ಗಣಿತ

10ನೇ ತರಗತಿ

ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮ

ಪರಿವಿಡಿ

3 ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು : $\mathbf{ax + b = 0}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ($\mathbf{a \neq 0}$ ಮತ್ತು $\mathbf{b}$ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ. $\mathbf{x}$ – ಚರಾಕ್ಷರ) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾ : $\mathbf{2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{2}}$

$\mathbf{x}$ ಮತ್ತು $\mathbf{y}$ ಎಂಬ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು.

$a_1x + b_1x + c_1 = 0$ ಮತ್ತು $a_2x + b_2x + c_2 = 0$

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಅಖಿಲಾ ರೂ 20ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಜಾತ್ರೆಗೆ ಹೋಗುತ್ತಾಳೆ. ಅಲ್ಲಿ ಅವಳು ದೈತ್ಯಚಕ್ರದಲ್ಲಿ ಸವಾರಿ ಮಾಡಲು ಮತ್ತು ಹೂಪ್ಲಾ ಆಟವಾಡಲು ಬಯಸುತ್ತಾಳೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ನಕ್ಷಾರೂಪದಲ್ಲಿ (ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ) ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ರಚಿತವಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು.

$y = \frac{1}{2}x \Rightarrow 2y = x$

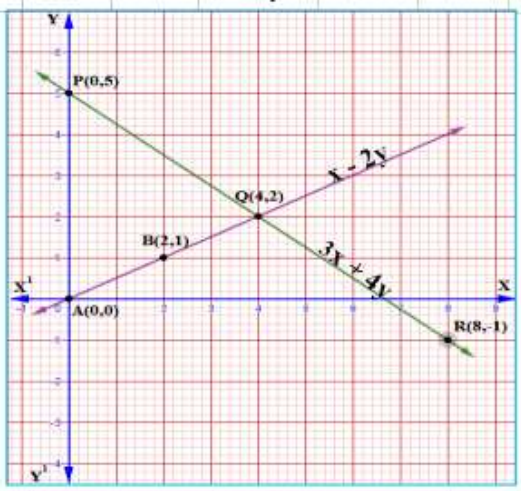
$\Rightarrow x - 2y = 0 \qquad (1)$

$3x + 4y = 20 \qquad (2)$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಕ್ಷಾರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಕನಿಷ್ಠ 2 ಪರಿಹಾರಗಳು ಬೇಕು.

x	0	2
$y = \frac{x}{2}$	2	1

x	0	4	8
$y = \frac{20-3x}{4}$	5	2	-1



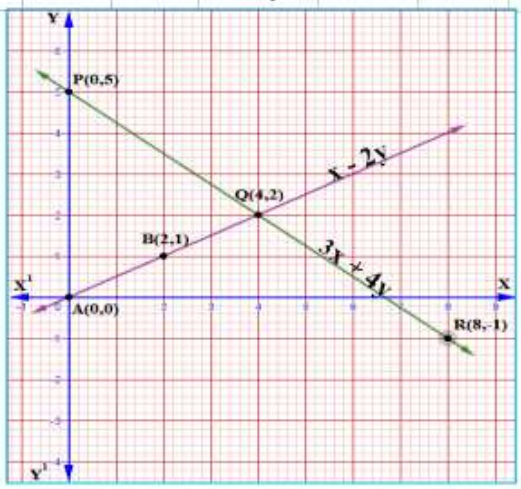
ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ನಿಖರವಾದ ಅನನ್ಯವಾದ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಿದೆ. ಈ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(4,2)$

$\therefore x = 4, \quad y = 2$ ದೈತ್ಯಚಕ್ರ ಸವಾರಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4. ಹೂಪ್ಲಾ ಆಟಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ =2

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಕ್ಷಾರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಕನಿಷ್ಠ 2 ಪರಿಹಾರಗಳು ಬೇಕು.

x	0	2
$y=\frac{x}{2}$	2	1

x	0	4	8
$y=\frac{20-3x}{4}$	5	2	-1



ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ನಿಖರವಾದ ಅನನ್ಯವಾದ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಿದೆ. ಈ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(4,2)$

$\therefore x = 4, \quad y = 2$ ದೈತ್ಯಚಕ್ರ ಸವಾರಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4, ಹೂಪ್ಸಾ ಆಟಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ =2

ಉದಾಹರಣೆ 2: ರೋಮೀಲಾ ಒಂದು ಲೇಖನ ಸಾಮಾಗ್ರಿಗಳ ಅಂಗಡಿಗೆ ಹೋಗಿ ರೂ 9ಕ್ಕೆ 2 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 3 ರಬ್ಬರ್‌ಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಳು. ಅವಳ ಗೆಳತಿ ಸೋಣಾಲಿಯು ರೋಮೀಲಾಳ ಬಳಿ ಇರುವ ಹೊಸ ಬಗೆಯ ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು ರಬ್ಬರ್‌ಗಳನ್ನು ನೋಡಿ ಅಂತಹುದೇ 4 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 6 ರಬ್ಬರ್‌ಗಳನ್ನು ರೂ 18 ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಿದಳು. ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ನಕ್ಷಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ರೂ x ನಿಂದಲೂ ಒಂದು ರಬ್ಬರ್‌ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ರೂ y ಯಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಆಗ, ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಕ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

$2x + 3y = 9$ ----------(1)

$4x + 6y = 18$ ----------(2)

$(1) \Rightarrow 3y = 9 - 2x$

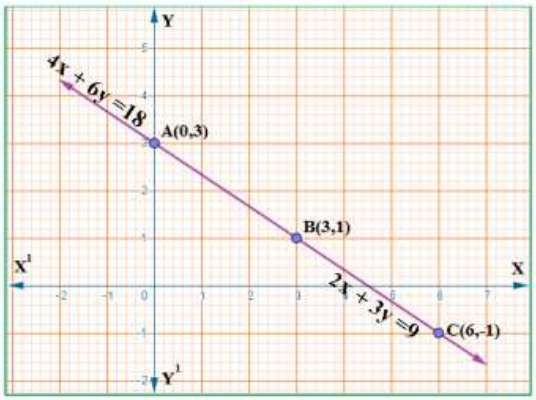
$y = \frac{9-2x}{3}$

$(2) \Rightarrow 6y = 18 - 4x$

$y = \frac{18-4x}{6}$

x	0	3	6
$y=\frac{9-2x}{3}$	3	1	-1

x	0	3	6
$y=\frac{18-4x}{6}$	3	1	-1



ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಎರಡು ಹಳ್ಳಿಗಳನ್ನು $x + 2y - 4 = 0$ ಮತ್ತು $2x + 4y - 12 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $x + 2y = 4$

$2x + 4y = 12$

$x + 2y = 4$

$\Rightarrow 2y = 4 - x$

$\Rightarrow y = \frac{4-x}{2}$

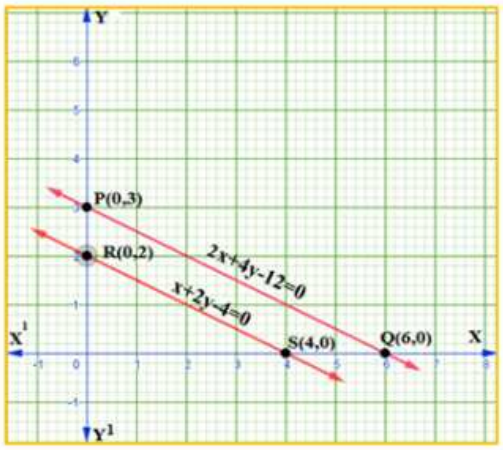
x	0	4
$y = \frac{4-x}{2}$	2	0

$2x + 4y = 12$

$\Rightarrow 4y = 12 - 2x$

$\Rightarrow y = \frac{12-2x}{4}$

x	0	6
$y = \frac{12-2x}{4}$	3	0



ಈ ಎರಡೂ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಈ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಅನುಪಾತಗಳ ಹೋಲಿಕೆ	ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದಾಗ	ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಪರಿಹಾರ	ಸ್ಥಿರತೆ
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ	ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿದೆ	ಸ್ಥಿರ ಜೋಡಿ
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ	ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರವಿದೆ	ಅವಲಂಬಿತ ಸ್ಥಿರ ಜೋಡಿ
$\frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು	ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ	ಅಸ್ಥಿರ ಜೋಡಿ

ಉದಾಹರಣೆ 4:

1) $x + 3y = 6$ (1)

$2x - 3y = 12$ (2)

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸ್ಥಿರವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ ನಕ್ಷಾ ಕ್ರಮದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

$x + 3y = 6 \Rightarrow 3y = 6 - x \Rightarrow y = \frac{6-x}{3}$

$x = 0 \Rightarrow y = \frac{6-0}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$x = 6 \Rightarrow y = \frac{6-6}{3} = \frac{0}{3} = 0$

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

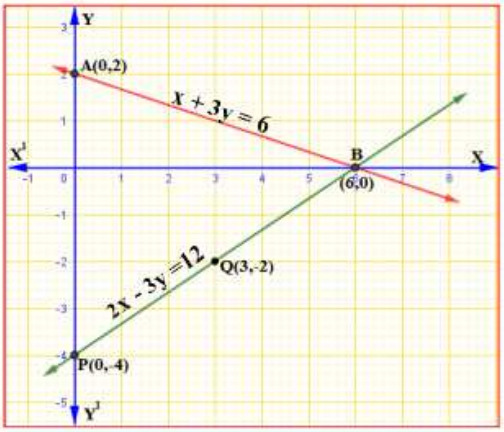
$2x - 3y = 12 \Rightarrow 3y = 2x - 12$

$\Rightarrow y = \frac{2x-12}{3}$

$x = 0 \Rightarrow y = \frac{2(0)-12}{3} = \frac{-12}{3} = -4$

$x = 3 \Rightarrow y = \frac{2(3)-12}{3} = \frac{-6}{3} = -2$

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	−4	−2



ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ $x = 6$ ಮತ್ತು $y = 0$ ಎಂಬುದು ಪರಿಹಾರ.

ಅಂದರೆ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ.

2) ಚಂಪಾಳು ಕೆಲವು ಪ್ಯಾಂಟ್ ಮತ್ತು ಲಂಗಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಒಂದು ಮಾರಾಟ ಮಳಿಗೆಗೆ ಹೋದಳು. ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಖರೀದಿಸಿದಳೆಂದು ಅವಳ ಗೆಳತಿಯರು ಕೇಳಿದಾಗ ಅವಳು ಹೀಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿದಳು. 'ಖರೀದಿಸಿದಂತಹ ಲಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪ್ಯಾಂಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ಎರಡು ಕಡಿಮೆ. ಅಲ್ಲದೆ, ಖರೀದಿಸಿದಂತಹ ಲಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪ್ಯಾಂಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ನಾಲ್ಕು ಕಡಿಮೆ. ಚಂಪಾ ಎಷ್ಟು ಪ್ಯಾಂಟ್ ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಲಂಗಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅವಳ ಗೆಳತಿಯರಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡಿ.

ಪ್ಯಾಂಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ – x, ಲಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ – y ಆಗಿರಲಿ
ಮೇಲಿನ ನಿಬಂಧನೆಯಂತೆ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

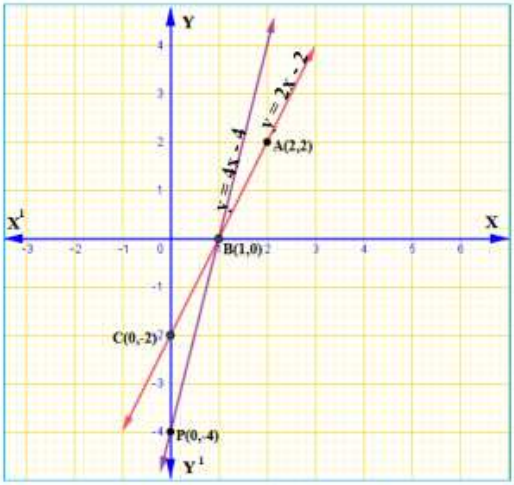
$y = 2x - 2$ (1)
$y = 4x - 4$ (2)

$y = 2x - 2$
$x = 2 \Rightarrow y = 2(2) - 2 = 4 - 2 = 2$
$x = 1 \Rightarrow y = 2(1) - 2 = 2 - 2 = 0$
$x = 0 \Rightarrow y = 2(0) - 2 = 0 - 2 = -2$

x	2	1	0
$y = 2x - 2$	2	0	−2

$y = 4x - 4$
$x = 0 \Rightarrow y = 4(0) - 4 = 0 - 4 = -4$
$x = 1 \Rightarrow y = 4(1) - 4 = 4 - 4 = 0$

x	0	1
$y = 4x - 4$	−4	0



ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು (1, 0) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಪರಿಹಾರ $x = 1$, $y = 0$
ಅಂದರೆ ಅವಳು ಒಂದು ಪ್ಯಾಂಟ್‌ನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಳು ಮತ್ತು ಅವಳು ಲಂಗವನ್ನು ಖರೀದಿಸಲಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

1) ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ನಕ್ಷಾಕ್ರಮದಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡಿಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) X ತರಗತಿಯ 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ರಸಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿದರು. ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ, ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯು 4 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ರಸಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿದ ಹುಡುಗರ ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) 5 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 7 ಪೆನ್ನುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ರೂ 50. ಹಾಗೆಯೇ 7 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 5 ಪೆನ್ನುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ರೂ 46. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಹಾಗೂ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2) $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$, $\frac{c_1}{c_2}$ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವ ಮೂಲಕ, ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೆ? ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆಯೆ? ಅಥವಾ ಐಕ್ಯಗೊಂಡಿವೆಯೆ? ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $5x - 4y + 8 = 0$
$7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$
$18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$
$2x - y + 9 = 0$

3) $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ ಮತ್ತು $\frac{c_1}{c_2}$ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವ ಮೂಲಕ, ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆಯೆ? ಅಥವಾ ಅಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆಯೆ? ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$
(ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$
(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$
(iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$
(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$

4) ಮುಂದೆ ನೀಡಿದವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ/ಅಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ? ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದರೆ, ನಕ್ಷಾಕ್ರಮದಿಂದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

(i) $x + y = 5, \quad 2x + 2y = 10$
(ii) $x - y = 8, \quad 3x - 3y = 16$
(iii) $2x + y - 6 = 0, \; 4x - 2y - 4 = 0$
(iv) $2x - 2y - 2 = 0, \; 4x - 3y - 5 = 0$

5) ಉದ್ದವು ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ 4m ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಆಯತಾಕಾರದ ಒಂದು ಹೂದೋಟದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅರ್ಧವು 36m ಹೂದೋಟದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಮಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6) ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ $2x + 3y - 8 = 0$ ಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಹೇಗೆಂದರೆ ಉಂಟಾದಂತಹ ಜೋಡಿಗಳ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರಬೇಕು.

(i) ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು (ii) ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು (iii) ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ರೇಖೆಗಳು

7) $x - y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $3x + 2y - 12 = 0$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು x – ಅಕ್ಷದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ ಹಾಗೂ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ವಲಯವನ್ನು ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ:10 ಎರಡು ಹಳಿಗಳನ್ನು $x + 2y - 4 = 0$ ಮತ್ತು $2x + 4y - 12 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಳಿಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೆ?

$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$
$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$
ಸಮೀಕರಣ (1) $\Rightarrow x = 4 - 2y \qquad (3)$

x ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$
$8 - 4y + 4y - 12 = 0$
$8 - 12 = 0$
$-4 = 0$

ಈ ಹೇಳಿಕೆ ಅಸಂಬದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ ಎರಡು ಹಳಿಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಪರಿಹಾರ

1) ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಆದೇಶ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

(i) $x + y = 14 \qquad (1)$
$x - y = 4 \qquad (2)$
ಸಮೀಕರಣ (1) $\Rightarrow x = 14 - y \qquad (3)$
x ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ
$14 - y - y = 4$
$14 - 2y = 4$
$-2y = 4 - 14$
$-2y = -10$
$y = \frac{-10}{-2} = 5$ $\quad y = 5$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ
$x = 14 - y = 14 - 5 \Rightarrow x = 9$
$\therefore x = 9, \; y = 5$

(ii) $s - t = 3 \qquad (1)$
$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6 \qquad (2)$
ಸಮೀಕರಣ (1) $\Rightarrow s = 3 + t \qquad (3)$
s ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ
$\frac{3+t}{3} + \frac{t}{2} = 6$
$\frac{6+2t+3t}{6} = 6$
$6 + 5t = 36$
$5t = 36 - 6$
$t = \frac{30}{5}$
$t = 6$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ
$s = 3 + t$
$s = 3 + 6 \Rightarrow s = 9$
$\therefore s = 9, \; t = 6$

(iii) $3x - y = 3 \qquad (1)$
$9x - 3y = 9 \qquad (2)$
ಸಮೀಕರಣ (1) $\Rightarrow y = 3x - 3$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ
$9x - 3(3x - 3) = 9$
$9x - 9x + 9 = 9$
$9 = 9$

y ಯ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಈ ಹೇಳಿಕೆ ನಿಜವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೂ, y ಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆ ಪರಿಹಾರವಾಗಿ ಸಿಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ x ಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳೆರಡೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ಕ್ಕೆ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$
$0.4x + 0.5y = 2.3$

$0.2x + 0.3y = 1.3$ $\quad (1) \times 10$
$0.4x + 0.5y = 2.3$ $\quad (2) \times 10$
$2x + 3y = 13$ $\quad (3)$
$4x + 5y = 23$ $\quad (4)$

ಸಮೀಕರಣ (3) $\Rightarrow 2x = 13 - 3y \Rightarrow x = \frac{13-3y}{2}$ $\quad (5)$

x ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (4) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$4\left(\frac{13-3y}{2}\right) + 5y = 23$
$26 - 6y + 5y = 23$
$26 - 23 = y$
$y = 3$. $\quad y = 3$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (5) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$x = \frac{13-3(3)}{2} = \frac{13-9}{2} = \frac{4}{2} = 2$
$\therefore x = 2, \quad y = 3$

(v) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$ $\quad (1)$
$\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$ $\quad (2)$

ಸಮೀಕರಣ (1) $\Rightarrow \sqrt{2}x = -\sqrt{3}y \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}\,y}{\sqrt{2}}$ $\quad (3)$

x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}\,y}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{8}y = 0$
$-\frac{3y}{\sqrt{2}} - \sqrt{4 \times 2}\,y = 0$
$-\frac{3y}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\,y = 0$
$y\left(-\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\right) = 0$
$y = 0$. $\quad y = 0$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$x = -\frac{\sqrt{3}\,(0)}{\sqrt{2}} = 0$
$\therefore x = 0, \quad y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{2} = -2$ $\quad (1)$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$ $\quad (2)$

ಸಮೀಕರಣ (1) $\times 2 \Rightarrow 3x - 5y = -4$ $\quad (3)$
ಸಮೀಕರಣ (2) $\times 6 \Rightarrow 2x + 3y = 13$ $\quad (4)$
ಸಮೀಕರಣ (3) $\Rightarrow 3x = 5y - 4 \Rightarrow x = \frac{5y-4}{3}$ $\quad (5)$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.4

1. ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಆದೇಶ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $x + y = 5$ ಮತ್ತು $2x - 3y = 4$

ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ.

$x + y = 5$ $\quad (1)$
$2x - 3y = 4$ $\quad (2)$

x ನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು

$2x + 2y = 10$ (3)

ಸಮೀಕರಣ (3) ರಿಂದ (2) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ.

$2x + 2y = 10$	(3)
$2x - 3y = 4$	(2)
$5y = 6$	

$\Rightarrow y = \frac{6}{5}$

$y = \frac{6}{5}$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ.

$x + \frac{6}{5} = 5 \Rightarrow 5x + 6 = 25 \Rightarrow 5x = 19$

$\Rightarrow x = \frac{19}{5}$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = \frac{19}{5}$ ಮತ್ತು $y = \frac{6}{5}$

ಆದೇಶ ವಿಧಾನ:

$x + y = 5$ (1)

$2x - 3y = 4$ (2)

$(1) \Rightarrow y = 5 - x$

$y = 5 - x$ ಎಂದು (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ.

$\Rightarrow 2x - 3(5 - x) = 4$ (3)

$\Rightarrow 2x - 15 + 3x = 4$

$\Rightarrow 5x = 19$

$\Rightarrow x = \frac{19}{5}$

$\frac{19}{5} + y = 5$

$\Rightarrow 19 + 5y = 25$

$\Rightarrow 5y = 25 - 19$

$\Rightarrow y = \frac{6}{5}$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = \frac{19}{5}$ ಮತ್ತು $y = \frac{6}{5}$

(ii) $3x + 4y = 10$ ಮತ್ತು $2x - 2y = 2$

ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ.

$3x + 4y = 10$ (1)

$2x - 2y = 2$ (2)

y ಯ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ

$2x - 2y = 2$ (2) x 2

$4x - 4y = 4$ (3)

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (3) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ.

$3x + 4y = 10$	(1)
$4x - 4y = 4$	(3)
$7x = 14$	

$\Rightarrow x = 2$

$x = 2$ ಎಂದು (1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ.

ಆದೇಶ ವಿಧಾನ:

$3x + 4y = -6$ (1)

$3x - y = 9$ (2)

$(2) \Rightarrow -y = 9 - 3x$

$\Rightarrow y = 3x - 9$ (3)

$y = 3x - 9$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ.

$3x + 4(3x - 9) = -6$

$\Rightarrow 3x + 12x - 36 = -6$

$\Rightarrow 15x = 30$

$\Rightarrow x = 2$

$x = 2$ ಎಂದು (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ.

