಲಿ ಹರಿದರೆ, ತೊಟ್ಟಿ ತುಂಬಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಅವಧಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನೀರಿನ ವೇಗ = 10km/h ⇒ 3 x 1000 m/h

ಒಂದು ಗಂಟೆ ಹರಿಯುವ ನೀರಿನ ಉದ್ದ l = 3000 m

ಕೊಳವೆಯ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi r^2 = \pi \text{ x } \left(\frac{20}{2}\right)^2 = 100\,\pi \text{ cm}^2 = \frac{1}{100}\pi \text{ m}^2$

ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನ ಘನಫಲ = $\pi r^2 h = \pi \text{ x } 5 \text{ x } 5 \text{ x } 2 = 50\,\pi \text{ m}^2$

ತೊಟ್ಟಿ ತುಂಬಲು ಬೇಕಾಗುವ ಸಮಯ = $\frac{\text{ಟ್ಯಾಂಕ್ ನ ಘನಫಲ}}{\text{ಕೊಳವೆಯ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ xನೀರಿನ ಉದ್ದ}}$

= $\frac{50\,\pi}{\frac{1}{100}\pi \text{ x}3000}$ = $\frac{50\text{x } 100}{3000}$ = 1.67 ಗಂಟೆಗಳು ಅಥವಾ 1.67x 60 = 100 min

15.5 ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕ

ಚಟುವಟಿಕೆ 1: ಒಂದು ಶಂಕುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ (ಚಿತ್ರ 15.20 ನೋಡಿ) ಮತ್ತು ಸಮತಲದ ಒಂದು ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಶಂಕುವನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿ, ಸಮತಲದ ಮತ್ತೊಂದು ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ ಘನವನ್ನು ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕ (Frustum* of cone) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

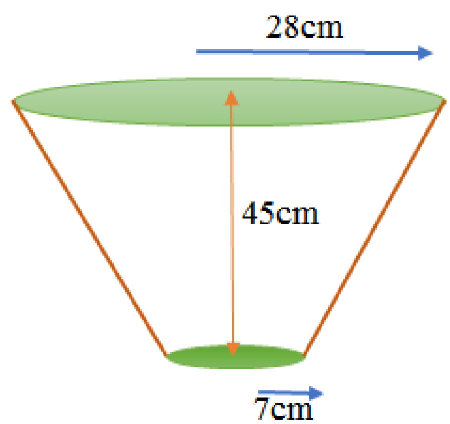
ಉದಾಹರಣೆ 12: 45 cm ಎತ್ತರ ಇರುವ ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾದಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 28 cm ಮತ್ತು 7 cm ಗಳಾಗಿವೆ. (ಚಿತ್ರ 15.21 ನೋಡಿರಿ). ಇದರ ಘನಫಲ, ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ 22 ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ =ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ = $\frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)$

ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi(r_1 + r_2)l$ [$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

ಪರಿಹಾರ:



h = 48cm, r_1 = 28cm, r_2 = 7cm

$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$\Rightarrow l = \sqrt{48^2 + (28 - 7)^2}$

$\Rightarrow l = \sqrt{(3x15)^2 + (3x7)^2}$

$\Rightarrow l = 3\sqrt{225 + 49}$

$\Rightarrow l = 3\sqrt{225 + 49}$ = 49.65cm

i) ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi(r_1 + r_2)l$

= $\frac{22}{7}(28 + 7)49.65$

= 22 x 5 x 49.65

= 5461.5cm^2

ii) ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

= $\frac{22}{7}(28 + 7)49.65$ + $\frac{22}{7}$ x 28 x 28+ $\frac{22}{7}$ x 7 x 7

= 5461.5 + 22 x 4 x 28+ 22 x 7

= 5461.5 + 2464+ 154

= 8079.5cm^2

iii) ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ = $\frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)$

= $\frac{1}{3}$ x $\frac{22}{7}$ x 45 (28x28 + 7x7 + 28x7)

= $\frac{22}{7}$ x 15(784 + 49 + 196)

= $\frac{22}{7}$ x 15(784 + 49 + 196)