$y = 3(2) - 9$

$\Rightarrow y = 6 - 9$

$\Rightarrow y = -3$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 2$ ಮತ್ತು $y = -3$

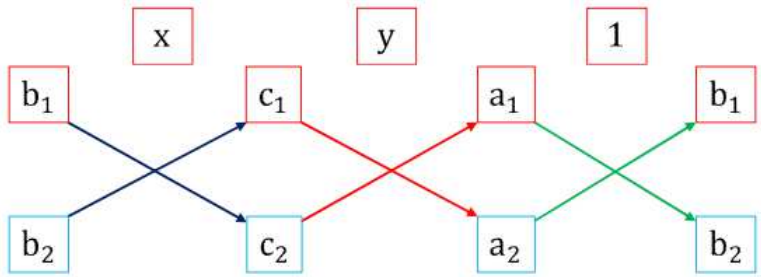
3.4.3 ಓರೆ – ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನ

ಸಮೀಕರಣಗಳು:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad [a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0]$$

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$



ಅಭ್ಯಾಸ 3.5

1. ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರ ಅಥವಾ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿರುತ್ತವೆ? ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಿರುವುದಿಲ್ಲ? ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರ ಇರುವುದಾದರೆ ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $x - 3y - 3 = 0$ (ii) $2x + y = 5$ $3x - 9y - 2 = 0$ $3x + 2y = 8$

   (iii) $3x - 5y = 20$ (iv) $x - 3y - 7 = 0$ $6x - 10y = 40$ $3x - 3y - 15 = 0$

2. i) a ಮತ್ತು b ಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ?

   $2x + 3y = 7\ (a - b)$

   $x + (a + b)y = 3a + b - 2$

   ii) k ಯ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ?

   $3x + y = 1$

   $(2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1$

3. ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಆದೇಶ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

   $8x + 5y = 9$

   $3x + 2y = 4$

4. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅವುಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು (ಇದ್ದರೆ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) ಒಂದು ವಸತಿನಿಲಯದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಶುಲ್ಕವು ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಮೊದಲ ಬಾಗವು ನಿಗದಿತ ಶುಲ್ಕ. ಎರಡನೇ ಭಾಗವು ಒಂದು ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಅವರು ಭೋಜನಶಾಲೆಯಿಂದ ಆಹಾರವನ್ನು ಪಡೆದ ದಿನಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾದ ಶುಲ್ಕ. A ಎಂಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿ 20 ದಿನ ಆಹಾರವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡಿದ್ದರಿಂದ, ಅವಳು ರೂ 1000 ವನ್ನು ವಸತಿ ನಿಲಯಕ್ಕೆ ಶುಲ್ಕವಾಗಿ ಪಾವತಿಸಬೇಕಾಯಿತು. B ಎಂಬ ಮತ್ತೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿ 26 ದಿನ ಆಹಾರವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡು ರೂ 1180 ನ್ನು ವಸತಿ ನಿಲಯಕ್ಕೆ ಶುಲ್ಕವಾಗಿ ಪಾವತಿಸಬೇಕಾಯಿತು. ನಿಗದಿತ ಶುಲ್ಕ ಮತ್ತು ಒಂದು ದಿನದ ಆಹಾರದ ಶುಲ್ಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

   ii) ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶದಿಂದ 1ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಅದು $\frac{1}{3}$ ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದಕ್ಕೆ 8ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಅದು $\frac{1}{4}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   iii) ಯಶ್ ಎಂಬಾತನು ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಿಯುತ್ತರಕ್ಕೂ 3 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಕ್ಕೂ ಒಂದು ಅಂಕವನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡು, 40 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದನು. ಒಂದು ವೇಳೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಿ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 4 ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 2 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಳೆದರೆ, ಯಶ್‌ಗೆ 50 ಅಂಕಗಳು ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಹಾಗಾದರೆ, ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿದ್ದುವು?

   iv) ಹೆದ್ದಾರಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಸ್ಥಳಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 100km. ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಾರು A ಯಿಂದಲೂ ಇನ್ನೊಂದು ಕಾರು B ಯಿಂದಲೂ ಹೊರಡುತ್ತವೆ. ಕಾರುಗಳು ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಜವದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳು 5 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. A ಕಾರು B ಯ ಕಡೆಗೆ, B ಕಾರು A ಯ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸಲು ಒಂದು ಗಂಟೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕಾರುಗಳ ಜವಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   v) ಒಂದು ಅಯತದ ಉದ್ದವನ್ನು 5 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿ, ಅಗಲವನ್ನು 3 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 9 ಚದರ ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಉದ್ದವನ್ನು 3 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಮತ್ತು ಅಗಲವನ್ನು 2 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 67 ಚದರ ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಅಯತದ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

1. **ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರ ಅಥವಾ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿರುತ್ತವೆ? ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಿರುವುದಿಲ್ಲ? ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರ ಇರುವುದಾದರೆ ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

(i) $x - 3y - 3 = 0$

$3x - 9y - 2 = 0$

ಇಲ್ಲಿ $a_1 = 1,\ b_1 = -3,\ c_1 = -3$ ಮತ್ತು $a_2 = 3,\ b_2 = -9,\ c_2 = -2$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}$; $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$; $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಅವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವಿರುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) $2x + y = 5 \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$

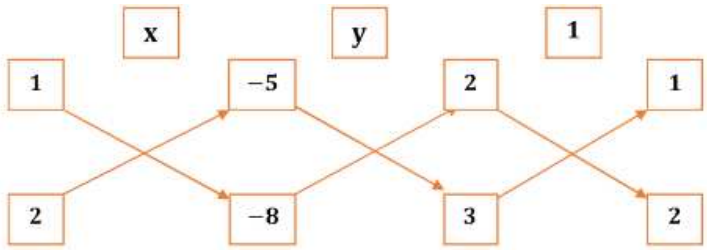
$3x + 2y = 8 \Rightarrow 3x + 2y - 8 = 0$

ಇಲ್ಲಿ $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $c_1 = -5$ ಮತ್ತು $a_2 = 3$, $b_2 = 2$, $c_2 = -8$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$; $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$; $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿದೆ.



$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1(-8) - 2(-5)} = \frac{y}{(-5)3 - (-8)2} = \frac{1}{2(2) - 3(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-8+10} = \frac{y}{-15+16} = \frac{1}{4-3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{1} \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{y}{1} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow y = 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 2$ ಮತ್ತು $y = 1$

(iv) $x - 3y - 7 = 0$

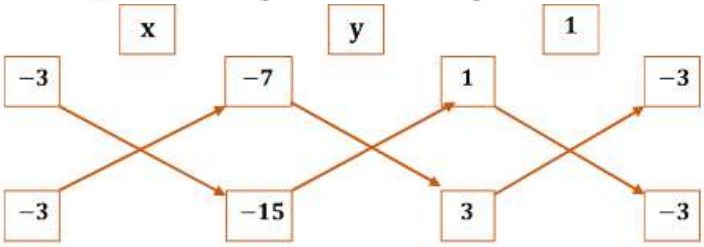
$3x - 3y - 15 = 0$

ಇಲ್ಲಿ $a_1 = 1$, $b_1 = -3$, $c_1 = -7$ ಮತ್ತು $a_2 = 3$, $b_2 = -3$, $c_2 = -15$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}$; $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-3} = 1$; $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-7}{-15} = \frac{7}{15}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿದೆ.



$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{(-3)(-15)-(-3)(-7)}=\frac{y}{(-7)3-(-15)1}=\frac{1}{1(-3)-3(-3)}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{45-21}=\frac{y}{-21+15}=\frac{1}{-3+9}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{24}=\frac{y}{-6}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{24}=\frac{1}{6}\Rightarrow 6x=24\Rightarrow x=4$$

$$\frac{y}{-6}=\frac{1}{6}$$

$\Rightarrow 6y=-6\Rightarrow y=-1$

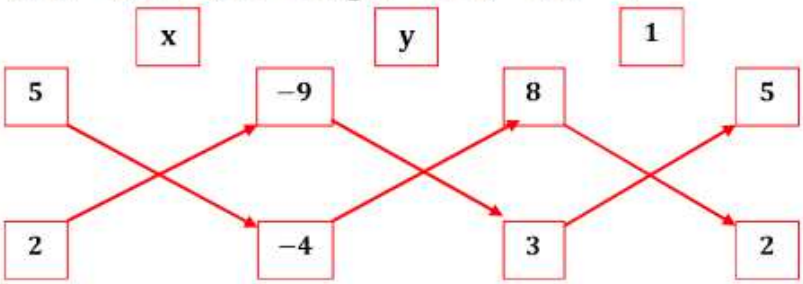
ಆದ್ದರಿಂದ $x=4$ ಮತ್ತು $y=-1$

ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನ:

$8x+5y=9\Rightarrow 8x+5y-9=0$ (1)

$3x+2y=4\Rightarrow 3x+2y-4=0$ (2)

ಇಲ್ಲಿ $a_1=8,\ b_1=5,\ c_1=-9$ ಮತ್ತು $a_2=3,\ b_2=2,\ c_2=-4$



$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{(5)(-4)-(2)(-9)}=\frac{y}{(-9)3-(-4)8}=\frac{1}{8(2)-3(5)}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{-20+18}=\frac{y}{-27+32}=\frac{1}{16-15}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{-2}=\frac{y}{5}=1$$

$$\Rightarrow\frac{x}{-2}=1\Rightarrow x=-2$$

$$\frac{y}{5}=1\Rightarrow y=5$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಪರಿಹಾರಗಳು: $x=-2$ ಮತ್ತು $y=5$

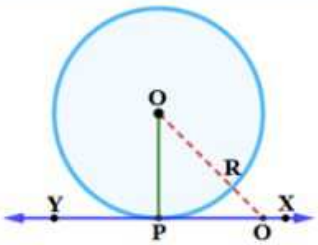
4 ವೃತ್ತಗಳು

4.2 ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ

ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವಿರುತ್ತದೆ. ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕ್ಕಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 4.1

ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು, ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ದತ್ತ: O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ XY ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೀಯ: $OP \perp XY$

ರಚನೆ: P ಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, XY ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು Q ಆಗಿರಲಿ OQ ಸೇರಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ: Q ಸ್ಪರ್ಶಕ XY ಮೇಲೆ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು P ಯನ್ನು ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ Q ವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿರಬೇಕು.

[∵ವೃತ್ತ ಸ್ಪರ್ಶಕವು, ವೃತ್ತದೊಂದಿಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.]

OQ ವೃತ್ತವನ್ನು R ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.

$\therefore OP = OR$ [∵ ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು]

ಈಗ, $OQ = OR + RQ$

$\Rightarrow OQ > OR$

$\Rightarrow OQ > OP$ [$\because OP = OR$]

ಆದ್ದರಿಂದ, OP ಯು O ನಿಂದ XY ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆಳೆದ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರವಾಗಿದೆ.

$\therefore OP \perp XY$ [∵ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ರೇಖೆಗಿರುವ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರವು ಆ ರೇಖೆಗೆಳೆದ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.]

1. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.
2. ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೆಲವು ಸಲ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ವೃತ್ತದ 'ಲಂಬಕ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಪರಿಹಾರ

1. **ವೃತ್ತವು ಹೊಂದಿರಬಹುದಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?**

   ಉತ್ತರ: **ಅಪರಿಮಿತ**

2. **ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳ ತುಂಬಿರಿ:**

   i) ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಕವೊಂದು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ _____

ಉತ್ತರ: **ಒಂದು**

ii) ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಯೇ _____

ಉತ್ತರ: **ಛೇದಕ**

iii) ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಹೊಂದಿರಬಹುದಾದ ಸಮಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ _____

ಉತ್ತರ: **ಎರಡು**

iv) ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತ ಹೊಂದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವೇ _____

ಉತ್ತರ: **ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು**

3. 5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ PQ. ಇದು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ O ದಿಂದ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯನ್ನು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. OQ = 12 cm ಆದರೆ PQ ಉದ್ದವು

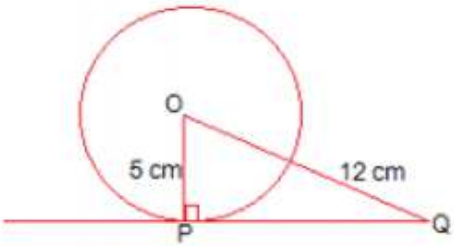
   a) 12 cm b) 13 cm c) 8.5 cm d) $\sqrt{119}$ cm

ಉತ್ತರ:

ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\Rightarrow OP \perp PQ$

ΔOPQ ನಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,



$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

$\Rightarrow (12)^2 = 5^2 + PQ^2$

$\Rightarrow PQ^2 = 144 - 25$

$\Rightarrow PQ^2 = 119$

$\Rightarrow PQ = \sqrt{119}$ cm

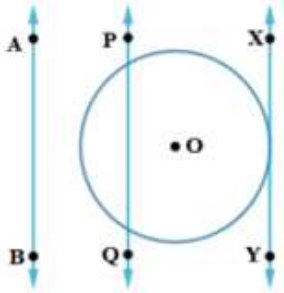
(d) $\sqrt{119}$ cm

4. ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತೊಂದು ರೇಖೆಯು ಛೇದಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

AB – ಒಂದು ರೇಖೆ

PQ – ಒಂದು ಛೇದಕ

XY – ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ



4.3 ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ:

ಪ್ರಕರಣ1: ವೃತ್ತದ ಒಳಗಿನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಪ್ರಕರಣ2: ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮಾತ್ರ ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಕರಣ3: ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 4.2 — **ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.**

ದತ್ತ: O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ P ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು. PQ ಮತ್ತು PR ಗಳು ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು P ನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು. OP, OQ, OR ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದೆ.

ಸಾಧನೀಯ: PQ = PR

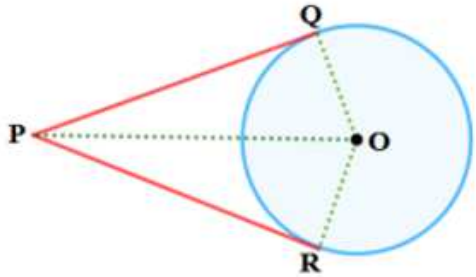
ಸಾಧನೆ: ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ OQP ಮತ್ತು ORP ಗಳಲ್ಲಿ.

OQ = OR (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

OP = OP (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದ್ದರಿಂದ. $\Delta OQP \cong \Delta ORP$ (ಲಂ.ವಿ.ಬಾ)

ಇದರಿಂದ. PQ = PR (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ.)



ಪರಿಹಾರ

ಪ್ರಶ್ನೆ 1 ರಿಂದ 3 ರವರೆಗೆ ಸರಿಯಾದ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿ ಮತ್ತು ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

1. ಒಂದು ಬಿಂದು Q ದಿಂದ, ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವು 24 cm ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಹಾಗೂ Q ಬಿಂದು ನಡುವಿನ ದೂರ 25 cm ಆದರೆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು

$\therefore OP \perp PQ$

ಮತ್ತು ΔOPQ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ.

OQ = 25 cm ಮತ್ತು PQ = 24 cm

ΔOPQ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ.

$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

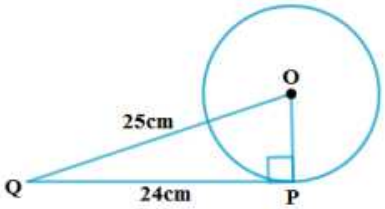
$\Rightarrow (25)^2 = OP^2 + (24)^2$

$\Rightarrow OP^2 = 625 - 576$

$\Rightarrow OP^2 = 49$

$\Rightarrow OP = 7$ cm

ಉತ್ತರ: **(A) 7 cm.**



A) 7 cm B) 12 cm C) 15 cm D) 24.5 cm

2. ಚಿತ್ರ 4.11 ರಲ್ಲಿ, ∠POQ ಆಗಿರುವಂತೆ, O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ TP ಮತ್ತು TQ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ∠PTQ ದ ಅಳತೆಯು

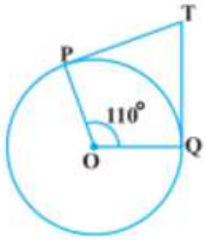


Fig 4.11

OP ಮತ್ತು OQ ಗಳು TP ಮತ್ತು TQ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು

$\therefore OP \perp TP$ ಮತ್ತು, $OQ \perp TQ$

$\angle OPT = \angle OQT = 90°$

ಚತುರ್ಭುಜ POQTಯಲ್ಲಿ,

$\angle PTQ + \angle OPT + \angle POQ + \angle OQT = 360°$

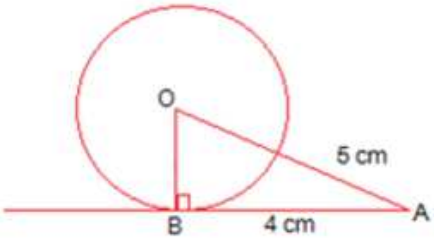
$\Rightarrow \angle PTQ + 90° + 110° + 90° = 360°$

$\Rightarrow \angle PTQ = 70°$

⇒ಉತ್ತರ (B) 70°.

A) 60 **B) 70** C) 80 D) 90

6. ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 5 cm ದೂರದಲ್ಲಿರುವ A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವು 4 cm ಇದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



AB ಯು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ.

$\therefore OB \perp AB$

OA = 5cm and AB = 4 cm (ದತ್ತ)

ΔABO ನಲ್ಲಿ,

$OA^2 = AB^2 + BO^2$ [ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

$\Rightarrow 5^2 = 4^2 + BO^2$

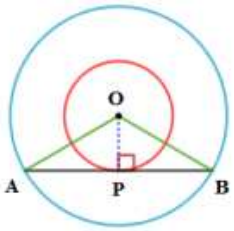
$\Rightarrow BO^2 = 25 - 16$

$\Rightarrow BO^2 = 9$

$\Rightarrow BO = 3$

∴ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3 cm.

7. ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರಿಯ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 5 cm ಮತ್ತು 3 cm ಆಗಿವೆ. ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ 5ಸೆಂ.ಮೀ ಮತ್ತು 3ಸೆಂ.ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ.

AB ಯು 5ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾ 3ಸೆಂ.ಮೀ.ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.

∴ AB ಯು ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ.

$\Rightarrow OP \perp AB$

ಆದ್ದರಿಂದ AP = PB [ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆಳೆದ ಲಂಬವು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ]

$OA^2 = AP^2 + OP^2$ [ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

$\Rightarrow 5^2 = AP^2 + 3^2$

$\Rightarrow AP^2 = 25 - 9$

$\Rightarrow AP = 4,$

$AB = 2AP = 2 \times 4 = 8$ cm

∴ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು 8 cm.

8. ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವು ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 4.12 ನೋಡಿ). AB + CD = AD + BC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

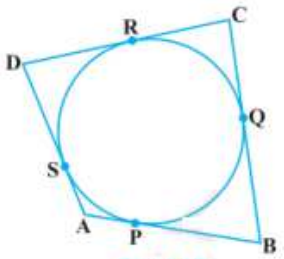


Fig 4.12

ಚಿತ್ರದಿಂದ,

DR = DS (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು D ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು) (1)

AP = AS (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು A ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು) (2)

BP = BQ (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು B ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು) (3)

CR = CQ (ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು C ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು) (4)

(1) + (2) + (3) + (4)

DR + AP + BP + CR = DS + AS + BQ + CQ

⇒ (BP + AP) + (DR + CR) = (DS + AS) + (CQ + BQ)

⇒AB + CD = AD + BC

5 ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಒಂದು ಪುನರಾವಲೋಕನ.

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಲೂ ಒಂದು ಸುತ್ತು ಹಾಕಲು ಚಲಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಅಥವಾ ಪರಿಧಿ ಎನ್ನುವರು. ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯು ಅದರ ವ್ಯಾಸದೊಂದಿಗೆ ಸ್ಥಿರವಾದ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರ π ನಿಂದ (ಫೈ ಎಂದು ಓದಿ) ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಹೊಲದ ಸುತ್ತಲೂ ಬೇಲಿ ಹಾಕಲು ಪ್ರತಿ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ರೂ 24 ರಂತೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ ರೂ 5280. ಹೊಲವನ್ನು ಉಳಲು ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ರೂ 0.50 ರಂತೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಪರಿಹಾರ: ಬೇಲಿಯ ಉದ್ದ (ಮೀಟರ್‌ದಲ್ಲಿ) $= \frac{\text{ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ}}{\text{ದರ}} = \frac{5280}{24} = 220$ ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಹೊಲದ ಪರಿಧಿ = 220 m.

ಆದ್ದರಿಂದ, 'r' ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಹೊಲದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾದರೆ

$2\pi r = 220$

ಅಥವಾ $2 \times \frac{22}{7} \times r = 220$

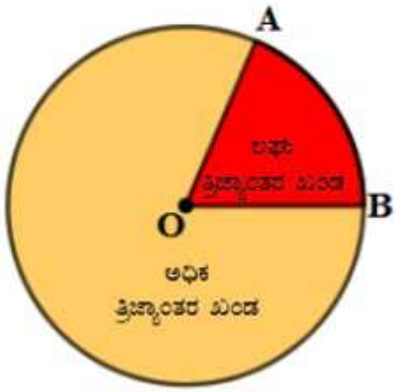
$\Rightarrow r = \frac{220 \times 7}{2 \times 22} = 35\text{m}$

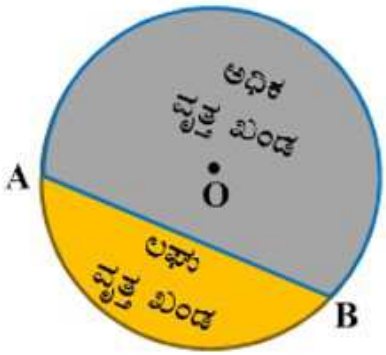
ಆದ್ದರಿಂದ, ಹೊಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 35^2 = (22 \times 5 \times 35)\text{m}^2$

ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ 0.50 ರಂತೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ $= (22 \times 5 \times 35) \times 0.5 =$ ರೂ 1925

5.3 ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು:

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಅನುರೂಪ ಕಂಸದಿಂದ ಆವೃತ್ತವಾದ ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು 'ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಹಾಗೂ ಅದರ ಅನುರೂಪ ಕಂಸದಿಂದ ಆವೃತ್ತವಾದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಭಾಗವನ್ನು 'ವೃತ್ತಖಂಡ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.





ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಕೆಲವು ಸಂಬಂಧ (ಸೂತ್ರ):

ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ O ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ r ಇರುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡವು OAPB ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 5.6 ನೋಡಿ).
$\angle AOB$ ಯ ಅಳತೆಯು θ ಡಿಗ್ರಿಯಾಗಿರಲಿ.

ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು 360^0 ಆದಾಗ

ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = πr^2

ಆದ್ದರಿಂದ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು 1 ಡಿಗ್ರಿ ಆದಾಗ

ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\pi r^2}{360}$

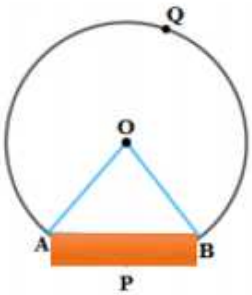
ಆದ್ದರಿಂದ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು θ ಆದಾಗ

ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\pi r^2}{360} \times \theta \Rightarrow \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

θ ಕೋನವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

θ ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕಂಸದ ಉದ್ದ

$= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$



APB ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ → **OAPB ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ΔOAB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ**

OAQB ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ → **πr^2 - OAPB ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ**

AQB ಅಧಿಕ ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ → **πr^2 - APB ಲಘು ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ**

ಉದಾಹರಣೆ 2: ತ್ರಿಜ್ಯ 4 cm ಮತ್ತು ಕೋನವು 30^0 ಇರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಅನುರೂಪವಾದ ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ಬಳಸಿ).

ಪರಿಹಾರ: OAPB ಯು ದತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡವಾಗಿದೆ.

ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$\Rightarrow \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4 = \frac{12.56}{3} \approx 4.19 \text{ cm}^2$

ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= πr^2 - OAPB ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= (3.14 \times 16 - 4.19) \text{ cm}^2$

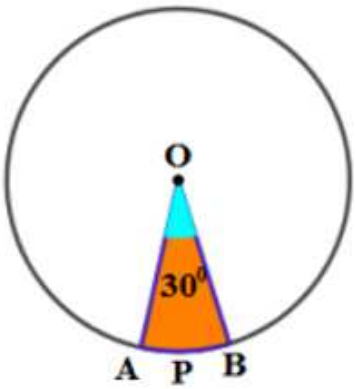
$\approx 46.1 \text{ cm}^2$

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:

ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{360-\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{360-30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4$

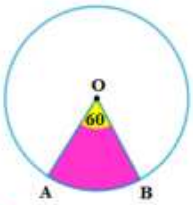
$= 46.05 \approx 46.1 \text{ cm}^2$



ಪರಿಹಾರ

[π ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ]

1. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 6 cm, ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನವು 60^0 ಆದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



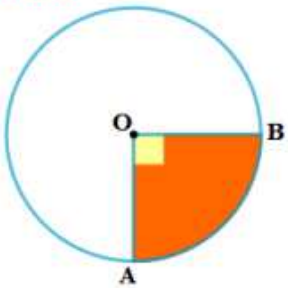
ಕೋನ θ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

ಕೋನ 60^0 ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{60}{360°} \times \pi r^2 \text{ cm}^2$

$= \frac{1}{6} \times 6 \text{x} 6 \text{ x} \frac{22}{7}$

$= \frac{132}{7} \text{ cm}^2$

2. ಪರಿಧಿಯು 22 cm ಇರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ವೃತ್ತದ ಚತುರ್ಥಕ ಭಾಗ = ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನ 90^0

ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ $C = 2\pi r = 22$ cm

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r = \frac{22}{2\pi} \text{ cm} = \frac{22 \text{x } 7}{2 \text{ x } 22} = \frac{7}{2} \text{ cm}$

ಕೋನ θ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

$90°$ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{90}{360°} \times \pi r^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \text{x} \frac{7}{2} \text{x} \frac{7}{2}$

$= \frac{77}{8} \text{ cm}^2$

3. ಒಂದು ಗಡಿಯಾರದಲ್ಲಿ ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳಿನ ಉದ್ದವು 14 cm ಆಗಿದೆ. ಐದು ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಅದು ಕ್ರಮಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಡಿಯಾರದ ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

$\therefore$ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ (r) = 14 cm

ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳು 1 ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಸುತ್ತುವ ಕೋನ = $360°$

$\therefore$ ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳು 5ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಸುತ್ತುವ ಕೋನ $= \frac{360°}{60} \times 5 = 30°$

ಕೋನ θ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

$\therefore$ಕೋನ 30^0 ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{30}{360°} \times \frac{22}{7} \text{x } 14 \text{ x } 14$

$= \frac{1}{12} \times \frac{22}{7} \text{x } 14 \text{ x } 14$

$= \frac{1}{3} \times 22 \text{ x } 7$

$= \frac{154}{3} \text{ cm}^2$

4. 10 cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ 1) ಲಘುವೃತ್ತಖಂಡ 2) ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ಬಳಸಿ).

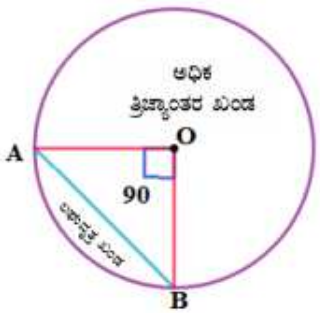
ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 10 cm

ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ = $360° - 90° = 270°$

ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $- \frac{270}{360°} \times \pi r^2 \text{ cm}^2$

$= \frac{3}{4} \times 3.14 \text{ x}10 \text{ x } 10 = 75 \text{ x } 3.14 \text{ cm}^2$

$= 235.5 \text{ cm}^2$



ಲಂಬಕೋನ ΔAOB ಯಲ್ಲಿ OA = 10 cm, OB = 10 cm

ΔAOBಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times OA \times OB$

$= 1/2 \times 10 \times 10 = 50 \text{ cm}^2$ (1)

ಲಘುವೃತ್ತಖಂಡವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ = $90°$

ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{90}{360°} \times \pi r^2 \text{ cm}^2$

$= \frac{1}{4} \times 3.14 \text{ x}10 \text{ x } 10 = 25 \text{ x } 3.14 \text{ cm}^2$

$= 25 \times 3.14 \text{ cm}^2 = 78.5 \text{ cm}^2$ (2)

ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = (2) − (1)

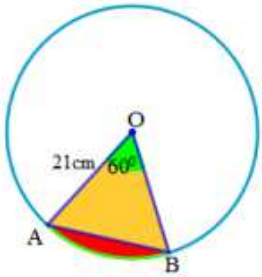
$= 78.5 \text{ cm}^2 - 50 \text{ cm}^2 = 28.5 \text{ cm}^2$

5. 21 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಂಸವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 60^0 ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ.

1) ಕಂಸದ ಉದ್ದ

2) ಕಂಸದಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ.

3) ಅನುರೂಪ ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 21 cm

(1) ಕಂಸದ ಉದ್ದ AB = $\frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$

$= \frac{60}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$

$= \frac{1}{6} \times 2 \times 22 \times 3 = 22$

∴ಕಂಸದ ಉದ್ದ AB 22 cm.

(2) AB ವೃತ್ತ ಕಂಸವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ = 60°

60° ಕೋನವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{60}{360^\circ} \times \pi r^2$ cm^2

$= \frac{60}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ cm^2

$= \frac{1}{6} \times 22 \times 3 \times 21$ cm^2

$= \frac{1}{2} \times 22 \times 21$ cm^2

$= 11 \times 21$ cm^2

$= 231$ cm^2

∴ 60° ಕೋನವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 231 cm^2

(3) ಸಮಬಾಹು ΔAOBಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (OA)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (21)^2$

$= \frac{441\sqrt{3}}{4}$ cm^2

ಅನುರೂಪ ಜ್ಯಾವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನ – ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ΔAOBಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right)$ cm^2

8. 15 m ಬಾಹುವಿರುವ ಚೌಕಾಕಾರದ ಒಂದು ಹುಲ್ಲಿನ ಮೈದಾನದ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಗೂಟಕ್ಕೆ ಕುದುರೆಯೊಂದನ್ನು 5 m ಉದ್ದದ ಹಗ್ಗದಿಂದ ಕಟ್ಟಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 5.11 ನ್ನು ನೋಡಿ)

(i) ಕುದುರೆಯು ಹುಲ್ಲನ್ನು ಮೇಯಬಹುದಾದ ಮೈದಾನದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

(ii) 5 m ಹಗ್ಗದ ಬದಲಾಗಿ 10 m ಹಗ್ಗ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಮೇಯಬಹುದಾದ ಮೈದಾನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

Fig. 12.11

ಮೈದಾನದ ಬಾಹು(ಬದಿ)ಯ ಉದ್ದ = 15 m

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ(ಹಗ್ಗದ ಉದ್ದ) r = 5 m

ಕುದುರೆಯನ್ನು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಿರುವುದರಿಂದ ಅದು ವೃತ್ತದ ಚತುರ್ಥಭಾಗವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಮೇಯುತ್ತದೆ.

ಅದು ಮೇಯುವ ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 5 m.

(i) ಕುದುರೆಯು ಮೇಯುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{\pi r^2}{4} = \frac{3.14 \times 5^2}{4} = \frac{78.5}{4}$

= 19.625 m^2

(ii) ಹಗ್ಗದ ಉದ್ದವನ್ನು 10m ಮಾಡಿದಾಗ ಕುದುರೆಯು

ಮೇಯುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $= \frac{\pi r^2}{4} = \frac{3.14 \times 10^2}{4} = \frac{314}{4}$

= 78.5 m^2

ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಮೇಯಬಹುದಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= 78.5 m^2 - 19.625 m^2

= 58.875 m^2

10. ಒಂದು ಕೊಡೆಯು ಸಮ ಅಂತರದಲ್ಲಿ 8 ಕಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 5.13 ನ್ನು ನೋಡಿ). ಕೊಡೆಯು 45 cmತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಚಪ್ಪಟೆಯಾದ ವೃತ್ತ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಎರಡು ಅನುಕಮ ಕಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

Fig 5.13

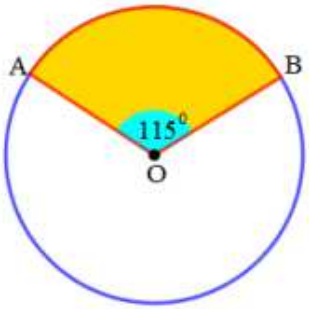
ಕೊಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕಡ್ಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 8

ಕೊಡೆಯು ಚಪ್ಪಟೆಯಾದಾಗ ತ್ರಿಜ್ಯ = 45 cm

ಅನುಕ್ರಮ ಕಡ್ಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\text{ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\text{ಕಡ್ಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$

$= \frac{\pi r^2}{8} = \frac{\frac{22}{7} \times 45^2}{8} = \frac{44550}{56} = \frac{22275}{28}\ cm^2 = \mathbf{795.5\ cm^2}$

11. ಒಂದು ಕಾರಿಗೆ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಅತಿಕ್ರಮಿಸದಂತಿರುವ ಎರಡು ಗಾಜೊರೆಸುವ ಉಪಕರಣಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಾಜೊರೆಸುವ ಉಪಕರಣವು 25 cm ಉದ್ದದ ಬ್ಲೇಡನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಇದು 115^0 ಕೋನದಲ್ಲಿ ಒರೆಸುತ್ತದೆ. ಬ್ಲೇಡ್‌ಗಳು ಒಂದು ಬಾರಿ ಜಾರಿದಾಗ ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಗಾಜೊರೆಸುವ ಉಪಕರಣದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನ = 115°

ಗಾಜೊರೆಸುವ ಉಪಕರಣದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 25 cm

ಗಾಜೊರೆಸುವ ಉಪಕರಣದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{115°}{360°} \times \pi\ r^2\ cm^2$

$= \frac{115°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 25 \times 25\ cm^2$

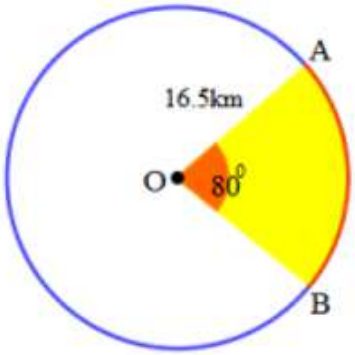
$= \frac{23}{72} \times \frac{22}{7} \times 625\ cm^2$

$= \frac{23}{36} \times \frac{11}{7} \times 625\ cm^2 = \frac{158125}{252}\ cm^2$

ಎರಡು ಬ್ಲೇಡ್‌ಗಳು ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸುವ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2 \times \frac{158125}{252}\ cm^2 = \frac{158125}{126}$

$= \mathbf{1254.96\ cm^2}$

12. ನೀರಿನ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಬಂಡೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಎಚ್ಚರಿಸಲು ಒಂದು ದೀಪಸ್ತಂಭವು 80^0 ಕೋನವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದಲ್ಲಿ 16.5 km ದೂರಕ್ಕೆ ಕೆಂಪು ಬೆಳಕನ್ನು ಹರಡುತ್ತದೆ. ಹಡಗುಗಳನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಸುವ ಈ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ದೀಪಸ್ತಂಭವು O ನಲ್ಲಿರಲಿ.

ದೀಪ ಹರಡುವ ಬೆಳಕಿನ ದೂರವು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ. r = 16.5 km

ಆದ್ದರಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನ = 80°

ದೀಪದ ಬೆಳಕು ಹರಡುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{80°}{360°} \times \pi\ r^2\ km^2$

$= \frac{2}{9} \times 3.14 \times 16.5 \times 16.5 km^2$

$= \frac{2}{9} \times 3.14 \times 272.25 km^2$

$= \mathbf{189.97\ km^2}$

ಉದಾಹರಣೆ 5: ABCD ಯು 14 cm ಬಾಹುವಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವಾದರೆ, ಚಿತ್ರ 5.16 ರಲ್ಲಿ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ವಲಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

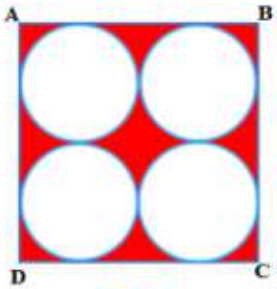


Fig 5.16

ಪರಿಹಾರ: ABCD ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 14 \times 14\ cm^2 = 196\ cm$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯಾಸ $= \frac{14}{2} = 7cm$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $= \frac{7}{2}$ cm

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{77}{2}\ cm^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾಲ್ಕು ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 4 \times \frac{77}{2} = 154cm^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ವಲಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ= = (196 − 154)= $42cm^2$

ಉದಾಹರಣೆ 6: ABCD ಯು 10 cm ಬಾಹುವುಳ್ಳ ಚೌಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಚೌಕದ ಬಾಹುವು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವಂತೆ ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಚಿತ್ರ 5.17 ರಲ್ಲಿ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ವಿನ್ಯಾಸದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ಬಳಸಿ)

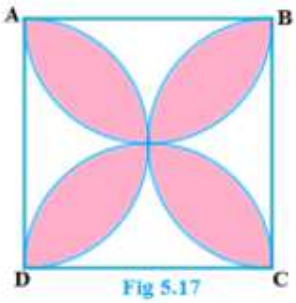


Fig 5.17

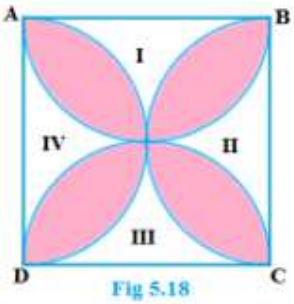


Fig 5.18

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ I + ವಿಸ್ತೀರ್ಣ II = ABCD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ − 5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎರಡು ಅರ್ಧವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$\Rightarrow$ABCD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ − 5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= a^2 - \pi r^2$

$\Rightarrow 10 \times 10 - 3.14 \times 5^2 = 100 - 3.14 \times 25 = 100 - 78.5 = 21.5cm^2$

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ III + ವಿಸ್ತೀರ್ಣ IV = $21.5cm^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ವಿನ್ಯಾಸದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ= ABCD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ − [I + II + III + IV] ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 100 - 2x(21.5) = 100 - 43 = 57cm^2$

ಪರಿಹಾರ 5.3

[π ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ]

1. ಚಿತ್ರ 5.19 ರಲ್ಲಿ, PQ = 24 cm, PR = 7 cm ಮತ್ತು 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವಾದರೆ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

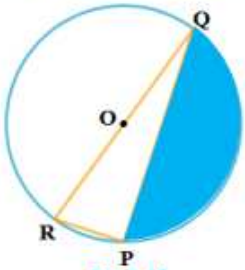


Fig 5.19

PQ = 24 cm ಮತ್ತು PR = 7 cm

$\angle P = 90°$ (ಅರ್ಧ ವೃತ್ತದ ಕೋನ)

$\therefore$ QR ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಕರ್ಣ = ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ

$QR^2 = PR^2 + PQ^2$ [Δ PRQ ನಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

$\Rightarrow QR^2 = 7^2 + 24^2$

$\Rightarrow QR^2 = 49 + 576$

$\Rightarrow QR^2 = 625$

$\Rightarrow QR = 25$ cm

$\therefore$ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $= \frac{25}{2}$ cm

ಅರ್ಧ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{\pi R^2}{2}$

$= \frac{\frac{22}{7} \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2}}{2} = \frac{13750}{56}\ cm^2$

$= \frac{6875}{28}\ cm^2 = 245.54\ cm^2$

ΔPQRನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times PR \times PQ$

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 24\ cm^2$

$= 84\ cm^2$

$\therefore$ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 245.54\ cm^2 - 84\ cm^2$

$= 161.54\ cm^2$

[ಅಥವಾ $\frac{6875}{28} - 84 = \frac{6875-2352}{28} = \frac{4523}{28}\ cm^2$]

2. ಚಿತ್ರ 5.20 ರಲ್ಲಿ, ಕೇಂದ್ರ O ಇರುವ ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 7 cm ಮತ್ತು 14 cm ಇವೆ. ಮತ್ತು $\angle AOC = 40^0$ ಆದರೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಛಾಯಾಕೃತ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

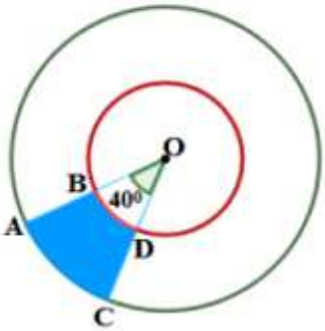


Fig 5.20

ಒಳ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 7 cm

ಹೊರ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 14 cm

ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನದ ಅಳತೆ = 40°

OAC ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{40^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$ cm^2

$= \frac{1}{9} \times \frac{22}{7} \times 14^2$ cm^2

$= \frac{1}{9} \times 22 \times 2 \times 14$ cm^2

$= \frac{616}{9}$ **cm^2**

OBD = ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{40^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$ cm^2

$= \frac{1}{9} \times \frac{22}{7} \times 7^2$ cm^2

$= \frac{1}{9} \times 22 \times 7$ cm^2 $= \frac{154}{9}$ **cm^2**

∴ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= OAC ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - OBD = ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \left(\frac{616}{9} - \frac{154}{9}\right) \text{cm}^2 = \frac{462}{9} \text{ cm}^2 = \frac{154}{3} \text{ cm}^2$$

3. ಚಿತ್ರ 5.21 ರಲ್ಲಿ, ABCD ಯು 14 cm ಬಾಹುವುಳ್ಳ ಚೌಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು APD ಹಾಗೂ CPB ಗಳು ಅರ್ಧವೃತ್ತಗಳಾದರೆ, ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

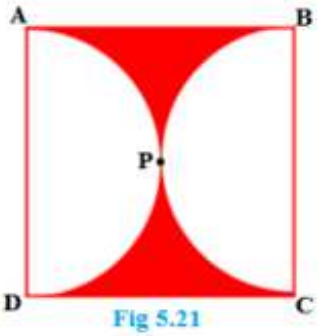


Fig 5.21

ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ = 14 cm

ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಅಳತೆ = 14 cm

∴ ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 7 cm

ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 14 × 14 = 196 cm^2

ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\pi R^2}{2}$

$= \frac{\frac{22}{7} \times 7 \times 7}{2} = \frac{154}{2} = 77$ cm^2

ಎರಡು ಅರ್ಧವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 2 × 77 cm^2 = 154 cm^2

∴ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 196 cm^2 - 154 cm^2 = 42 cm^2

5. ಚಿತ್ರ 5.23 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, 4 cm ಬಾಹುವುಳ್ಳ ಒಂದು ಚೌಕದ ಪ್ರತಿ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ 1 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕವನ್ನು ಮತ್ತು 2 cm ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದೆ. ಚೌಕದ ಉಳಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ = 4 cm

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 1 cm

ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = (ಬಾಹು)^2 = 4^2 = 16 cm^2

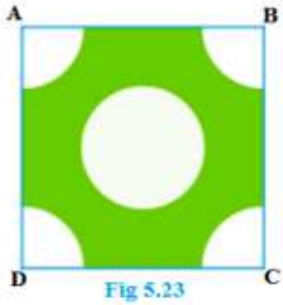


Fig 5.23

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚತುರ್ಥಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\pi R^2}{4}$ cm^2

$= \frac{\frac{22}{7} \times 1^2}{4} = \frac{11}{14}$ cm^2

∴ 4 ಚತುರ್ಥಕಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 4 × $\frac{11}{14}$ cm^2 = $\frac{22}{7}$ **cm^2**

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = πR^2 cm^2 = $\frac{22}{7} \times 1^2 = \frac{22}{7}$ cm^2

ಅದ್ದರಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿದ ಭಾಗಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\left(\frac{22}{7} + \frac{22}{7}\right)$ cm^2