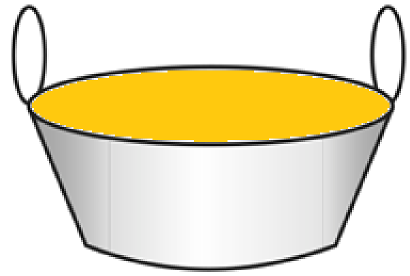
= 48510cm^3

ಉದಾಹರಣೆ 13: ಹನುಮಂತಪ್ಪ ಮತ್ತು ಅವರ ಪತ್ನಿ ಗಂಗಮ್ಮ ಇವರು ಕಬ್ಬಿನ ರಸದಿಂದ ಬೆಲ್ಲವನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅವರು ಕಬ್ಬಿನ ರಸವನ್ನು ಸಂಸ್ಕರಿಸಿ ಕಾಕಂಬಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ, ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಅಚ್ಚಿಗೆ ಸುರಿಯಲಾಗಿದೆ. ಅಚ್ಚಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಎರಡು ಪಾದಗಳ ವ್ಯಾಸವು 30 cm ಮತ್ತು 35 cm ಮತ್ತು ಅದರ ನೇರ ಎತ್ತರವು 14 cm ಇದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.22 ನೋಡಿರಿ). ಕಾಕಂಬಿಯ ಪ್ರತಿ 1 cm^3 ಗಳದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು 1.2 g ಆದರೆ, ಅಚ್ಚಿನ ಪಾತ್ರೆಗೆ ಸುರಿದ ಕಾಕಂಬಿಯ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ =ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಪರಿಹಾರ: ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಅಚ್ಚು ಇರುವುದರಿಂದ ಅದರಲ್ಲಿ ಕಾಕಂಬಿಯನ್ನು ಸುರಿದ

ಪ್ರಮಾಣ (ಘನಫಲ) = $\frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)$ ಇಲ್ಲಿ h = 14cm, $r_1 = \frac{35}{2}$, r_2 = 15

ಪ್ರಮಾಣ (ಘನಫಲ) = $\frac{1}{3}$ x $\frac{22}{7}$ x 14(17.5x17.5 + 15x15 + 17.5x15)



$= \frac{1}{3}$ x 22 x 2(17.5x17.5 + 15x15 + 17.5x15)

$= \frac{1}{3}$ x 22 x 2(306.25 + 225 + 262.5)

$= \frac{1}{3}$ x 22 x 2(793.75)

= 11,641.7cm^3

ಕಾಕಂಬಿಯ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು 1.2 g ಎಂದು ನೀಡಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿ ಹಾಕಬಹುದಾದ ಕಾಕಂಬಿಯ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ = (11641.7×1.2)g

= 13970.04 g = 13.97 kg

= 14 kg (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)

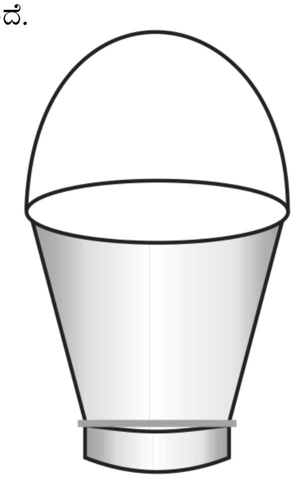
ಉದಾಹರಣೆ 14: ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ತೆರೆದ ಲೋಹದ ಬಕೇಟ್ ಇದೆ. ಇದೇ ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ಟೊಳ್ಳಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಬಕೇಟನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.23 ನೋಡಿರಿ). ಅದರ ಎರಡು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 45 cm ಮತ್ತು 25 cm, ಬಕೇಟ್‌ನ ಒಟ್ಟು ನೇರ ಎತ್ತರವು 40 cm ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಪಾದದ ಎತ್ತರವು 6 cm ಆಗಿದೆ. ಈ ಬಕೇಟ್‌ನ್ನು ಮಾಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಬಕೇಟ್‌ನ ಹಿಡಿಕೆಯನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗೆಯೇ ಬಕೇಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯಬಹುದಾದ ಒಟ್ಟು ನೀರಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಬಳಸಿ).