= $\frac{44}{7}$ **cm^2**

∴ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - ಕತ್ತರಿಸಿದ ಭಾಗಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \left(16 - \frac{44}{7}\right)$ cm^2

$= \left(\frac{112-44}{7}\right)$ cm^2

$= \frac{68}{7}$ **cm^2**

7. ಚಿತ್ರ 5.25 ರಲ್ಲಿ, ABCD ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 14 cm. ಪ್ರತಿ ವೃತ್ತವು ಉಳಿದ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ A, B, C ಮತ್ತು D ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ನಾಲ್ಕು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ = 14 cm

∴ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $= \frac{14}{2} = 7$ cm

ABCDಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 14^2 = 196$ cm^2

ಚತುರ್ಥಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{\pi R^2}{4}$ cm^2

$= \frac{\frac{22}{7} \times 7^2}{4} = \frac{154}{4}$ cm^2 $= \frac{77}{2}$ cm^2

∴ 4 ಚತುರ್ಥಕಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 4 \times \frac{77}{2}$ cm^2 $= 154$ cm^2

∴ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ABCD ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - 4 ಚತುರ್ಥಕಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= 196 cm^2 - 154 cm^2

= 42 cm^2

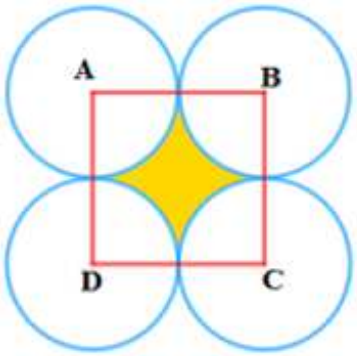


Fig 5.25

9. ಚಿತ್ರ 5.27 ರಲ್ಲಿ, O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿವೆ. OD ಯು ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ. OA = 7 cm ಆದರೆ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ R = 7 cm

ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r = \frac{7}{2}$ cm

ΔBCA ಯ ಎತ್ತರ= OC = 7 cm

ΔBCAಯ ಪಾದ = AB = 14 cm

ΔBCA ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times$ AB × OC

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 14 =$ **49 cm^2**

ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi R^2 = \frac{22}{7} \times 7^2 =$ **154 cm^2**

ದೊಡ್ಡ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{154}{7}$ cm^2 = **77 cm^2**

ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} =$ **$\frac{77}{2}$cm^2**

ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ದೊಡ್ಡ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - ΔBCA ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \left(77 - 49 + \frac{77}{2}\right)$ cm^2

$= \left(\frac{154-98+77}{2}\right)$ cm^2

$= \left(\frac{133}{2}\right)$ cm^2

= 66.5 cm^2

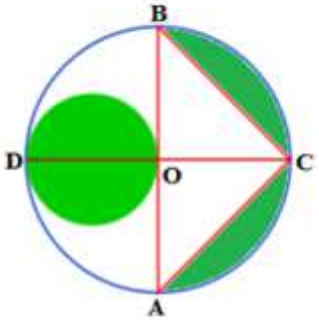


Fig 5.27

11. ಒಂದು ಚೌಕಾಕಾರದ ಕರವಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ, 7 cm ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂಬತ್ತು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ. (ಚಿತ್ರ 5.29 ನೋಡಿ). ಕರವಸ್ತ್ರದ ಉಳಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೃತ್ತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 9

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 7 cm

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ 3 ವೃತ್ತಗಳಿವೆ

∴ ವರ್ಗದ ಬದಿ = 3 × ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ = 3 × 14 = 42 cm

ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 42 × 42 cm^2 = 1764 cm^2

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 154$ cm^2

ವೃತ್ತ ವಿನ್ಯಾಸಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 9 × 154 = 1386 cm^2

ಕರವಸ್ತ್ರದ ಉಳಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - ವೃತ್ತ ವಿನ್ಯಾಸಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= 1764 - 1386 = **378 cm^2**

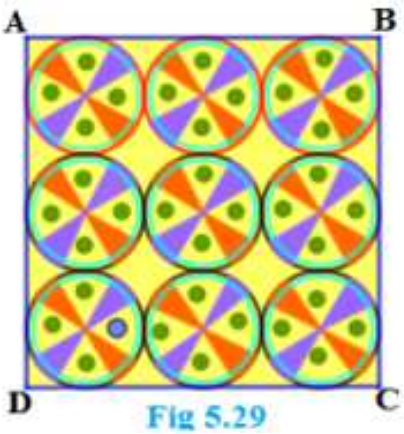


Fig 5.29

12. 5.30 ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, OACB ಯು O ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು 3.5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಚತುರ್ಥಕವಾಗಿದೆ. OD = 2 cm ಆದರೆ

i) ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕ

ii) ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

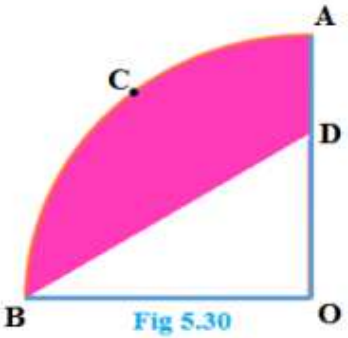


Fig 5.30

ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 3.5 cm = $\frac{7}{2}$ cm

(i) OACBಚತುರ್ಥಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\pi R^2}{4}$ cm^2

$= \frac{\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}}{4}$ cm^2

$= \frac{77}{8}$ **cm^2**

(ii) BOD ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times 2$ cm^2

$= \frac{7}{2}$ **cm^2**

ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = OACBಚತುರ್ಥಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - BOD ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \left(\frac{77}{8} - \frac{7}{2}\right)$ cm^2

$= \left(\frac{77}{8} - \frac{28}{8}\right)$ cm^2 $= \left(\frac{49}{8}\right)$ cm^2

= 6.125 cm^2

15. ಚಿತ್ರ 5.33 ರಲ್ಲಿ, ABC ಯು 14 cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು BC ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

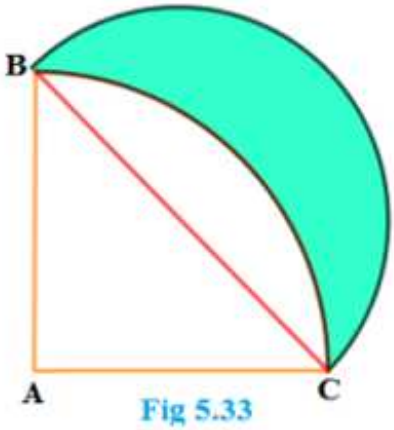


Fig 5.33

ABC ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 14 cm

AB = AC = 14 cm

BC ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ

ABC ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ

$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$ [ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

$\Rightarrow BC^2 = 14^2 + 14^2$

$\Rightarrow BC = 14\sqrt{2}$ cm

ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = $\frac{14\sqrt{2}}{2}$cm = $7\sqrt{2}$ cm

ΔABCಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = = $\frac{1}{2} \times 14 \times 14$ cm^2

$= 7 \times 14 \times 14 =$ **98 cm^2**

ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\pi R^2}{4}$ cm^2

$= \frac{\frac{22}{7} \times 14 \times 14}{4}$ cm^2

= 154 cm^2

ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\pi R^2}{2}$

$= \frac{\frac{22}{7} \times 7\sqrt{2} \times 7\sqrt{2}}{2}$

= 154 cm^2

ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ΔABCಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= 154 + 98 - 154 cm^2

= 98 cm^2

16. ಚಿತ್ರ 5.34 ರಲ್ಲಿ, 8 cm ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಲಯದ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

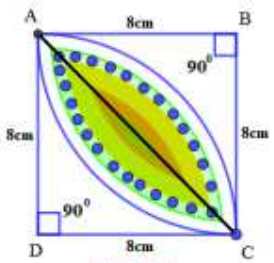


Fig 5.34

AB = BC = CD = AD = 8 cm

ΔABCಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ΔADC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 =$ **32 cm^2**

AECBಚತುರ್ಥಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = AFCD ಚತುರ್ಥಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{\pi R^2}{4}$ cm^2 $= \frac{\frac{22}{7} \times 8 \times 8}{4}$

$= \frac{352}{7}$ **cm^2**

ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= (AECBಚತುರ್ಥಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - ΔABCಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) + (AFCDಚತುರ್ಥಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - ΔADCವಿಸ್ತೀರ್ಣ)

$= \left(\frac{352}{7} - 32\right) + \left(\frac{352}{7} - 32\right) cm^2$

$= 2 \times \left(\frac{352}{7} - 32\right) cm^2$

$= 2 \times \left(\frac{352-224}{7}\right) cm^2$

$= 2 \times \left(\frac{128}{7}\right) cm^2$

$= \frac{256}{7} cm^2$

ಸಾರಾಂಶ

1. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ = $2\pi r^2$
2. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = πr^2
3. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಮತ್ತು ಡಿಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ θ ಇರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕಂಸದ ಉದ್ದವು = $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$
4. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಡಿಗ್ರಿಯಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಇರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$
5. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಅನುರೂಪ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ − ಅನುರೂಪ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

7 ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳು ಸಮತಲವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಚತುರ್ಥಕಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಕಾರ್ಟೇಸಿಯನ್ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ,

i. y − ಅಕ್ಷದಿಂದ ಆ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಲಂಬದೂರವನ್ನು ಆ ಬಿಂದುವಿನ x − ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಥವಾ ಕ್ಷಿತಿಜದೂರ ಎನ್ನುವರು.

ii. x − ಅಕ್ಷದಿಂದ ಆ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಲಂಬದೂರವನ್ನು ಆ ಬಿಂದುವಿನ y − ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಥವಾ ಲಂಬದೂರ ಎನ್ನುವರು.

P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು P(x, y) ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (0, 0)

x ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(x, 0)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(0, y)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ನಕ್ಷೆ ರಚಿಸುವಿಕೆ

ಸರಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ $ax + by = c$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದ **ನಕ್ಷೆಯು ಸರಳ ರೇಖೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.**

ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯು ಪರವಲಯವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

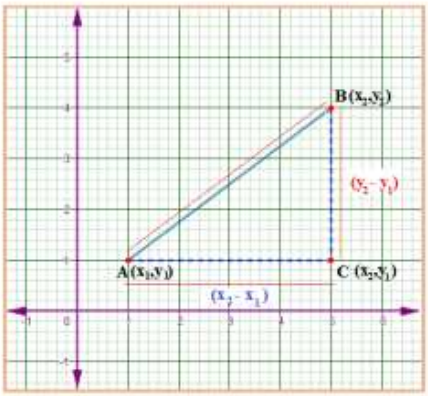
ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

x –ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ

ದೂರ $= x_2 - x_1$

y –ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ

ದೂರ $= y_2 - y_1$



$AB^2 = AC^2 + BC^2$

x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೂ ಇಲ್ಲದ ಅಥವಾ y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೂ ಇಲ್ಲದ ಅಥವಾ ಅವೆರಡಕ್ಕೂ ಸಮಾನಾಂತರವೂ ಆಗಿಲ್ಲದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಇರುವ ದೂರ $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

ಉದಾಹರಣೆ1: (3, 2), (–2, –3) ಮತ್ತು (2, 3) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ತ್ರಿಭುಜ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆಯೆ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ, ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಧವನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿ.

$P(3,2)$, $Q(-2,-3)$, $R(2,3)$

ಸೂತ್ರ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$PQ = \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-(-3))^2}$

$= \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2}$

$= \sqrt{(5)^2 + (5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

$= 7.07$

$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

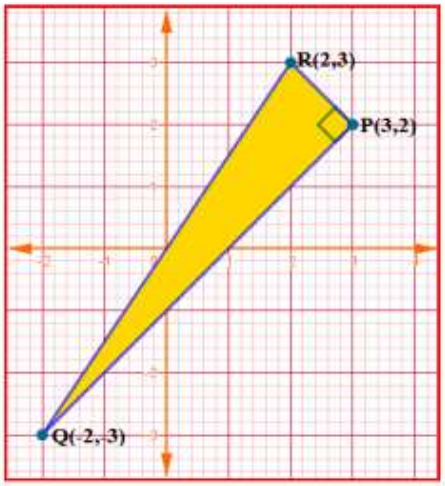
$= 7.21$

$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$= 1.41$



ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ದೂರಗಳ ಮೊತ್ತವು, ಮೂರನೇ ದೂರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದರಿಂದ, P, Q ಮತ್ತು R ಬಿಂದುಗಳು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಅಲ್ಲದೆ, $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮದ ಪ್ರಕಾರ $\angle P = 90^0$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ PQR ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ.

ಉದಾಹರಣೆ2: (1, 7), (4, 2), (–1, –1) ಮತ್ತು (–4, 4) ಬಿಂದುಗಳು ಚೌಕದ ಶೃಂಗಗಳು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: A (1, 7), B (4, 2), C (-1, -1) ಮತ್ತು D (-4, 4)

$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (2-7)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25}$

$= \sqrt{34}$

$BC = \sqrt{(-1-4)^2+(-1-2)^2}$

$= \sqrt{(-5)^2+(-3)^2} = \sqrt{25+9}$

$= \sqrt{34}$

$CD = \sqrt{\left(-4-(-1)\right)^2+\left(4-(-1)\right)^2}$

$= \sqrt{(-4+1)^2+(4+1)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(5)^2} = \sqrt{9+25}$

$= \sqrt{34}$

$DA = \sqrt{\left(1-(-4)\right)^2+(7-4)^2}$

$= \sqrt{(1+4)^2+(3)^2}$

$= \sqrt{(5)^2+(3)^2} = \sqrt{25+9}$

$= \sqrt{34}$

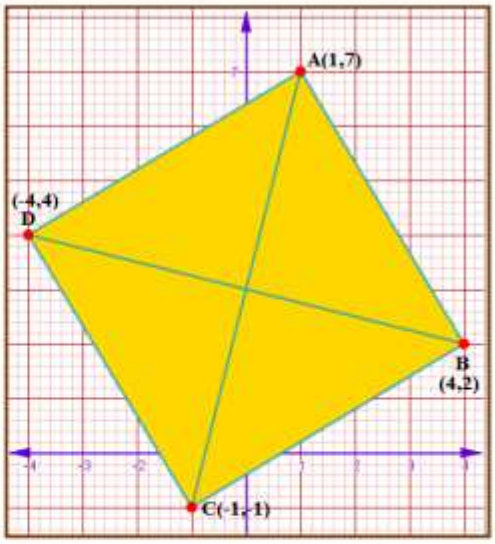
$AC = \sqrt{(-1-1)^2+(-1-7)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2+(-8)^2}$

$= \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

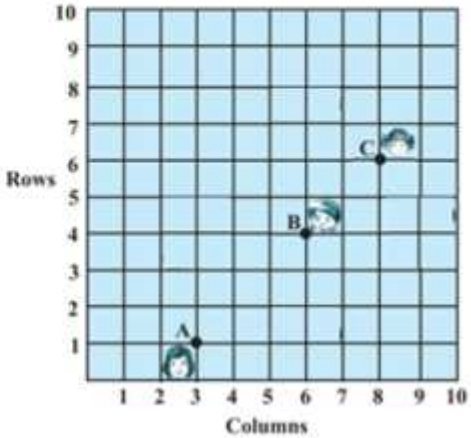
$BD = \sqrt{(-4-4)^2+(4-2)^2}$

$= \sqrt{(-8)^2+(2)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$



$AB = BC = CD = DA$ ಮತ್ತು $AC = BD$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯ ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಹಾಗೂ ಅದರ ಕರ್ಣಗಳಾದ AC ಮತ್ತು BD ಗಳು ಕೂಡಾ ಸಮ. ಆದ್ದರಿಂದ ABCD ಒಂದು ಚೌಕ.

ಉದಾಹರಣೆ 3:ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಡೆಸ್ಕುಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ 7.6 ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಅಶೀಮಾ, ಭಾರತಿ ಮತ್ತು ಕ್ಯಾಮೆಲಾ ಕ್ರಮವಾಗಿ A (3, 1), B (6, 4) ಮತ್ತು C (8, 6) ರಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿದ್ದಾರೆ. ಆ ಮೂರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿದ್ದಾರೆಂದು ನಿಮಗೆ ಅನಿಸುತ್ತದೆಯೆ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಕೊಡಿ.



$AB = \sqrt{(6-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{(3)^2+(3)^2}$

$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(8-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{(2)^2+(2)^2}$

$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(8-3)^2+(6-1)^2} = \sqrt{(5)^2+(5)^2}$

$= \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$

$AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಅವರು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿದ್ದಾರೆ.

ಪರಿಹಾರ:

1) ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) (2, 3), (4, 1) ii) (-5, 7), (-1, 3) iii) (a, b), (-a, -b)

i) $(x_1, y_1) = (2, 3)$, $(x_2, y_2) = (4, 1)$

x_1	y_1	x_2	y_2
2	3	4	1

ಸೂತ್ರ $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$d = \sqrt{(4-2)^2+(1-3)^2}$

$d = \sqrt{(2)^2+(-2)^2}$

$d = \sqrt{4+4} = \sqrt{2\times 4}$

$d = 2\sqrt{2}$ ಮೂಲಮಾನಗಳು

2) **(0, 0) ಮತ್ತು (36, 15)** ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಿಮಗೀಗ, ವಿಭಾಗ 7.2 ರಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾದ **A** ಮತ್ತು **B** ನಗರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆ?

$(x, y) = (36, 15)$

$d = \sqrt{x^2+y^2}$

$d = \sqrt{36^2+15^2}$

$d = \sqrt{1296+225} = \sqrt{1521}$

$\mathbf{d = 39}$ **ಮೂಲಮಾನಗಳು**

A ಮತ್ತು B ನಗರಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ನಗರ A ಯು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸುವುದಾದರೆ ನಗರ B ಯು (36,15) ರಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ನಗರಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 39 ಕಿ.ಮೀ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

3) **(1, 5), (2, 3) ಮತ್ತು (−2, −11)** ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವೇ ಎಂದು ನಿರ್ಣಯಿಸಿ.

A (1, 5), B (2, 3) ಮತ್ತು C (-2, -11)

$AB = \sqrt{(2-1)^2+(3-5)^2}$

$= \sqrt{(1)^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(-2-2)^2+(-11-3)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2+(-14)^2}$

$= \sqrt{16+196} = \sqrt{212}$

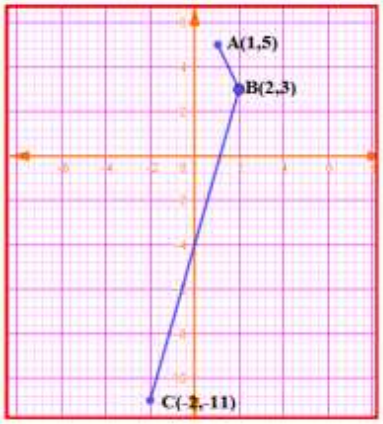
$AC = \sqrt{(-2-1)^2+(-11-5)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(-16)^2}$

$= \sqrt{9+256} = \sqrt{265}$

$AB + BC \neq AC$

∴ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.



4) **(5, −2), (6, 4) ಮತ್ತು (7, −2)** ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಸೂತ್ರ $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$PQ = \sqrt{(6-5)^2+(4-(-2))^2}$

$= \sqrt{(1)^2+(6)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$ (i)

$QR = \sqrt{(7-6)^2+(-2-4)^2}$

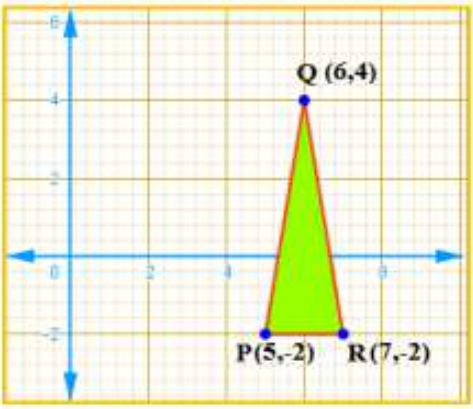
$= \sqrt{(1)^2+(-6)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$ (ii)

$PR = \sqrt{(7-5)^2+(-2-[-2])^2}$

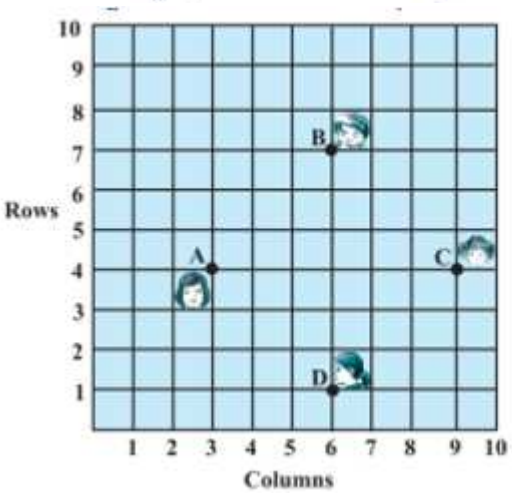
$= \sqrt{(2)^2+(0)^2} = \sqrt{4} = 2$ (iii)

(i), (ii), (iii) ⇒ PQ = QR, ತ್ರಿಭುಜದ 2 ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ

∴ PQR ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ



5) ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಮಂದಿ ಗೆಳತಿಯರು ಚಿತ್ರ 7.8 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ **A, B, C** ಮತ್ತು **D** ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿರುತ್ತಾರೆ. ಚಂಪಾ ಮತ್ತು ಚಮೇಲಿ ತರಗತಿಯೊಳಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತಾರೆ. ಕೆಲವು ನಿಮಿಷ ಅವರನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಚಂಪಾ ಚಮೇಲಿಯಲ್ಲಿ ಕೇಳುತ್ತಾಳೆ. "**ABCD** ಒಂದು ಚೌಕವೆಂದು ನಿನಗೆ ಅನಿಸುತ್ತಿಲ್ಲವೆ?" ಎಂದು. ಚಮೇಲಿ ಒಪ್ಪುವುದಿಲ್ಲ. ದೂರಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವರಿಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಯಾರು ಸರಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ನಾಲ್ಕು ಮಂದಿ ಗೆಳತಿಯರು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿರುವ ಸ್ಥಾನದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$A(3,4)$, $B(6,7)$, $C(9,4)$, $D(6,1)$

$AB = \sqrt{(6-3)^2+(7-4)^2} = \sqrt{(3)^2+(3)^2} = \sqrt{9+8} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (i)

$BC = \sqrt{(9-6)^2+(4-7)^2} = \sqrt{(3)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (ii)

$CD = \sqrt{(6-9)^2+(1-4)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (iii)

$DA = \sqrt{(6-3)^2+(1-4)^2} = \sqrt{(3)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (iv)

$AB = BC = CD = DA$

ಕರ್ಣ $AC = \sqrt{(9-3)^2+(4-4)^2} = \sqrt{(6)^2+(0)^2} = \sqrt{36} = 6$ (v)

ಕರ್ಣ $BD = \sqrt{(6-6])^2+(7-1)^2} = \sqrt{(0)^2+(6)^2} = \sqrt{36} = 6$ (vi)

$AC = BD$

ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ $AB = BC = CD = DA$, ಕರ್ಣಗಳು ಸಮ $AC = DB$

$\therefore$ ABCD ಒಂದು ಚೌಕವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಚಂಪಾ ಹೇಳಿದ್ದು ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

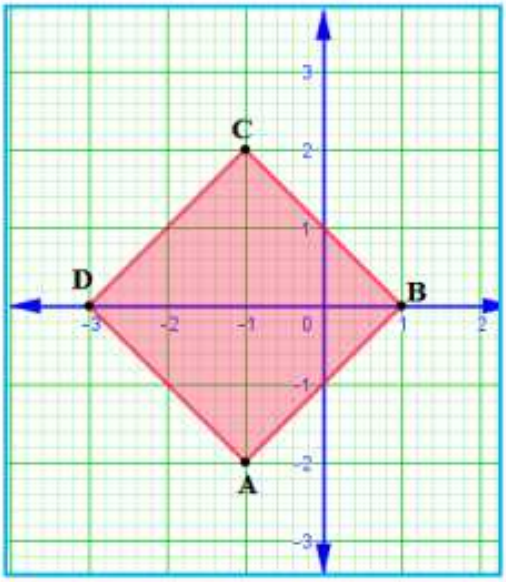
6) ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಉಂಟಾಗುವುದಾದರೆ, ಉಂಟಾದ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಧವನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿ ಮತ್ತು ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

i) (-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0)

ii) (-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)

iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

i) $A(-1,-2)$, $B(1,0)$, $C(-1,2)$, $D(-3,0)$



$AB = \sqrt{(1-(-1))^2+(0-(-2))^2}$

$= \sqrt{(1+1)^2+(0+2)^2} = \sqrt{(2)^2+(2)^2}$

$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(-1-1)^2+(2-0)^2} = \sqrt{(-2)^2+(2)^2}$

$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{(-3-(-1))^2+(0-2)^2}$

$= \sqrt{(-3+1)^2+(-2)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2}$

$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$

$DA = \sqrt{(-3-(-1))^2+(0-(-2))^2}$

$= \sqrt{(-3+1)^2+(2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2}$

$= 2\sqrt{2}$

$AB = BC = CD = DA$

ಕರ್ಣ $AC = \sqrt{(-1-(-1))^2+(2-(-2))^2}$

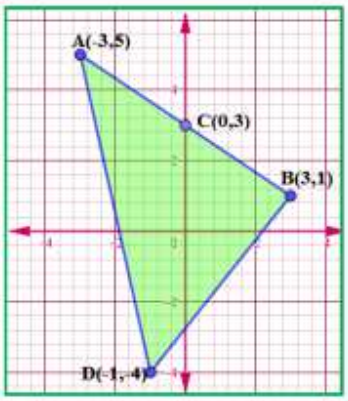
$= \sqrt{(-1+1)^2+(2+2)^2} = \sqrt{(0)^2+(4)^2} = \sqrt{16} = 4$

ಕರ್ಣ $BD = \sqrt{(-3-1)^2+(0-0)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2+(0)^2} = \sqrt{16} = 4$

$AC = BD$ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ $AB = BC = CD = DA$, ಕರ್ಣಗಳು ಸಮ $AC = DB$

$\therefore$ ABCD ಒಂದು ಚೌಕವಾಗಿದೆ.



ii) A(-3, 5), B(3, 1), C(0, 3), D(-1, -4)

$AB = \sqrt{\left(3-(-3)\right)^2+\left(1-(-3)\right)^2}$

$= \sqrt{(3+3)^2+(1+3)^2} = \sqrt{(6)^2+(4)^2}$

$= \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BC = \sqrt{(0-3)^2+(3-1)^2} = \sqrt{(-3)^2+(2)^2}$

$= \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$CD = \sqrt{(-1-0)^2+(-4-3)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2+(-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$

$= \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$

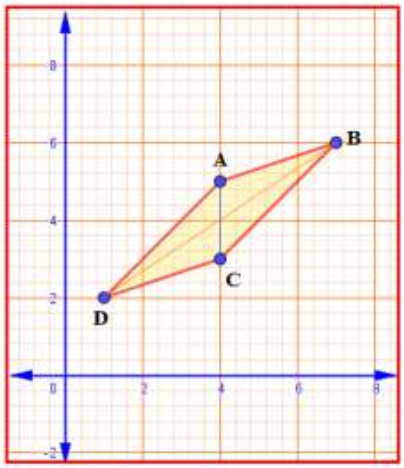
$DA = \sqrt{\left(-3-(-1)\right)^2+(-4-5)^2}$

$= \sqrt{(-3+1)^2+(-9)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-9)^2}$

$= \sqrt{4+81} = \sqrt{85}$

$AB \neq BC \neq CD \neq DA$

ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಕೇವಲ ಸಾಮಾನ್ಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.



iii) A(4, 5), B(7, 6), C(4, 3), D(1, 2)

ಸೂತ್ರ $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$AB = \sqrt{(7-4)^2+(6-5)^2}$

$= \sqrt{(3)^2+(1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$BC = \sqrt{(4-7)^2+(3-6)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9}$

$= \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{(1-4)^2+(2-3)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$DA = \sqrt{(1-4)^2+(2-5)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$= \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$

$AB = CD$, $BC = DA$

$AC = \sqrt{(4-4)^2+(3-5)^2} = \sqrt{(0)^2+(-2)^2} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$

$BD = \sqrt{(1-7)^2+(2-6)^2} = \sqrt{(-6)^2+(-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = \sqrt{4\times 13} = 2\sqrt{13}$

$AC \neq DB$

ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ $AB = CD$, & $BC = DA$

ಕರ್ಣಗಳು ಸಮವಲ್ಲ $AC \neq DB$

$\therefore$ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

7) (2, −5) ಮತ್ತು (−2, 9) ರಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ X – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

X - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವು $(x, 0)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

P (x, 0) ಯು A(2, -5) ಮತ್ತು B(-2, 9)

ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$AP = BP$

$(x-2)^2+(0-(-5))^2 = (x-(-2))^2+(0-9)^2$

$(x-2)^2+5^2 = (x+2)^2+(-9)^2$

$x^2+2^2-2(x)(2)+25 = x^2+2^2+2(x)(2)+81$

$-4x+25 = 4x+81$

$-4x-4x = 81-25$

$-8x = 56$

$x = \frac{56}{-8} = -7$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಿಂದು $(-7, 0)$ ತಾಳೆ ನೋಡುವಿಕೆ.

$AP = \sqrt{(-7-2)^2+(0-(-5))^2} = \sqrt{(-9)^2+(5)^2} = \sqrt{81+25} = \sqrt{106}$

$BP = \sqrt{(-2-(-7))^2+(9-0)^2} = \sqrt{(-2+7)^2+(9)^2} = \sqrt{(5)^2+(9)^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$

8) **P (2, -3) ಮತ್ತು Q (10, y) ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 10 ಮಾನಗಳಾದರೆ, y ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

$(x_1, y_1) = (2, -3)$, $(x_2, y_2) = (10, y)$, $d = 10$

x_1	y_1	x_2	y_2
2	-3	10	y

ಸೂತ್ರ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$10 = \sqrt{(10-2)^2 + (y-(-3))^2}$

$10 = \sqrt{(8)^2 + (y+3)^2}$

$10^2 = 64 + (y+3)^2 +$

$100 - 64 = (y+3)^2$

$(y+3)^2 = 36$

$y + 3 = \pm\sqrt{36}$

$y + 3 = \pm 6$

$y = 6 - 3 = 3$ or $x = -6 - 3 = -9$

9) **Q (0, 1) ಬಿಂದುವು P (5, -3) ಮತ್ತು R (x, 6) ರಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. QR ಮತ್ತು PR ದೂರಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

Q (0, 1) ಬಿಂದುವು P (5, -3) ಮತ್ತು R (x, 6) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ.

PQ = QR ಆದ್ದರಿಂದ $PQ^2 = PR^2$

$PQ = \sqrt{(5-0)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{(5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

$QR = \sqrt{(x-0)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{(x)^2 + (5)^2} = \sqrt{x^2+25}$

$PQ^2 = PR^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+25}\right)^2 = \left(\sqrt{41}\right)^2$

$x^2 + 25 = 41$

$x^2 = 41 - 25$

$x^2 = 16$

$x == \pm\sqrt{16}$

$x = \pm 4$

R ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (4,6) ಅಥವಾ (−4,6)

R ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (4,6) ಆದಾಗ

$QR = \sqrt{(4-0)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{(4)^2 + (5)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

$PR = \sqrt{(4-5)^2 + (6-(-3))^2} = \sqrt{(-1)^2 + (6+3)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}$

R ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (−4,6) ಆದಾಗ

$QR = \sqrt{(-4-0)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

$PR = \sqrt{(-4-5)^2 + (6-(-3))^2} = \sqrt{(-9)^2 + (6+3)^2} = \sqrt{81+81} = \sqrt{81 \times 2} = 9\sqrt{2}$

10) **(x, y) ಬಿಂದುವು (3, 6) ಮತ್ತು (-3, 4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

P (x, y) ಬಿಂದುವು A (3, 6) ಮತ್ತು B (-3, 4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ.

PA = PB ಆದ್ದರಿಂದ $PA^2 = PB^2$

$PA = \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2}$

$PB = \sqrt{(x-(-3))^2 + (y-4)^2}$

$AP^2 = BP^2 \Rightarrow \left(\sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-(-3))^2 + (y-4)^2}\right)^2$

$(x-3)^2 + (y-6)^2 = (x+3)^2 + (y-4)^2$

$x^2 + 3^2 - 2(x)(3) + y^2 + 6^2 - 2(y)(6) = x^2 + 3^2 + 2(x)(3) + y^2 + 4^2 - 2(y)(4)$

$x^2 + 9 - 6x + y^2 + 36 - 12y = x^2 + 9 + 6x + y^2 + 16 - 8y$

$x^2 - x^2 - 6x - 6x + y^2 - y^2 - 12y + 8y = 25 - 45$

$-12x - 4y = -20 \quad \div -4$

$3x + y - 5 = 0$ ಇದು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಬಂಧ.

$3x + y - 5 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ.

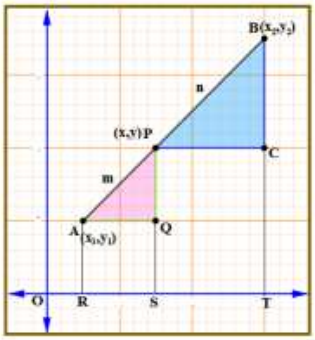
A ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವು AB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ

ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರ

$A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು

P ಬಿಂದುವು **m:n** ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ **P** ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1 + m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1 + m_2}\right)$$



P ಬಿಂದು **AB** ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದಾಗ **m: n = 1: 1** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

P ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$P(x, y) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}\ ,\ \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

ಉದಾಹರಣೆ 6: (4, -3) ಮತ್ತು (8, 5) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ 3 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$(x_1, y_1) = (4, -3),\ \ (x_2, y_2) = (8,5),\ m_1 : m_2 = 3 : 1$

x_1	y_1	x_2	y_2
4	-3	8	5

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2} = \frac{3(8)+1(4)}{3+1} = \frac{24+4}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

$$y = \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2} = \frac{3(5)+1(-3)}{3+1} = \frac{15-3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಿಂದು (7,3)

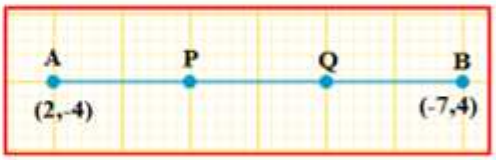
ಉದಾಹರಣೆ 8: A (2, -2) ಮತ್ತು B (-7, 4) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರೈಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳ (ಅಂದರೆ, ಮೂರು ಸಮ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಬಿಂದುಗಳು) ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

P ಮತ್ತು **Q** ಗಳು **AB** ಯ ತ್ರೈಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ AP = PQ = QB

ಆದ್ದರಿಂದ **P** ಯು **AB** ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ 1 : 2 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೂಲಕ **P** ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$A(x_1, y_1) = (2, -2)\ , B(x_2, y_2) = (-7, 4)$

$m_1 = 1,\ \ m_2 = 2$



$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$= \left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2},\ \ \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right)$$

$$= \left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{-3}{3},\ \frac{0}{3}\right)$$

$$= (-1, 0)$$

Q ಯು **AB** ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ 2 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೂಲಕ **Q** ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$A(x_1, y_1) = (2, -2)\ , B(x_2, y_2) = (-7, 4)$

$m_1 = 2,\ \ m_2 = 1$

$$Q(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$= \left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1},\ \ \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right)$$

$$= \left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{-12}{3},\ \ \frac{6}{3}\right)$$

$$= (-4,\ \ 2)$$

ಆದ್ದರಿಂದ **A** ಮತ್ತು **B** ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರೈಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (−1, 0) ಮತ್ತು (−4, 2)

ಪರಿಹಾರ

1) (−1, 7) ಮತ್ತು (4, −3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 2 : 3 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x_1	y_1	x_2	y_2
-1	7	4	-3

$m_1 : m_2 = 2:3 \quad (x_1, y_1) = (-1, 7), \ (x_2, y_2) = (4, -3)$,

$(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}, \ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$

$= \left(\frac{2(4)+3(-1)}{2+3}, \frac{2(-3)+3(7)}{2+3}\right)$

$= \left(\frac{8-3}{5}, \frac{-6+21}{5}\right)$

$= \left(\frac{5}{5}, \ \frac{15}{5}\right)$

$(x, y) = (1, \ 3)$

(-1, 7) ಮತ್ತು (4, -3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 2 : 3 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (1,3)

2) (4, −1) ಮತ್ತು (−2, −3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರೈಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x_1	y_1	x_2	y_2
-1	7	4	-3

P ಮತ್ತು Q ಗಳು AB ಯ ತ್ರೈಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ AP = PQ = QB

ಆದ್ದರಿಂದ P ಯು AB ಯನ್ನು ಅಂತರಿಕವಾಗಿ 1 : 2 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೂಲಕ P ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$A(x_1, y_1) = (4, -1), \ B(x_2, y_2) = (-2, -3)$,

$m_1 = 1, \ m_2 = 2$

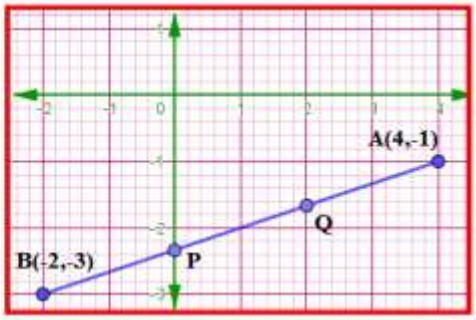
$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}, \ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$

$= \left(\frac{1(-2)+2(4)}{1+2}, \ \frac{1(-3)+2(-1)}{1+2}\right)$

$= \left(\frac{-2+8}{3}, \frac{-3-2}{3}\right)$

$= \left(\frac{6}{3}, \ \frac{-5}{3}\right)$

$= \left(2, \ \frac{-5}{3}\right)$



Q ಯು AB ಯನ್ನು ಅಂತರಿಕವಾಗಿ 2 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೂಲಕ Q ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$A(x_1, y_1) = (4, -1), \quad B(x_2, y_2) = (-2, -3) \qquad m_1 = 2, \ m_2 = 1$

$Q(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}, \ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$

$= \left(\frac{2(-2)+1(4)}{2+1}, \ \frac{2(-3)+1(-1)}{2+1}\right)$

$= \left(\frac{-4+4}{3}, \frac{-6-1}{3}\right)$

$= \left(\frac{0}{3}, \ \frac{-7}{3}\right)$

$= \left(0, \ \frac{-7}{3}\right)$

4) (−3, 10) ಮತ್ತು (6, −8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು (−1, 6) ರಿಂದ ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$P(x, y) = (-1, 6)$, $A(x_1, y_1) = (-3, 10)$, $B(x_2, y_2) = (6, -8)$, $m_1 = ?$, $m_2 = ?$

x_1	y_1	x_2	y_2
-3	10	6	-8

$(x, y) = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right)$

$(-1, 6) = \left(\frac{m_1 6) + m_2 (-3)}{m_1 + m_2}, \frac{m_1(-8) + m_2 (10)}{m_1 + m_2}\right)$

$-1 = \frac{6m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2}$ ಅಥವಾ $6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$

$-m_1 - m_2 = 6m_1 - 3m_2$

$-m_1 - 6m_1 = -3m_2 + m_2$

$-7m_1 = -2m_2$

$\frac{m_1}{m_1} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

$m_1 : m_2 = 2 : 7$ ಈ ಅನುಪಾತವು y − ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಕ್ಕೂ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

$\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8(2) + 10(7)}{2+7} = \frac{-16+70}{9} = \frac{54}{9} = 6$

ಆದ್ದರಿಂದ (−4,6) ಬಿಂದುವು A (-6, 10) ಮತ್ತು B (3, -8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 2:7 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

5) A (1, -5) ಮತ್ತು B (-4, 5) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು x − ಅಕ್ಷದಿಂದ ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x − ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (x, 0) ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅನುಪಾತವು k : 1 ಆಗಿರಲಿ.

$A(x_1, y_1) = (1, -5)$, $B(x_2, y_2) = (-4, 5)$ $m_1 = k$, $m_2 = 1$

$(x, y) = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right)$

$(x, 0) = \left(\frac{k(-4) + 1(1)}{k+1}, \frac{k(5) + 1(-5)}{k+1}\right)$

$0 = \frac{5k - 5}{k+1}$

$5k - 5 = 0 \Rightarrow 5k = 5$

$k = 1$ ಅನುಪಾತವು 1:1

$x = \frac{1(-4) + 1(1)}{1+1} = \frac{-4+1}{2} = \frac{-3}{2}$

∴ ಭೇದಕ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

4) (−3, 10) ಮತ್ತು (6, −8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು (−1, 6) ರಿಂದ ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$P(x,y) = (-1,6)$, $A(x_1, y_1) = (-3,10)$, $B(x_2, y_2) = (6,-8)$, $m_1 = ?$, $m_2 = ?$

x_1	y_1	x_2	y_2
-3	10	6	-8

$(x,y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$

$(-1,6) = \left(\frac{m_1 6) + m_2\ (-3)}{m_1+m_2}, \frac{m_1(-8) + m_2\ (10)}{m_1+m_2}\right)$

$-1 = \frac{6m_1 - 3\,m_2}{m_1+m_2}$ ಅಥವಾ $6 = \frac{-8m_1 + 10\,m_2}{m_1+m_2}$

$-m_1 - m_2 = 6m_1 - 3\,m_2$

$-m_1 - 6m_1 = -3\,m_2 + m_2$

$-7m_1 = -2m_2$

$\frac{m_1}{m_1} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

$m_1 : m_2 = 2:7$ ಈ ಅನುಪಾತವು y − ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಕ್ಕೂ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

$\frac{-8m_1 + 10\,m_2}{m_1+m_2} = \frac{-8(2)+10\,(7)}{2+7} = \frac{-16+70}{9} = \frac{54}{9} = 6$

ಆದ್ದರಿಂದ (−4,6) ಬಿಂದುವು A (-6, 10) ಮತ್ತು B (3, -8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 2:7 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

5) A (1, -5) ಮತ್ತು B (-4, 5) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು x − ಅಕ್ಷದಿಂದ ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x − ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (x, 0) ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅನುಪಾತವು k : 1 ಆಗಿರಲಿ.