ಪರಿಹಾರ: ಬಕೇಟ್‌ನ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ = 40 cm, ಇದರಲ್ಲಿ ಪಾದದ ಎತ್ತರವು ಸಹ ಸೇರಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಎತ್ತರ = h = (40 - 6) cm = 34 cm

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಓರೆ ಎತ್ತರ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

ಇಲ್ಲಿ h = 34cm, $r_1 = 22.5cm$, r_2 = 12.5cm



$l = \sqrt{34^2 + (22.5 - 12.5)^2}$

$l = \sqrt{34^2 + (10)^2}$

$l = 35.44cm$

ಬಳಸಿದ ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

+ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= $[\pi \times 35.44\ (22.5 + 12.5) + \pi \times (12.5)2 + 2\ \pi \times 12.5 \times 6]$ cm^2

$= \frac{22}{7}(1240.4 + 156.25 + 150)$ cm^2

= 4860.9 cm^2

ಈಗ ಬಕೇಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯಬಹುದಾದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ (ಇದನ್ನು ಬಕೇಟ್‌ನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ)

$= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$= \frac{1}{3}$x $\frac{22}{7}$ x 34 $(22.5^2 + 12.5^2 + 22.5\text{x}12.5)$

$= \frac{748}{31}$ (506.25 + 156.25 + 281.25)

$= \frac{748}{31}$ (943.75) = 33615.48cm^3

= 33.62 ಲೀಟರ್‌ಗಳು (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)

ಅಭ್ಯಾಸ 15.4

(π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

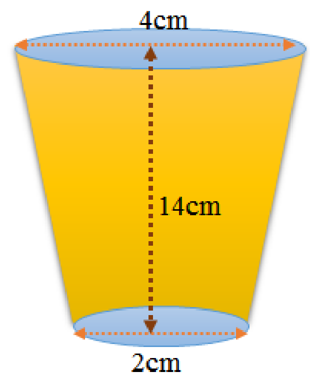
1. 14 cm ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಕುಡಿಯುವ ನೀರಿನ ಗಾಜಿನ ಲೋಟವು ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಎರಡು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳು 4cm ಮತ್ತು 2cm ಗಳಾಗಿವೆ. ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಓರೆ ಎತ್ತರವು 4 cm ಮತ್ತು ಅದರ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ (ಪರಿಧಿ)ಗಳು 18cm ಮತ್ತು 6cm ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನುಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಟರ್ಕಿ ದೇಶದ ಪ್ರಜೆಗಳು ಧರಿಸುವ ಟೋಪಿಗೆ 'ಫೆಜ್' ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದು ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.24 ನೋಡಿರಿ). ಅದರ ತೆರೆದ ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 10cm ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 4cm ಮತ್ತು ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರವು 15cm ಆದರೆ ಅದನ್ನು ತಯಾರಿಸಲುಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಸ್ತುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ತೆರೆದಿರುವ ಮತ್ತು ಒಂದು ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯು ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕರ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಎತ್ತರ 16cm, ಅದರ ಕೆಳಭಾಗದ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 8cm ಮತ್ತು 20cm ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇದೆ. ಈಪಾತ್ರೆಯನ್ನು ಹಾಲಿನಿಂದ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. 1 ಲೀಟರ್ ಹಾಲಿನ ಬೆಲೆಯು ರೂ 20 ರಂತೆ ಹಾಲನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಎಷ್ಟು ಹಣಬೇಕು? ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯ ದರ ರೂ 8 ಪ್ರತಿ 100 cm^2 ಆದರೆ, ಇಡೀ ಪಾತ್ರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಹಣ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ? (π= 3.14 ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)
5. ಒಂದು ಲೋಹದಿಂದ ಮಾಡಿದ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 20 cm ಮತ್ತು ಶೃಂಗ ಕೋನವು 60. ಈ ಶಂಕುವನ್ನು ಅದರ ಎತ್ತರದ ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಪಡೆದ ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕವನ್ನು ತಂತಿಯ ವ್ಯಾಸ $\frac{1}{16}$cm ಇರುವಂತೆ ತಂತಿಯಾಗಿ ಎಳೆದರೆ ತಂತಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

(π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

1. 14 cm ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಕುಡಿಯುವ ನೀರಿನ ಗಾಜಿನ ಲೋಟವು ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಎರಡು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳು 4cm ಮತ್ತು 2cm ಗಳಾಗಿವೆ. ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕುಡಿಯುವ ನೀರಿನ ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಘನಫಲ



$= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)$

$\pi = \frac{22}{7}$; $h = 14cm; r_1 = \frac{4}{2} = 2cm; r_2 \frac{2}{2} = 1cm$

$= \frac{1}{3} x \frac{22}{7} x 14(4 + 1 + 2)$

$= \frac{1}{3} x \frac{22}{7} x 14(7)$

$= \frac{1}{3} x 22 x 14$

$= 102\frac{2}{3} cm^2$

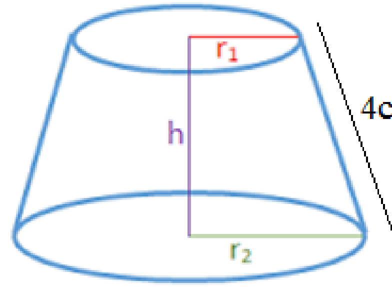
2. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಓರೆ ಎತ್ತರವು 4 cm ಮತ್ತು ಅದರ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ (ಪರಿಧಿ)ಗಳು 18cm ಮತ್ತು 6cm ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನುಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೃತ್ತಾಕರಾದ ಪಾದದ ಪರಿಧಿ = 18ಸೆಂ.ಮೀ.

$\Rightarrow 2\pi r_1 = 18 \Rightarrow r_1 = \frac{9}{\pi}$ cm

ಮೇಲ್ಭಾಗದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪರಿಧಿ = 6ಸೆಂ.ಮೀ

$\Rightarrow 2\pi r_2 = 6 \Rightarrow r_2 = \frac{3}{\pi}$ cm



ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi(r_1 + r_2)l$

$= \pi(r_1 + r_2)l$

$= \pi\left(\frac{9}{\pi} + \frac{3}{\pi}\right)4 = \pi\left(\frac{9+3}{\pi}\right)4 = 48\text{cm}^3$

3. ಟರ್ಕಿ ದೇಶದ ಪ್ರಜೆಗಳು ಧರಿಸುವ ಟೋಪಿಗೆ 'ಫೆಜ್' ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದು ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 15.24 ನೋಡಿರಿ). ಅದರ ತೆರೆದ ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 10cm ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 4cm ಮತ್ತು ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರವು 15cm ಆದರೆ ಅದನ್ನು ತಯಾರಿಸಲುಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಸ್ತುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಫೆಜ್ ನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಮೇಲ್ಭಾಗದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_2^2$

$r_1 = 10\text{cm}; r_2 = 4\text{cm}; l = 15\text{cm}$

$= \frac{22}{7}(10 + 4)15 + \frac{22}{7} \times 4^2$

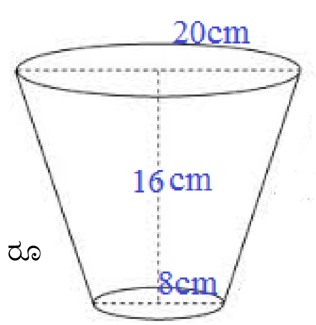
$= \frac{22}{7}(14)15 + \frac{22}{7} \times 16$

$= \frac{4620}{7} + \frac{352}{7}$

$= \frac{4972}{7} = 710\frac{2}{7}\text{cm}^3$

4. ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ತೆರೆದಿರುವ ಮತ್ತು ಒಂದು ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯು ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕರ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಎತ್ತರ 16cm, ಅದರ ಕೆಳಭಾಗದ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 8cm ಮತ್ತು 20cm ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇದೆ. ಈಪಾತ್ರೆಯನ್ನು ಹಾಲಿನಿಂದ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. 1 ಲೀಟರ್ ಹಾಲಿನ ಬೆಲೆಯು ರೂ 20 ರಂತೆ ಹಾಲನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಎಷ್ಟು ಹಣಬೇಕು? ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯ ದರ ರೂ 8 ಪ್ರತಿ 100 cm^2 ಆದರೆ, ಇಡೀ ಪಾತ್ರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಹಣ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ? (π= 3.14 ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

ಭಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$



$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 16(8 \times 8 + 20 \times 20 + 8 \times 20)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 16(64 + 400 + 160)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 16(624)$

$= 10449.9\text{cm}^2 \Rightarrow 10.45$ ltr

ಲೀಟರಿಗೆ ರೂ 20 ರಂತೆ ಹಾಲು ಕೊಳ್ಳಲು ಬೇಕಾದ ಹಣ = 10.45 x 20 = 209 ರೂ

$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$l = \sqrt{16^2 + (8-20)^2} = l = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20\text{cm}$