$A(x_1, y_1) = (1,-5)$, $B(x_2, y_2) = (-4,5)$ $m_1 = k$, $m_2 = 1$

$(x,y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$

$(x,0) = \left(\frac{k(-4) + 1(1)}{k+1}, \frac{k(5) + 1\ (-5)}{k+1}\right)$

$0 = \frac{5k-5}{k+1}$

$5k - 5 = 0 \Rightarrow 5k = 5$

$k = 1$ ಅನುಪಾತವು 1:1

$x = \frac{1(-4) + 1(1)}{1+1} = \frac{-4+1}{2} = \frac{-3}{2}$

∴ ಭೇದಕ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

6) (1, 2), (4, y), (x, 6) ಮತ್ತು (3, 5) ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅನುಕ್ರಮ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು = BD ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $= \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$

$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{6+2}{2}\right) = \left(\frac{3+4}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$

$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{8}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$

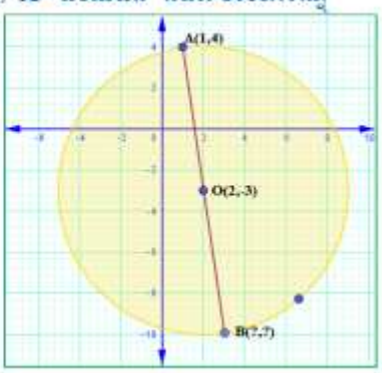
$\frac{x+1}{2} = \frac{7}{2}$, $\frac{5+y}{2} = \frac{8}{2}$

$x + 1 = 7$, $5 + y = 8$

$x = 7 - 1$, $y = 8 - 5$

$x = 6$, $y = 3$

7) AB ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ (2, -3) ಮತ್ತು B ಯು (1, 4) ಆದರೆ, A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವು ವ್ಯಾಸದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore (x,y) = (2,-3)$, $A(x_1, y_1) = ?$, $B(x_2, y_2) = (1,4)$

$(x,y) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$

$(2,-3) = \left(\frac{1 + x_1}{2}, \frac{4 + y_1}{2}\right)$

$\frac{1 + x_1}{2} = 2$, $\frac{4 + y_1}{2} = -3$

$1 + x_1 = 4$, $4 + y_1 = -6$

$x_1 = 4 - 1$, $y_1 = -6 - 4$

$x_1 = 3$, $y_1 = -10$

∴ A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(3,-10)$

8) A ಮತ್ತು B ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (-2, -2) ಮತ್ತು (2, -4) ಆಗಿದ್ದು $AP = \frac{3}{7} AB$ ಆಗುವಂತೆ ರೇಖಾಖಂಡ AB ಯ ಮೇಲೆ ಇರುವ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$AP : PB = 3 : 4$

P ಯು AB ಯನ್ನು 3:4 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

x_1	y_1	x_2	y_2
-2	-2	2	-4

$$Q(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$= \left(\frac{3(2)+4(-2)}{3+4},\ \frac{3(-4)+4(-2)}{3+4}\right)$$

$$= \left(\frac{6-8}{7}, \frac{-12-8}{7}\right)$$

$$= \left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7}\right)$$

9) A (-2, 2) ಮತ್ತು B (2, 8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 4 ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

X ಬಿಂದುವು A B ಯನ್ನು 1:3 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿರುತ್ತದೆ.

X ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

x_1	y_1	x_2	y_2
-2	2	2	8

$$(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$= \left(\frac{1(2)+3(-2)}{1+3},\ \frac{1(8)+3(2)}{1+3}\right)$$

$$= \left(\frac{2-6}{4}, \frac{8+6}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{-4}{4},\ \frac{14}{4}\right)$$

$$= \left(-1,\ \frac{7}{2}\right)$$

Y ಬಿಂದುವು A B ಯನ್ನು ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

Y ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$(x, y) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}\ ,\ \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2-2}{2},\ \frac{8+2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{0}{2}, \frac{10}{2}\right)$$

$$= (0,\ 5)$$

Z ಬಿಂದುವು A B ಯನ್ನು 3:1 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿರುತ್ತದೆ.

Z ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1+m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1+m_2}\right)$$

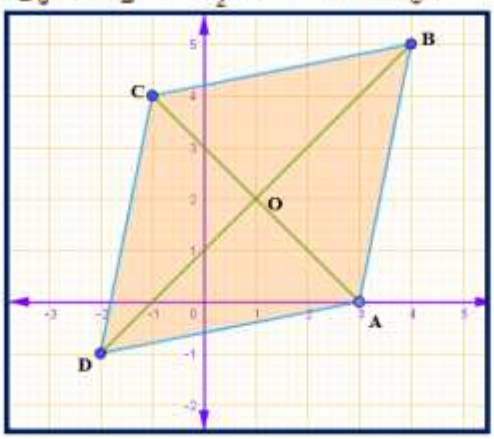
$$= \left(\frac{3(2)+1(-2)}{3+1},\ \frac{3(8)+1(2)}{3+1}\right)$$

$$= \left(\frac{6-2}{4}, \frac{24+2}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{4},\ \frac{26}{4}\right)$$

$$= \left(1,\ \frac{13}{2}\right)$$

10) ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಅನುಕ್ರಮ ಶೃಂಗಗಳು (3, 0), (4, 5), (−1, 4) ಮತ್ತು (−2,−1) ಆದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. [ಸೂಚನೆ: ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2}$ (ಕರ್ಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ)]



ಕರ್ಣ $AC = \sqrt{(-1-3)^2+(4-0)^2} = \sqrt{(-4)^2+(4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$

ಕರ್ಣ $BD = \sqrt{(-2-4)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{(-6)^2+(-6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$

ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = \frac{24(\sqrt{2})^2}{2} = 12(2) = 24$ ಚದರ ಮಾನಗಳು

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times$ ಪಾದ $\times$ ಎತ್ತರ

ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರ

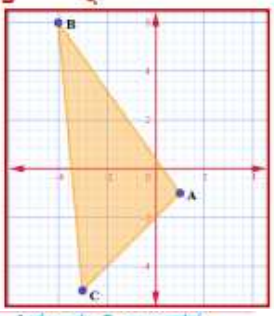
ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. ಇಲ್ಲಿ $s = \frac{a+b+c}{2}$

ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ದೂರ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ, ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನಂತರ ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ ಈ ವಿಧಾನವು ಕಷ್ಟಕರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\text{ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

ಉದಾಹರಣೆ 11: ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳು (1, -1), (-4, 6) ಮತ್ತು (-3, -5) ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

A (1, -1), B(-4, 6) ಮತ್ತು C (-3, -5)



ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[1(6-(-5)) + (-4)(-5-(-1)) + (-3)(-1-6)]$

$= \frac{1}{2}[1(6+5) + (-4)(-5+1) + (-3)(-7)]$

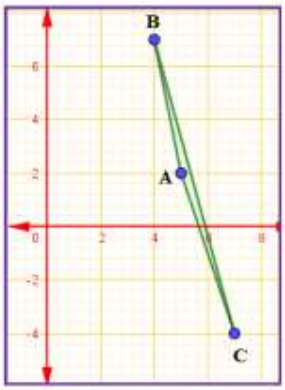
$= \frac{1}{2}[11 + 16 + 21]$

$= \frac{1}{2}(48) = 24$

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 24$ ಚದರ ಮಾನಗಳು

ಉದಾಹರಣೆ 12: A (5, 2), B (4, 7) ಮತ್ತು C (7, -4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

A (5, 2), B (4, 7) ಮತ್ತು C (7, -4)



ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[5(7-(-4)) + 4(-4-2) + 7(2-7)]$

$= \frac{1}{2}[5(7+4) + 4(-6) + 7(-5)]$

$= \frac{1}{2}[55 - 24 - 35]$

$= \frac{1}{2}(55 - 59)$

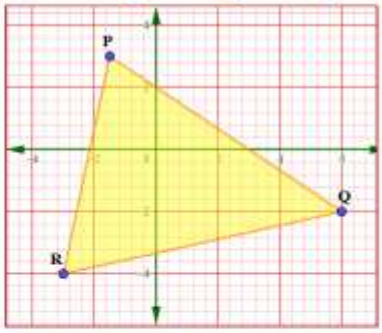
$= \frac{1}{2}(-4) = -2$

ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ನಾವು -2 ರ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಂದರೆ 2 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 2 ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 13: P (-1.5, 3), Q (6, -2) ಮತ್ತು R (-3, 4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ



$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[(-1.5)(-2-4) + 6(4-3) + (-3)(3-(-2))]$

$= \frac{1}{2}[(-1.5)(-6) + 6(1) + (-3)(3+2)]$

$= \frac{1}{2}[9 + 6 - 15] = \frac{1}{2}(15 - 15)$

$= \frac{1}{2}(0) = 0$

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 0 ಚದರ ಮಾನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವಾಗಿರಲೇಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 14: A (2, 3), B (4, k) ಮತ್ತು C (6, -3) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದರೆ k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 0 ಯಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಅಂದರೆ

$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$

$\frac{1}{2}[2(k-(-3)) + 4(-3-3) + 6(3-k)] = 0$

$\frac{1}{2}[2(k+3)+4(-6)+6(3-k)]=0$

$\frac{1}{2}[2k+6-24+18-6k]=0$

$\frac{1}{2}(-4k)=0$

$k=0$

ಪರಿಶೀಲನೆ :

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $=\frac{1}{2}[2(0-(-3))+4(-3-3)+6(3-0)]=0$

$=\frac{1}{2}[2(3)+4(-6)+6(3)]$

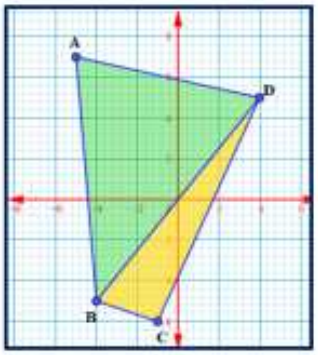
$=\frac{1}{2}[6-24+18]$

$=\frac{1}{2}(0)=0$

ಉದಾಹರಣೆ 15: A (-5, 7), B (-4, -5) C (-1, -6) ಮತ್ತು D (4, 5) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಾದರೆ, ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

B ಯನ್ನು D ಗೆ ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ, ನಿಮಗೆ ABD ಮತ್ತು BCD ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

$\therefore$ ABD ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$



$=\frac{1}{2}[(-5)(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7-(-5))]$

$=\frac{1}{2}[(-5)(-10)+(-4)(-2)+4(7+5)]$

$=\frac{1}{2}[50+8+48]$

$=\frac{1}{2}(106)$

$=53$ ಚದರಮಾನಗಳು

$\therefore$ BCD ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$

$=\frac{1}{2}[(-4)(-6-5)+(-1)(5-(-5))+4(-5-(-6))]$

$=\frac{1}{2}[(-4)(-11)+(-1)(5+5)+4(-5+6)]$

$=\frac{1}{2}[44-10+4]$

$=\frac{1}{2}(38)$

$=19$ ಚದರಮಾನಗಳು

ಆದ್ದರಿಂದ, ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 53 + 19 = 72 ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

1) ಶೃಂಗಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ
   i) (2, 3), (-1, 0), (2, -4) ii) (-5, -1), (3, -5) (5, 2)
2) ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ, ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದರೆ k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   i) (7, -2), (5, 1), (3, k) ii) (8, 1), (k, -4) (2, -5)
3) (0, -1), (2, 1) ಮತ್ತು (0, 3) ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಅನುಕ್ರಮ ಶೃಂಗಗಳು (-4, -2), (-3, -5), (3, -2) ಮತ್ತು (2, 3) ಆದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ
5) IX ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ (ಅಧ್ಯಾಯ 9, ಉದಾಹರಣೆ 3) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು ಅದನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆಂದು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಇದನ್ನು A(4,-6), B (3, -2) ಮತ್ತು C (5, 2) ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಾಗಿರುವ ΔABC ಯಲ್ಲಿ ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಪರಿಹಾರ

1) ಶೃಂಗಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

i) (2, 3), (-1, 0), (2, -4) **ii) (-5, -1), (3, -5) (5, 2)**

i) (2, 3), (-1, 0), (2, -4) ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[2(0 - (-4)) + (-1)(-4 - 3) + 2(3 - 0)]$

$= \frac{1}{2}[2(4) + (-1)(-7) + 2(3)]$

$= \frac{1}{2}[8 + 7 + 6] = \frac{1}{2}(21)$

$= \frac{21}{2}$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ii) (-5, -1), (3, -5) (5, 2) ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[(-5)(-5 - 2) + 3(2 - (-1)) + 5(-1 - (-5))]$

$= \frac{1}{2}[(-5)(-7) + 3(2 + 1) + 5(-1 + 5)]$

$= \frac{1}{2}[35 + 9 + 20]$

$= \frac{1}{2}(64)$

$= 32$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

2) ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ, ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದರೆ **k** ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) (7, -2), (5, 1), (3, k) **ii) (8, 1), (k, -4) (2, -5)**

i) (7, -2), (5, 1), (3, k)

ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 0 ಯಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಅಂದರೆ

$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$

$\frac{1}{2}[7(1 - k) + 5(k - (-2)) + 3(-2 - 1)] = 0$

$\frac{1}{2}[7(1 - k) + 5(k + 2) + 3(-3)] = 0$

$\frac{1}{2}[7 - 7k + 5k + 10 - 9] = 0$

$\frac{1}{2}(-2k + 8) = 0$

$-2k = -8$

$k = \frac{-8}{-2} = 4$

ii) (8, 1), (k, -4) (2, -5)

ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 0 ಯಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಅಂದರೆ

$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$

$\frac{1}{2}[8(-4 - (-5)) + k(-5 - 1) + 2(1 - (-4))] = 0$

$\frac{1}{2}[8(-4 + 5) + k(-6) + 2(1 + 4)] = 0$

$\frac{1}{2}[8(1) + k(-6) + 2(5)] = 0$

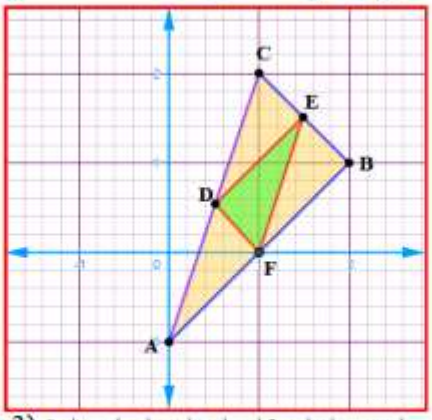
$\frac{1}{2}[8 - 6k + 10] = 0$

$\frac{1}{2}(-6k + 18) = 0$

$-6k = -18$

$k = \frac{-18}{-6} = 3$

3) **(0, -1), (2, 1) ಮತ್ತು (0, 3) ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**



A(0, -1), B(2, 1) ಮತ್ತು C(0, 3) ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಾದಾಗ

AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು D ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$(x, y) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right) = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}\right) = (1, 0)$

AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು E ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$(x, y) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right) = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{2}{2}\right) = (0, 1)$

BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು F ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$(x, y) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right) = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) = (1, 2)$

D(1, 0), E(0, 1) ಮತ್ತು F(1, 2) ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ΔDEF ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[1(1-2) + 0(2-0) + 1(0-1)]$

$= \frac{1}{2}[1(-1) + 0 + 1(-1)]$

$= \frac{1}{2}[-1 - 1]$

$= \frac{1}{2}(-2)$

$= -1$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ನಾವು –1 ರ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಂದರೆ 1 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 1 ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[0(1-3) + 2(3-(-1)) + 0(-1-1)]$

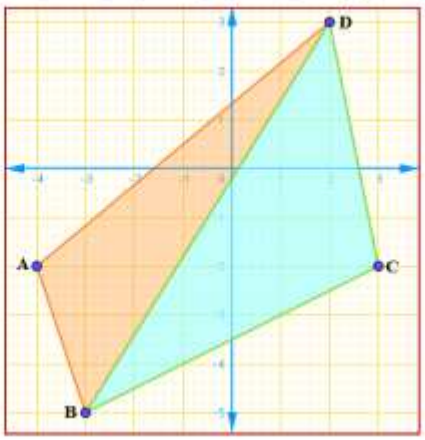
$= \frac{1}{2}[0 + 8 + 0]$

$= \frac{1}{2}(8)$

$= 4$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ $= 4:1$

4) **ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಅನುಕ್ರಮ ಶೃಂಗಗಳು (-4, -2), (-3, -5), (3, -2) ಮತ್ತು (2, 3) ಆದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ**



A(-4, -2), B(-3, -5), C(3, -2) ಮತ್ತು D(2, 3)

B ಯನ್ನು D ಗೆ ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ, ABD ಮತ್ತು BCD ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

$\therefore$ ABD ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[(-4)(-5-3) + (-3)(3-(-2)) + 2(-2-(-5))]$

$= \frac{1}{2}[(-4)(-8) + (-3)(3+2) + 2(-2+5)]$

$= \frac{1}{2}[32 - 15 + 6]$

$= \frac{1}{2}(23)$

$= \frac{23}{2}$ ಚದರಮಾನಗಳು

$\therefore$ BCD ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[(-3)(-2-3) + 3(3-(-5)) + 2(-5-(-2))]$

$= \frac{1}{2}[(-3)(-5) + 3(3+5) + 2(-5+2)]$

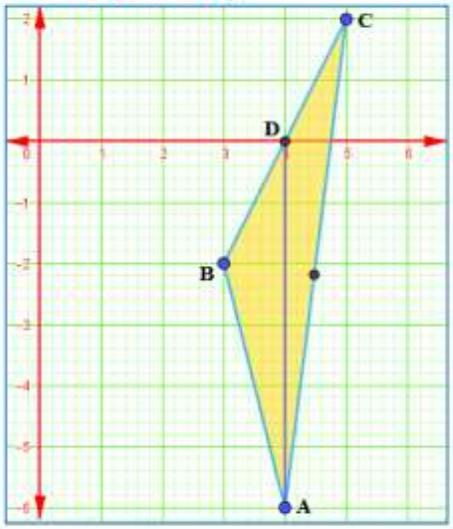
$= \frac{1}{2}[15 + 24 - 6]$

$= \frac{1}{2}(33)$

$= \frac{33}{2}$ ಚದರಮಾನಗಳು

ಆದ್ದರಿಂದ, ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{23}{2} + \frac{33}{2} = \frac{56}{2} = 28$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

5) **IX ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ (ಅಧ್ಯಾಯ 9, ಉದಾಹರಣೆ 3) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು ಅದನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆಂದು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಇದನ್ನು A(4,-6), B (3, -2) ಮತ್ತು C (5, 2) ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಾಗಿರುವ ΔABC ಯಲ್ಲಿ ತಾಳೆ ನೋಡಿ.**



BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು D ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right) = \left(\frac{5+3}{2}, \frac{2-2}{2}\right)$

$= \left(\frac{8}{2}, \frac{0}{2}\right) = (\mathbf{4}, \mathbf{0})$

ΔABD ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[4(-2-0) + 3(0-(-6)) + 4(-6-(-2))]$

$= \frac{1}{2}[4(-2) + 3(6) + 4(-6+2)]$

$= \frac{1}{2}[-8 + 18 - 16]$

$= \frac{1}{2}(18 - 24)$

$= \frac{1}{2}(-6) = -3$ ಚದರಮಾನಗಳು

ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ನಾವು −3 ರ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಂದರೆ 3 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 3 ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ΔADC ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[4(0-2) + 4(2-(-6)) + 5(-6-0)]$

$= \frac{1}{2}[4(-2) + 4(2+6) + 5(-6)]$

$= \frac{1}{2}[-8 + 32 - 30]$

$= \frac{1}{2}(-6) = -3$ ಚದರಮಾನಗಳು

ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ನಾವು −3 ರ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಂದರೆ 3 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 3 ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು ಅದನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಸಾರಾಂಶ

1. ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
2. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಇರುವ ದೂರ $d = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರ : $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು P ಬಿಂದುವು $m:n$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು
   $P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2\ x_1}{m_1 + m_2}\ ,\ \frac{m_1y_2 + m_2\ y_1}{m_1 + m_2}\right)$
4. P ಬಿಂದು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದಾಗ $m:n = 1:1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
   P ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $P(x, y) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}\ ,\ \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$
5. ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

8 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯು, ಅದರ ಹೆಸರೇ ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭಾಗಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ್ದಾಗಿದೆ. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ,

ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ b ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ r ಎಂಬುದು, ಯಾವಾಗಲೂ ಭಾಜಕ b ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

8.2 ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯ:

ಪ್ರಮೇಯ 8.1

(ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯ): ದತ್ತ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದ a ಮತ್ತು b ಗಳಿಗೆ, $a = bq + r$ ಗೆ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ q ಮತ್ತು r ಎಂಬ ಎರಡು ಅನನ್ಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇಲ್ಲಿ $0 \le r < b$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಾಥಮಿಕವಾಗಿ ಬಳಸುವ, ಈಗಾಗಲೇ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಮೂಲಭೂತ ಹೇಳಿಕೆಯೇ ಅನುಪ್ರಮೇಯ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 4052 ಮತ್ತು 12576ರ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4052	12576	3
	12156	
	420	

12576 = 4052 x 3 + 420

420	4052	9
	3780	
	272	

4052 = 420 x 9 + 272

272	420	1
	272	
	148	

420 = 272 x 1 + 148

148	272	1
	148	
	124	

272 = 148 x 1 + 124

124	148	1
	124	
	24	

148 = 124 x 1 + 24

24	124	5
	120	
	4	

124 = 24 x 5 + 4

4	24	6
	24	
	0	

24 = 4 x 6 + 0

ಆದ್ದರಿಂದ, 4052 ಮತ್ತು 12576ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. 4

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಒಬ್ಬ ಸಿಹಿತಿಂಡಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ಬಳಿ 420 ಕಾಜು ಬರ್ಫಿಗಳು ಮತ್ತು 130 ಬಾದಾಮಿ ಬರ್ಫಿಗಳು ಇವೆ. ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬರ್ಫಿಗಳಿರುವಂತೆ ಹಾಗೂ ತಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಅವು ಕನಿಷ್ಠ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸುವಂತೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದರಂತೆ ಪೇರಿಸಿಡಲು ಆಕೆಯು ಬಯಸುತ್ತಾಳೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ, ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬೇಕಾದ ಗರಿಷ್ಠ ಬರ್ಫಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

$420 = 130 \times 3 + 30$

$130 = 30 \times 4 + 10$

$30 = 10 \times 3 + 0$

ಹೀಗೆ, 420 ಮತ್ತು 130ರ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವು 10 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಿಹಿತಿಂಡಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಎರಡೂ ರೀತಿಯ ಬರ್ಫಿಗಳ 10 ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

ಪರಿಹಾರ

1. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 135 ಮತ್ತು 225 (ii) 196 ಮತ್ತು 38220 (iii) 867 ಮತ್ತು 255

(i) 135 ಮತ್ತು 225

135	225	1
	135	
	90	
90	135	1
	90	
	45	
45	90	2
	90	
	0	

$225 = 135 \times 1 + 90$

$135 = 90 \times 1 + 45$

$90 = 45 \times 2 + 0$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮ.ಸಾ.ಅ = 45

(ii) 196 ಮತ್ತು 38220

196	38220	195
	38220	
	0	

$38220 = 196 \times 195 + 0$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮ.ಸಾ.ಅ = 196

(iii) 867 ಮತ್ತು 255

255	867	3
	765	
	102	
102	255	2
	204	
	51	
51	102	2
	102	
	0	

$867 = 255 \times 3 + 102$

$255 = 102 \times 2 + 51$

$102 = 51 \times 2 + 0$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮ.ಸಾ.ಅ = 51

3. **32 ಸದಸ್ಯರುಳ್ಳ ಭೂದಳದ ತುಕಡಿಯ ಹಿಂದೆ 616 ಸದಸ್ಯರುಳ್ಳ ಭೂದಳ ಸೈನಿಕರ ಗುಂಪು ಒಂದು ಪಥ ಸಂಚಲನದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಆ ಎರಡೂ ತಂಡಗಳು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಗರಿಷ್ಠ ಎಷ್ಟು ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಅವರು ಈ ರೀತಿ ಚಲಿಸಬಹುದು?**

(iii) 867 ಮತ್ತು 255

32	616	19
	608	
	8	
8	32	4
	32	
	0	

$616 = 32 \times 19 + 8$

$32 = 8 \times 4 + 0$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮ.ಸಾ.ಅ = 8

ಗರಿಷ್ಠ 8 ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಬಹುದು

[ಸುಳುಹು: x ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಅದು 3q, 3q+1 ಅಥವಾ 3q+2 ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು 3m ಅಥವಾ 3m+1 ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪುನಃ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.]

ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಶೇಷವು 0,1, ಅಥವಾ 3 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$\Rightarrow$ a ಯು 3q, 3q + 1 ಅಥವಾ 3q + 2 ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

i) a = 3q ಆದಾಗ,

$a^2 = (3q)^2 = 9q^2 = 3(3q^2) = 3m$ $\quad$ **$(m = 3q^2)$**

ii) a = 3q + 1 ಆದಾಗ,

$a^2 = (3q + 1)^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2) + 1 = 3m + 1$ $\quad$ **$(m = 3q^2 + 2)$**

iii) a = 3q + 2 ಆದಾಗ,

$a^2 = (3q + 2)^2 = 9q^2 + 12q + 4 \Rightarrow a^2 = 9q^2 + 12q + 3 + 1$

$\Rightarrow 3(3q^2 + 4q + 1) + 1 = 3m + 1$ $\quad$ **$(m = 3q^2 + 4q + 1)$**

(i) (ii) ಮತ್ತು (iii) ರಿಂದ

ಆದ್ದರಿಂದ, ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗವು 3m ಅಥವಾ 3m+1 ರೂಪದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆ

8.3 ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ:

ಪ್ರಮೇಯ 8.2 (ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ): ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು (ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು) ಮತ್ತು ಈ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯು, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಘಟಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಅನನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗುವಂತೆ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಒಂದು ಅನನ್ಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ದೊರೆಯುವಿಕೆಯು ವಿಭಿನ್ನ ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿರಬಹುದು ಎಂದು ಈ ಪ್ರಮೇಯವು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಯಾವುದೇ ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟತೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 2 x 3 x 5 x 7 ಇದು 3 x 5 x 7 x 2 ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ ಅಥವಾ ಇನ್ನಾವುದೇ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: 4^n ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ n ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. n ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ 4^n ಎಂಬುದು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

n ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ, 4^n ಇದು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ, ಅದು 5 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. ಅಂದರೆ, 4^n ಇದರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ 5ನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರಬೇಕು.

ಆದರೆ $4^n = (2)^{2n}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಹೀಗೆ 4^n ದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2 ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ 4^n ದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ n ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ 4^n ಇದು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: 6 ಮತ್ತು 20ರ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $6 = 2^1 \times 3^1$

$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$

ಮ.ಸಾ.ಅ. $(6,20) = 2$ ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. $(6, 20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಮತ್ತು b ಗಳಿಗೆ,

ಮ.ಸಾ.ಅ. (a, b) x ಲ.ಸಾ.ಅ (a, b) = a x b

ಉದಾಹರಣೆ 7: 96 ಮತ್ತು 404ರ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: 96 ಮತ್ತು 404ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$96 = 2^5 \times 3$

$404 = 2^2 \times 101$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. $= 2^2 = 4$

∴ ಲ.ಸಾ.ಅ. (96, 404) $= \frac{96 \times 404}{4} = 9696$

ಉದಾಹರಣೆ 8: 6, 72 ಮತ್ತು 120 ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ.ಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$6 = 2 \times 3$

$72 = 2^3 \times 3^2$

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

∴ ಮ.ಸಾ.ಅ. (6, 72, 120) $= 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

∴ ಲ.ಸಾ.ಅ. (6, 72, 120) $= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 8 \times 9 \times 5 = 360$

ಪರಿಹಾರ

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

   (i) $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 5 \times 7$

   (ii) $156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 13$

   (iii) $3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17 = 3^2 \times 5^2 \times 17$

   (iv) $5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$

   (v) $7429 = 17 \times 19 \times 23$

2. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಜೋಡಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಅ. ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಲ.ಸಾ.ಅ. x ಮ.ಸಾ.ಅ. = ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

   (i) 26 ಮತ್ತು 91 (ii) 510 ಮತ್ತು 92 (iii) 336 ಮತ್ತು 54.

(i) $26 = 2 \times 13$

$91 = 7 \times 13$

ಮ.ಸಾ.ಅ. $= 13$

ಲ.ಸಾ.ಅ. $= 2 \times 7 \times 13 = 182$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 26 \times 91 = 2366$

ಲ.ಸಾ.ಅ. x ಮ.ಸಾ.ಅ. $= 13 \times 182 = 2366$

∴ಲ.ಸಾ.ಅ. x ಮ.ಸಾ.ಅ. = ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

(ii) $510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$

$92 = 2 \times 2 \times 23$

ಮ.ಸಾ.ಅ. $= 2$

ಲ.ಸಾ.ಅ. $= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23 = 23460$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = 510 × 92 = 46920

ಲ.ಸಾ.ಅ. x ಮ.ಸಾ.ಅ. = 2 × 23460 = 46920

∴ಲ.ಸಾ.ಅ. x ಮ.ಸಾ.ಅ. = ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

(iii) 336 = 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 7

54 = 2 × 3 × 3 × 3

ಮ.ಸಾ.ಅ. = 2 × 3 = 6

ಲ.ಸಾ.ಅ. = 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 3 × 7 =3024

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = 336 × 54 =18144

ಲ.ಸಾ.ಅ. x ಮ.ಸಾ.ಅ. = 6 × 3024 = 18144

∴ಲ.ಸಾ.ಅ. x ಮ.ಸಾ.ಅ. = ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

3. ಕೆಳಗಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಅ.ಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 12, 15 ಮತ್ತು 21 (ii) 17, 23 ಮತ್ತು 29 (iii) 8, 9 ಮತ್ತು 25

(i) 12 = 2 × 2 × 3

15 =3 × 5

21 =3 × 7

ಮ.ಸಾ.ಅ. = 3

ಲ.ಸಾ.ಅ. = 2 × 2 × 3 × 5 × 7 = 420

(ii) 17 = 1 × 17

23 = 1 × 23

29 = 1 × 29

ಮ.ಸಾ.ಅ. = 1

ಲ.ಸಾ.ಅ. = 1 × 17 × 19 × 23 = 11339

(iii) 8 =1 × 2 × 2 × 2

9 =1 × 3 × 3

25 =1 × 5 × 5

ಮ.ಸಾ.ಅ. = 1

ಲ.ಸಾ.ಅ. = 1 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5 × 5 = 1800

4. **(306, 657)ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. = 9 ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

ಲ.ಸಾ.ಅ x ಮ.ಸಾ.ಅ. = ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

∴ ಲ.ಸಾ.ಅ. (306 × 657) = $\frac{306 \times 657}{9}$ = 22338

7. ಒಂದು ಕ್ರೀಡಾಂಗಣದ ಸುತ್ತಲೂ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಮಾರ್ಗವಿದೆ. ಸೋನಿಯಾಳು ಆ ಕ್ರೀಡಾಂಗಣದ ಒಂದು ಸುತ್ತನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು 18 ನಿಮಿಷಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ರವಿಯು ಅದೇ ಸುತ್ತನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು 12 ನಿಮಿಷಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಒಂದೊಮ್ಮೆ ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವಿಕಲಾಲದಲ್ಲಿ ಆರಂಭಿಸಿ, ವಿಕಮುಖವಾಗಿ ಚಲಿಸಿದರೆ, ಎಷ್ಟು ನಿಮಿಷಗಳ ನಂತರ ಅವರು ಪುನಃ ಆರಂಭಿಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತಾರೆ?

ಅವರು ಸಮಯಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ದ ಬೆಲೆಗೆ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತಾರೆ.

18 = 2 × 3 × 3

12 = 2 × 2 × 3

ಲ.ಸಾ.ಅ. = 2 × 2 × 3 × 3 = 36

ಆದ್ದರಿಂದ 36 ನಿಮಿಷಗಳಗಳ ನಂತರ ಅವರು ಪುನ: ಆರಂಭಿಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತಾರೆ.

8.4 ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪುನರಾವಲೋಕನ:

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಹಾಗೂ ಇಲ್ಲಿ $p, q \in Z, q \neq 0$

ಪ್ರಮೇಯ 8.3: ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ p ಯು a^2 ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಆಗ p ಯು a ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ a ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.4: $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ:ಊಹೆ: $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z, q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

ಇಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು q ಗಳಿಗೆ 1 ರ ಹೊರತು ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ, $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}q = p$

ಎರಡೂ ಬದಿ ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿದಾಗ,

$(\sqrt{2}q)^2 = p^2$

$\Rightarrow 2q^2 = p^2$ (1)

$\Rightarrow 2, p^2$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ $\Rightarrow 2,$ p ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. [ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

ಆದ್ದರಿಂದ $p = 2m$ ಆಗಿರಲಿ.

(1) $\Rightarrow 2q^2 = (2m)^2$

$\Rightarrow q^2 = 2m^2$

$\Rightarrow 2, q^2$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ $\Rightarrow 2,$ q ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. [ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

ಆದ್ದರಿಂದ 2, p ಮತ್ತು q ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಇದು ನಮ್ಮ ಊಹೆಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9: $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ:ಊಹೆ: $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z, q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

ಇಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು q ಗಳಿಗೆ 1 ರ ಹೊರತು ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ, $\sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{3}q = p$

ಎರಡೂ ಬದಿ ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿದಾಗ,

$(\sqrt{3}q)^2 = p^2$

$\Rightarrow 3q^2 = p^2$ (1)

$\Rightarrow 3, p^2$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ $\Rightarrow 3,$ p ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. [ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

ಆದ್ದರಿಂದ $p = 3m$ ಆಗಿರಲಿ.

(1) $\Rightarrow 3q^2 = (3m)^2$

$\Rightarrow q^2 = 3m^2$

$\Rightarrow 3, q^2$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ $\Rightarrow 3,$ q ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. [ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

ಆದ್ದರಿಂದ 3, p ಮತ್ತು q ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಇದು ನಮ್ಮ ಊಹೆಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10: $5 - \sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ:ಊಹೆ:$5 - \sqrt{3}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\Rightarrow 5 - \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z, q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

$\Rightarrow 5 - \frac{p}{q} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{5q-p}{q} = \sqrt{3}$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{5q-p}{q}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ

ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು.

ಆದ್ದರಿಂದ $5 - \sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

ಪರಿಹಾರ:

1. $\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ:ಊಹೆ: $\sqrt{5}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z, q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

ಇಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು q ಗಳಿಗೆ 1 ರ ಹೊರತು ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ, $\sqrt{5} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{5}q = p$

ಎರಡೂ ಬದಿ ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿದಾಗ,

$(\sqrt{5}q)^2 = p^2$

$\Rightarrow 5q^2 = p^2$ (1)

$\Rightarrow 5, p^2$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ $\Rightarrow 5$, p ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. [ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

ಆದ್ದರಿಂದ $p = 3m$ ಆಗಿರಲಿ.

(1) $\Rightarrow 5q^2 = (5m)^2$

$\Rightarrow q^2 = 5m^2$

$\Rightarrow 5, q^2$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ $\Rightarrow 5$, q ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. [ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ]

ಆದ್ದರಿಂದ 5, p ಮತ್ತು q ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಇದು ನಮ್ಮ ಊಹೆಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ.

2. $3 + 2\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ:ಊಹೆ: $3 + 2\sqrt{5}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\Rightarrow 3 + 2\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z, q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

$\Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{p}{q} - 3$

$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{p-2q}{2q}$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{p-2q}{2q}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ

ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು.

ಆದ್ದರಿಂದ $3 + 2\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ಸಾಧನೆ:ಊಹೆ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z, q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2p}{q}$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{2p}{q}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ

ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು.

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

(ii) $7\sqrt{5}$

ಸಾಧನೆ:ಊಹೆ: $7\sqrt{5}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$7\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z, q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{p}{7q}$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{p}{7q}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ

ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು.

ಆದ್ದರಿಂದ $7\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

(iii) $6+\sqrt{2}$

ಸಾಧನೆ:ಊಹೆ: $6+\sqrt{2}$ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

$\Rightarrow 6+\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ [$p,q \in Z$, $q \neq 0$ ಮತ್ತು $(p,q)=1$]

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} - 6$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p-6q}{2}$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{p-6q}{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು.

ಆದ್ದರಿಂದ $6+\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

ಪರಿಹಾರ

1. ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮಾಡದೇ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆಯೇ ತಿಳಿಸಿ:

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$

(v) $\frac{29}{343}$ (vi) $\frac{23}{2^3 5^3}$ (vii) $\frac{23}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$

(ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

(i) $\frac{13}{3125}$

ಛೇದವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ $3125 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$

$3125 = 2^0 \times 5^5$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(ii) $\frac{17}{8}$

ಛೇದವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$8 = 2^3 \times 5^0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(iii) $\frac{64}{455}$

ಛೇದವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ $455 = 5 \times 7 \times 13$

ಛೇದದಲ್ಲಿ 7x13 ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು $2^n \times 5^m$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(iv) $\frac{15}{1600}$

ಛೇದವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ $455 = 5 \times 7 \times 13$

$1600 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^6 \times 5^2$

$1600 = 2^6 \times 5^2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(v) $\frac{29}{343}$

ಛೇದವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ $343 = 7 \times 7 \times 7 = 7^3$

$343 = 7^3$

ಇದು $2^n \times 5^m$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$

ಛೇದವು $2^n \times 5^m$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(vii) $\frac{23}{2^2 5 7^5}$

ಛೇದವು $2^n \times 5^m$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(viii) $\frac{6}{15}$

$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

ಛೇದವು $2^0 \times 5^1$ ಅಂದರೆ $2^n \times 5^m$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(ix) $\frac{35}{50}$

$\frac{35}{50} = \frac{7}{10} = \frac{7}{2 \times 5}$

ಛೇದವು $2^1 \times 5^1$ ಅಂದರೆ $2^n \times 5^m$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

x) $\frac{77}{210}$

$\frac{77}{210} = \frac{11}{30} = \frac{11}{2 \times 3 \times 5}$

ಛೇದವು $2^n \times 5^m$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

2. ಪ್ರಶ್ನೆ 1ರಲ್ಲಿನ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\frac{13}{5^5}$

$\frac{13}{5^5} \times \frac{2^5}{2^5} = \frac{15 \times 32}{105} = \frac{416}{100000} = 0.00416$

(ii) $\frac{17}{8}$

$\frac{17}{8} = \frac{17}{2^3} \times \frac{5^3}{5^3} = \frac{17 \times 125}{1000} = 2.125$

(iii) $\frac{15}{1600} = \frac{15}{2^6 5^2} = \frac{15 \times 5^4}{2^6 \times 5^6} = \frac{15 \times 625}{1000000} = 0.009375$

(iv) $\frac{23}{2^3 5^3}$

$\frac{23}{2^3 5^3} = \frac{23 \times 5}{2^3 5^3} \quad \frac{115}{1000} = 0.115$

(v) $\frac{6}{15}$

$\frac{6}{15} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{10} = 0.4$

(vi) $\frac{35}{50}$

$\frac{35}{50} = \frac{7}{10} = 0.7$

9 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು

ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ ಅಥವಾ ಡಿಗ್ರಿ

$p(x)$ ಎಂಬುದು x ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾದರೆ, $p(x)$ ದಲ್ಲಿನ x ದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಸೂಚಿಯನ್ನು ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ನ ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ ಅಥವಾ ಡಿಗ್ರಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$4x + 2$ ಎಂಬುದು x ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 1 ಆಗಿದೆ.
ಡಿಗ್ರಿ 1 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ **ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$2y^2 - 3y + 4$ ಎಂಬುದು y ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿದೆ.
ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು **ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

x ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.
ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $a \neq 0$ ಆಗಿದೆ.

$5x^3 - 4x^2 + 2 - \sqrt{2}$ ಎಂಬುದು x ಚರಾಕ್ಷರುವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 3 ಆಗಿದೆ.
ಡಿಗ್ರಿ 3 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು **ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಒಂದು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು $ax^3 + bx^2 + cx + d$
ಇಲ್ಲಿ a, b, c, d ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಆಗಿದೆ.

[$7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ ಎಂಬುದು u ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಡಿಗ್ರಿ 6 ಆಗಿದೆ.]

ಚರಾಕ್ಷರವು ಋಣಾತ್ಮಕ ಘಾತ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅಥವಾ ಅದರ ಘಾತಾಂಕವು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ: $\sqrt{x} + 1$, $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{x^3+x^2-1}$

$p(x)$ ಎಂಬುದು x ನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು k ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, $p(x)$ ನಲ್ಲಿ x ಗೆ k ಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಬೆಲೆಯನ್ನು $x = k$ ಆದಾಗ $p(x)$ ನ ಬೆಲೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು $p(k)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: $x = -1$ ಆದಾಗ $p(x) = x^2 - 3x - 4$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

$p(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 4 = 0$

ಹಾಗೆಯೇ, $p(4) = (4)2 - 3(4) - 4 = 0$

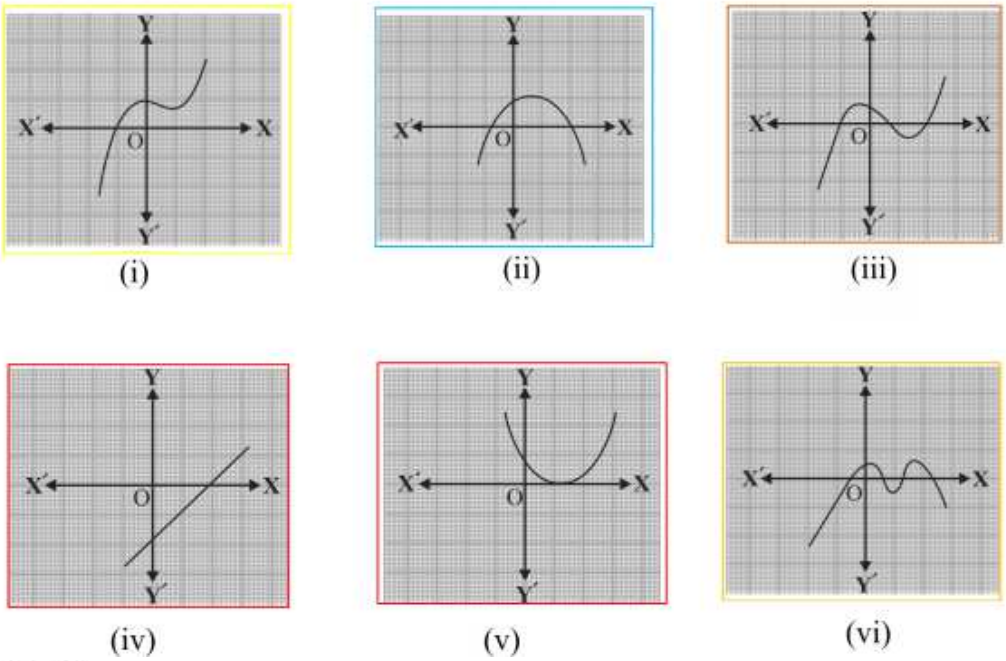
$p(-1) = 0$ ಮತ್ತು $p(4) = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, -1 ಮತ್ತು 4ನ್ನು ಎಂಬ $x^2 - 3x - 4$ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

k ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು, $p(k) = 0$ ಆದರೆ k ಯನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

k ಎಂಬುದು $p(x) = ax + b$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಯಾದರೆ, ಆಗ $p(k) = ak + b = 0$ ಅಂದರೆ $k = -\frac{b}{a}$

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax + b$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಯು $-\frac{b}{a}$

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಚಿತ್ರ 9.9ರಲ್ಲಿನ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಸಹ $y = p(x)$ ದ ನಕ್ಷೆಯಾಗಿದ್ದು, ಇಲ್ಲಿ $p(x)$ ಎಂಬುದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಕ್ಷೆಗೂ $p(x)$ ದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಪರಿಹಾರ:

(i) ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ ಅದು ಕೇವಲ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದೆ.

(ii) ನಕ್ಷೆಯು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿದೆ

(iii) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(iv) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(v) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(vi) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಪರಿಹಾರ

2. $y = p(x)$ ದ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಚಿತ್ರ 9.10ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ್ದು, ಇಲ್ಲಿ $p(x)$ ಎಂಬುದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ $p(x)$ ದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

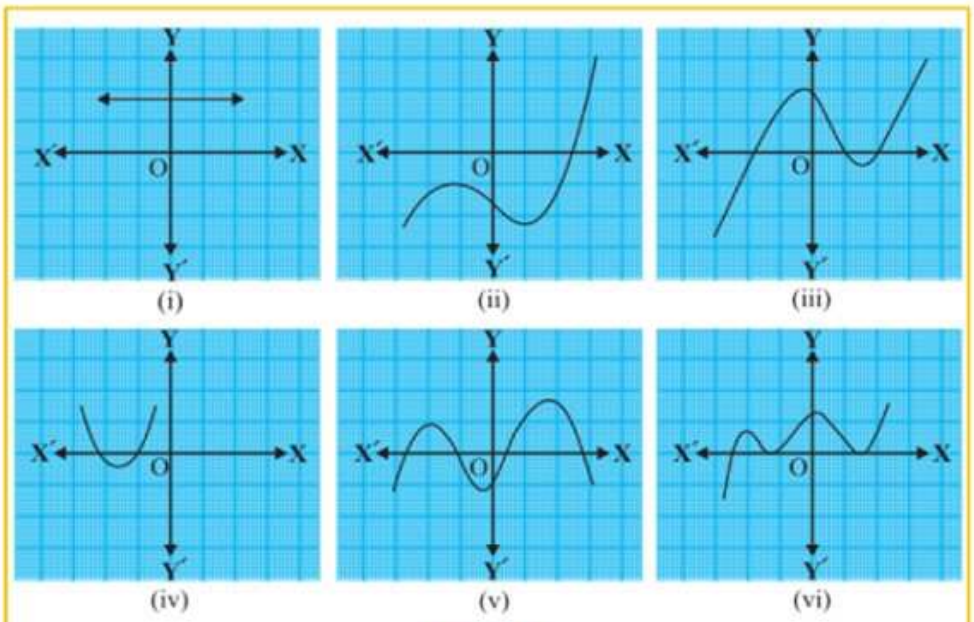


Fig. 9.10

(i) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 0 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ.
(ii) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 1 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.
(iii) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 3 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.
(iv) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 2 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.
(v) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 4 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.
(vi) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 3 ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

9.3. ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಹಾಗೂ ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ

α ಮತ್ತು β ಗಳು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $(x - \alpha)$ ಮತ್ತು $(x - \beta)$ ಗಳು $p(x)$ದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $\boxed{\alpha + \beta = \frac{-b}{a}}$ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $\boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$

ಉದಾಹರಣೆ 2: $x^2 + 7x + 10$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: $x^2 + 7x + 10 = x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x(x + 5) + 2(x + 5)$

$= (x + 2)(x + 5)$

$\therefore x = -2$ ಅಥವಾ $x = -5$ ಆದಾಗ $x^2 + 7x + 10$ ರ ಬೆಲೆಯು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, -2 ಮತ್ತು -5 ಇವು $x^2 + 7x + 10$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= (-2) + (-5) = -7 = \frac{-7}{1} = \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಉದಾಹರಣೆ 3: $x^2 - 3$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$\therefore x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{3}$ ಇವು $x^2 - 3$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಈಗ, ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \sqrt{3} + -\sqrt{3} = 0 = \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಹಾಗೂ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ -3 ಮತ್ತು 2 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $ax^2 + bx + c$ ಯು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ α ಮತ್ತು βಗಳು ಅದರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

$\therefore \alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a}$ ಮತ್ತು $\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 1$ ಆದರೆ, ಆಗ $b = 3$ ಮತ್ತು $c = 2$

ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $= x^2 + 3x + 2$

ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವೆ ಸಂಬಂಧ:

α, β, γ ಗಳು $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ಎಂಬ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ, ಆಗ,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a};\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a};\ \alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.2

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s - 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

   (iv) $4u^2 - 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಹಾಗೂ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

   (iv) $1, 1$ (v) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

ಪರಿಹಾರ

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s - 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 - 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

(i) $x^2 - 2x - 8$

$= x^2 - 4x + 2x - 8$

$= (x - 4) + 2(x - 4)$

$= (x - 4)(x + 2)$

$\Rightarrow x = 4$ ಮತ್ತು $x = -2$ ಗಳು $x^2 - 2x - 8$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= 4 + (-2) = 2 = \frac{-(-2)}{1} = \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= (4)(-2) = -8 = \frac{-8}{1} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(ii) $4s^2 - 4s + 1$

$= 4s^2 - 2s - 2s + 1$

$= 2s(s - 1) - 1(2s - 1)$

$= (2s - 1)(2s - 1)$

$\Rightarrow s = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $s = \frac{1}{2}$ ಗಳು $4s^2 - 4s + 1$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \frac{-(-4)}{4} = \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(iii) $6x^2 - 3 - 7x$

$= 6x^2 - 7x - 3$

$= 6x^2 - 9x + 2x - 3$

$= 3x(2x - 3) + 1(2x - 3)$

$= (3x + 1)(2x - 3)$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು $x = \frac{3}{2}$ ಗಳು $6x^2 - 3 - 7x$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} = 1 = \frac{-2+9}{6} = \frac{7}{6} = \frac{-(-7)}{6} \quad \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{-3}{6} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(iv) $4u^2 + 8u$

$= 4u^2 + 8u + 0$

$= 4u(u + 2)$

$\Rightarrow u = 0$ ಮತ್ತು $u = -2$ ಗಳು $4u^2 + 8u$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= 0 + (-2) = -2 = \frac{-(8)}{4} = \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 0 \times -2 = 0 = \frac{0}{4} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(v) $t^2 - 15$

$= t^2 - 0.t - 15$

$= (t - \sqrt{15})(t + \sqrt{15})$

$\Rightarrow t = \sqrt{15}$ ಮತ್ತು $t = -\sqrt{15}$ ಗಳು $t^2 - 15$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \sqrt{15} + (-\sqrt{15}) = 0 = \frac{0}{1} = \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \sqrt{15} \times (-\sqrt{15}) = -15 = \frac{-15}{1} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

(vi) $3x^2 - x - 4$

$= 3x^2 - 4x + 3x - 4$

$= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$

$= (3x - 4)(x + 1)$

$\Rightarrow x = \frac{4}{3}$ ಮತ್ತು $x = -1$ ಗಳು $3x^2 - x - 4$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \frac{4}{3} + (-1) = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3} = \frac{-(-1)}{3} \quad \frac{-x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \frac{4}{3} + (-1) = \frac{4}{3} = \frac{-4}{1} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ}}{x^2\text{ದ ಸಹಗುಣಕ}}$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಹಾಗೂ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

(i) $\frac{1}{4}, -1$

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + \beta = \frac{1}{4} = \frac{-(-1)}{4} = \frac{-b}{a}$

$\alpha\beta = -1 = \frac{-4}{4} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 4, b = -1$ ಮತ್ತು $c = -4$

$\therefore$ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $4x^2 - x - 4$

(ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + \beta = \sqrt{2} = \frac{-(3\sqrt{2})}{3} = \frac{-b}{a}$

$\alpha\beta = \frac{1}{3} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 3, b = -3\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $c = 1$

$\therefore$ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $3x^2 - 3\sqrt{2} + 1$

(iii) $0, \sqrt{5}$

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + \beta = 0 = \frac{0}{4} = \frac{-b}{a}$

$\alpha\beta = \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 1, b = 0$ ಮತ್ತು $c = \sqrt{5}$

$\therefore$ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^2 + \sqrt{5}$

(iv) 1, 1

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + \beta = 1 = \frac{-(-1)}{1} = \frac{-b}{a}$

$\alpha\beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 1, b = -1$ ಮತ್ತು $c = 1$

$\therefore$ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^2 - x + 1$

(v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + \beta = -\frac{1}{4} = \frac{-1}{4} = \frac{-b}{a}$

$\alpha\beta = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 4, b = 1$ ಮತ್ತು $c = 1$

$\therefore$ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $4x^2 + x + 1$

(vi) 4,1

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + \beta = 4 = \frac{-(-4)}{1} = \frac{-b}{a}$

$\alpha\beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow a = 1, b = -4$ ಮತ್ತು $c = 1$

$\therefore$ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^2 - 4x + 1$

9.4 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿ

$x^3 - 3x^2 - x + 3$ ಇದರ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯು 1 ಆದರೆ, ಅದರ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವು $(x - 1)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ನ್ನು $(x - 1)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ $x^2 - 2x - 3$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ, $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು $= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು 1, –1 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: $2x^2 + 3x + 1$ ನ್ನು $x + 2$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾದಾಗ ಅಥವಾ ಶೇಷದ ಡಿಗ್ರಿಯು ಭಾಜಕದ ಡಿಗ್ರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಆದಾಗ ನಾವು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $(2x - 1)$ ಮತ್ತು ಶೇಷವು 3 ಆಗಿದೆ.

$x + 2$	$2x^2 + 3x + 1$	$2x - 1$
	$2x^2 + 4x$	
	$-x + 1$	
	$-x - 2$	
	$+3$	

$(2x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 3x - 2 + 3$

$= 2x^2 + 3x + 1$

$\Rightarrow$ ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ x ಭಾಗಲಬ್ಧ + ಶೇಷ

ಉದಾಹರಣೆ 7: $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ನ್ನು $1 + 2x + x^2$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

$1 + 2x + x^2$	$3x^3 + x^2 + 2x + 5$	$3x - 5$
	$3x^3 + 6x^2 + 3x$	
	$-5x^2 - x + 5$	
	$-5x^2 - 10x - 5$	
	$9x + 10$	

ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಭಾಜಕದ ಪದಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಡಿಗ್ರಿಯ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪದಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ ಬರೆಯುವುದನ್ನು, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ

$(x^2 + 2x + 1)(3x - 5) + (9x + 10) = 3x^3 + x^2 + 2x + 5$

$\Rightarrow$ ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ x ಭಾಗಲಬ್ಧ + ಶೇಷ

$p(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿದ್ದು, $g(x) \neq 0$ ಆದಾಗ

$$\boxed{p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)}$$

$q(x)$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು $r(x)$ ಶೇಷ

ಇಲ್ಲಿ $r(x) = 0$ ಅಥವಾ $r(x)$ ದ ಡಿಗ್ರಿ < $g(x)$ ದ ಡಿಗ್ರಿ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8: $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ ನ್ನು $x - 1 - x^2$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಡೆಸಲು, ಮೊದಲು ನಾವು ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಭಾಜಕಗಳೆರಡನ್ನೂ ಅವುಗಳ ಡಿಗ್ರಿಯ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮ ದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$-x^2 + x - 1$	$-x^3 + 3x^2 - 3x + 5$	$x - 2$
	$-x3 + x^2 - x$	
	$2x^2 - 2x + 5$ $2x^2 - 2x + 2$	
	3	

ಭಾಜ್ಯ = $-x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ ಮತ್ತು

ಭಾಜಕ = $-x^2 + x - 1$.

$\therefore$ ಭಾಗಲಬ್ಧ = $x - 2$, ಶೇಷ = 3

ಭಾಜಕ x ಭಾಗಲಬ್ಧ + ಶೇಷ $= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$

$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

= ಭಾಜ್ಯಈ ರೀತಿ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9: $\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{2}$ ಇವು $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ ರ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ, ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{2}$ ಇವು ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$(x - 2)(x + 2) = x^2 - 2$ ಇದು ದತ್ತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಈಗ ದತ್ತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನಾವು $x^2 - 2$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

$x^2 - 2$	$2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$	$2x^2 - 3x + 1$
	$-2x^4 + 4x^2$	
	$-3x^3 + x^2 + 6x - 2$ $-3x^3 + 6x$	
	$+x^2 - 2$ $+x^2 - 2$	
	0	

ಭಾಗಲಬ್ಧ = $2x^2 - 3x + 1$

ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ,

$2x^2 - 2x - x + 1$

$= 2x(x - 1) - 1(2x - 1)$

$= (2x - 1)(x - 1)$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = 1$ ಇವು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

$\therefore \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}$, ಮತ್ತು 1 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು.

ಪರಿಹಾರ

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ p(x) ನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ g(x) ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ $\quad g(x) = x^2 - 2$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ $\quad g(x) = x^2 + 1 - x$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6$ $\quad g(x) = 2 - x^2$

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ $\quad g(x) = x^2 - 2$

$x^2 - 2$	$x^3 - 3x^2 + 5x - 3$	$x - 3$
	$x^3 - 0 - 2x$	
	$-3x^2 + 7x - 3$	
	$-3x^2 + 0 + 6$	
	$+7x - 9$	

ಭಾಗಲಬ್ಧ = $x - 3$ ಮತ್ತು ಶೇಷ = $7x - 9$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ $\quad g(x) = x^2 + 1 - x$

$x^2 - x + 1$	$x^4 + 0.x^3 - 3x^2 + 4x + 5$	$x^2 + x - 3$
	$x^4 - x^3 + x^2$	
	$x^3 - 4x^2 + 4x$	
	$x^3 - x^2 + x$	
	$-3x^2 + 3x + 5$	
	$-3x^2 + 3x - 3$	
	8	

ಭಾಗಲಬ್ಧ = $x^2 + x - 3$ ಮತ್ತು ಶೇಷ = 8

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6$ $\qquad$ $g(x) = 2 - x^2$

$-x^2 + 2$	$x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 5x + 6$	$-x^2 - 2$
	$x^4 + 0 - 2x^2$	
	$2x^2 - 5x + 6$	
	$2x^2 + 0 - 4$	
	$-5x + 10$	

2. ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಹಾಗೂ ಮೊದಲನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $t^2 - 3$ $\qquad$ $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$
(ii) $x^2 + 3x + 1$ $\qquad$ $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$
(iii) $x^3 - 3x + 1$ $\qquad$ $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

(i) $t^2 - 3$ $\qquad$ $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

$t^2 - 3$	$2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$	$2t^2 + 3t + 4$
	$2t^4 + 0 - 6t^2$	
	$+3t^3 + 4t^2 - 9t$	
	$+3t^3 + 0 - 9t$	
	$+4t^2 + 0 - 12$	
	$+4t^2 + 0 - 12$	
	0	

ಶೇಷವು 0 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ

(ii) $x^2 + 3x + 1$ $\qquad$ $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

$x^2 + 3x + 1$	$3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$	$3x^2 - 4x + 2$
	$3x^4 + 9x^3 + 3x^2$	
	$-4x^3 - 10x^2 + 2x$	
	$-4x^3 - 12x^2 - 4x$	
	$+2x^2 + 6x + 2$	
	$+2x^2 + 6x + 2$	
	0	

ಶೇಷವು 0 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ

(iii) $x^3 - 3x + 1$ $\qquad$ $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

$x^3 - 3x + 1$	$x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$	$x^2 - 1$
	$x^5 - 3x^3 + x^2$	
	$-x^3 + 0 + 3x + 1$	
	$-x^3 + 0 + 3x - 1$	
	2	

ಶೇಷವು 2 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ನ್ನು $g(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $x - 2$ ಮತ್ತು $-2x + 4$ ಆದರೆ $g(x)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಭಾಜ್ಯ $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$

ಭಾಜಕ $g(x) = ?$

ಭಾಗಲಬ್ಧ $q(x) = x - 2$

ಶೇಷ $r(x) = -2x + 4$

$P(x) = g(x).q(x) + r(x)$

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = g(x).(x - 2) + (-2x + 4)$
$\Rightarrow g(x).(x - 2) = x^3 - 3x^2 + x + 2 - (-2x + 4)$
$\Rightarrow g(x).(x - 2) = x^3 - 3x^2 + x + 2 + 2x - 4$
$\Rightarrow g(x).(x - 2) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$
$\Rightarrow g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{x - 2}$

$x - 2$	$x^3 - 3x^2 + 3x - 2$	$x^2 - x + 1$
	$x^3 - 2x^2$	
	$-x^2 + 3x$	
	$-x^2 + 2x$	
	$+x - 2$	
	$+x - 2$	
	0	

$\therefore g(x) = x^2 - x + 1$

5. ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವ $p(x), g(x), q(x)$ ಮತ್ತು $r(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.

(i) $p(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ = $q(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ

(ii) $g(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ = $r(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ

(iii) $r(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ = 0

(i) $p(x) = 6x^2 + 2x + 2$

$g(x) = 2$
$q(x) = 3x^2 + x + 1$
$r(x) = 0$
$\Rightarrow p(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ = $q(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ = 2
ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ,

$g(x) \times q(x) + r(x) = 2(3x^2 + x + 1) + 0$
$g(x) \times q(x) + r(x) = 6x^2 + 2x + 2 = P(x)$
$\Rightarrow p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$
$\therefore$ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.

(ii) $p(x) = x^3 + x$

$g(x) = x^2$
$q(x) = x$ ಮತ್ತು $r(x) = x$
$g(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ = $r(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ = 1
ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ,
$g(x) \times q(x) + r(x) = (x^2) \times x + x$
$g(x) \times q(x) + r(x) = x^3 + x = p(x)$
$\Rightarrow p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$
$\therefore$ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.

(iii) $p(x) = x^3 + 1$

$g(x) = x^2$
$q(x) = x$ ಮತ್ತು $r(x) = 1$
$r(x)$ ನ ಡಿಗ್ರಿ = 0
ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ,

$g(x) \times q(x) + r(x) = (x^2) \times x + 1$
$\Rightarrow g(x) \times q(x) + r(x) = x^3 + 1 = P(x)$
$\Rightarrow p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$
$\therefore$ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.

10 ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಕರಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. $p(x)$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆದರೆ $p(x) = 0$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಆಗುತ್ತದೆ.

$p(x) = 0$ ರೂಪದ. $p(x)$ ಎಂಬುದು ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ 2 ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶರೂಪ:

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0,}$ $a \neq 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಲಕ್ಷಣಗಳೆಂದರೆ.

- ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
- ಚರಾಕ್ಷರದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತ 2 ನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.
- ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪ $ax^2 + bx + c = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
  ಇಲ್ಲಿ a ಯು x^2 ನ ಸಹಗುಣಕ. b ಯು x ನ ಸಹಗುಣಕ. c ಯು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದೆ.
  ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
- ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರದ ಘಾತಗಳು ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮಿಶ್ರ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ : ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ $ax^2 + bx + c = 0$ ದಲ್ಲಿ $a \neq 0$. $b \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಮಿಶ್ರ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $x^2 - 3x - 5 = 0$. $x^2 + 5x + 6 = 0$, $x + \frac{1}{x} = 5$, $(2x - 5)^2 = 81$

ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ : ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಚರಾಕ್ಷರವು 2 ನೇ ಘಾತದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಕಂಡುಬಂದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುವರು.

ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪ: $ax^2 + c = 0$ $[a \neq 0]$

(ii) ಒಂದು ಗುಡಿ ಕೈಗಾರಿಕೆಯು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಟಿಕೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಅಟಿಕೆಯ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು. (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) 55ರಿಂದ. ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸಿದ ಅಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿನದಲ್ಲಿ. ಅಟಿಕೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಒತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚವು ರೂ750 ಆಗಿದ್ದರೆ. ಆ ದಿನ ಉತ್ಪಾದಿಸಿದ ಅಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

ಪರಿಹಾರ :

(i) ಜಾನ್‌ನ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು x ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ ಜೀವಂತಿಯ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 45 - x$ [∵ಅವರಿಬ್ಬರ ಬಳಿ ಇರುವ ಒಟ್ಟು ಗೋಲಿಗಳು 45]

5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಜಾನ್‌ನ ಬಳಿ ಉಳಿದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= x - 5$

5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಜೀವಂತಿಯ ಬಳಿ ಉಳಿದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 45 - x - 5 = 40 - x$

∴ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 124$

$(x - 5)(40 - x) = 124$

$\Rightarrow 40x - x^2 - 200 + 5x = 124$

$\Rightarrow -x^2 + 45x - 200 = 124$

$\Rightarrow -x^2 + 45x - 324 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 45x + 324 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಜಾನ್‌ನ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $x^2 - 45x + 324 = 0$ ಯನ್ನು ಸಂದೂಗಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಗಣಿತೀಯ ರೂಪವಾಗಿದೆ.

(ii) ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಆಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗಿರಲಿ

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ದಿನದ ಪ್ರತಿ ಆಟಿಕೆಯ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) $= 55 - x$ ಆದ್ದರಿಂದ,

ಆ ದಿನದ ಒಟ್ಟು ಆಟಿಕೆಗಳ ಉತ್ಪಾದನಾ ವೆಚ್ಚ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) $= x(55 - x)$

$\therefore x(55 - x) = 750$

$\Rightarrow 55x - x^2 = 750$

$\Rightarrow -x^2 + 55x - 750 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 55x + 750 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ದಿನ ತಯಾರಿಸಿದ ಆಟಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $x^2 - 55x - 750 = 0$ ಯನ್ನು ಸಂದೂಗಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಗಣಿತೀಯ ರೂಪವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

(iii) $x(2x + 3) = x^2 + 1$ (iv) $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

(i) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$

$x^2 - 4x + 4 + 1 = 2x - 3$

$x^2 - 4x - 2x + 5 + 3 = 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(ii) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

$x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$x^2 - x^2 + x + 8 + 4 = 0$

$x + 12 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.

(iii) $x(2x + 3) = x^2 + 1$

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$

$2x^2 - x^2 + 3x - 1 = 0$

$x^2 + 3x - 1 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

ಪರಿಹಾರ

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$ (ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$
(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$ (iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$
(v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ (vi) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$
(vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2 - 1)$ (viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$

$x^2 + 2x + 1 = 2x - 6$
$x^2 + 2x - 2x + 1 + 6 = 0$
$x^2 + 7 = 0$
ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

$x^2 - 2x = -6 + 2x$
$x^2 - 2x - 2x + 6 = 0$
$x^2 - 4x + 6 = 0$
ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$

$x^2 + x - 2x - 2 = x^2 + 3x - x - 3$
$x^2 - x - 2 = x^2 + 2x - 3$
$x^2 - x^2 - x - 2x - 2 + 3 = 0$
$-3x + 3 = 0 \times -1$
$3x - 1 = 0$
ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.

(iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

$2x^2 + x - 6x - 3 = x^2 + 5x$
$2x^2 - 5x - 3 = x^2 + 5x$
$2x^2 - x^2 - 5x - 5x - 3 = 0$
$x^2 - 10x - 3 = 0$
ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$

$2x^2 - 6x - x + 3 = x^2 - x + 5x - 5$
$2x^2 - 7x + 3 = x^2 + 