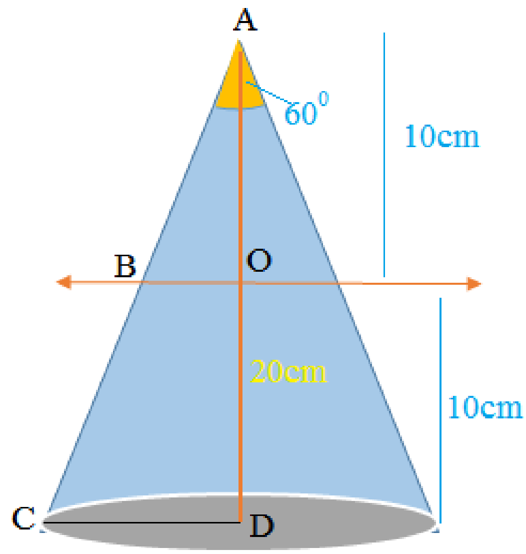
ಭಿನ್ನಕದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಮುಚ್ಚಿದ ಮುಖದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2$
$= 3.14(8 + 20)20 + 3.14 \times 8^2$
$= 3.14(28)20 + 3.14 \times 64$
$= 3.14(28)20 + 3.14 \times 64$
$= 1758.4 + 200.96 = 1,959.36 cm^2$
ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯ ದರ ಪ್ರತಿ $100 cm^2 = 8$ರೂ
ಆದ್ದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಹಾಳೆಗೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ $= \frac{1,959.36}{100} \times 8 =$ ರೂ156.75

5. ಒಂದು ಲೋಹದಿಂದ ಮಾಡಿದ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 20 cm ಮತ್ತು ಶೃಂಗ ಕೋನವು 60. ಈ ಶಂಕುವನ್ನು ಅದರ ಎತ್ತರದ ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಪಡೆದ ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕವನ್ನು ತಂತಿಯ ವ್ಯಾಸ $\frac{1}{16}$cm ಇರುವಂತೆ ತಂತಿಯಾಗಿ ಎಳೆದರೆ ತಂತಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\text{Cot } 30^0 = \frac{AO}{BO}$
$\sqrt{3} = \frac{10}{BO} \Rightarrow BO = \frac{10}{\sqrt{3}} cm = r_1$
$\text{Cot } 30^0 = \frac{AD}{CD}$
$\sqrt{3} = \frac{20}{CD} \Rightarrow CD = \frac{20}{\sqrt{3}} cm = r_2$
ಭಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$
$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 10 \left[\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{10}{\sqrt{3}} \times \frac{20}{\sqrt{3}}\right]$
$= \frac{\pi}{3} \times 10 \left[\frac{100}{3} + \frac{400}{3} + \frac{200}{3}\right]$
$= \frac{\pi}{3} \times 10 \left[\frac{700}{3}\right]$
$= \frac{7000\pi}{9}$
ತಂತಿಯ ಘನಫಲ = ಭಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ
$\pi r^2 h = \frac{7000\pi}{9} \Rightarrow \pi\left(\frac{1}{32}\right)^2 h = \frac{7000\pi}{9}$
$\Rightarrow \frac{1}{1024} h = \frac{7000}{9} \Rightarrow h = \frac{7000 \times 1024}{9}$
$\Rightarrow h = 796444.44 cm = 7964.44 m$



ಸಾರಾಂಶ

1. ಆಯತ ಘನ, ಶಂಕು, ಸಿಲಿಂಡರ್, ಗೋಳ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳ ಈ ಎರಡು ಮೂಲ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ರೂಪಗೊಂಡ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದು.
2. ಆಯತ ಘನ, ಶಂಕು, ಸಿಲಿಂಡರ್, ಗೋಳ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳ ಈ ಎರಡು ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ರೂಪಗೊಂಡ ವಸ್ತುಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
3. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮತಲದಿಂದ ಛೇದಿಸಿ ಉಂಟಾದ ಚಿಕ್ಕ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರವನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ ಉಳಿದ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$
ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi(r_1 + r_2)l$ [$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$
ಶಂಕುವಿನ ಭಿನ್ನಕದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi$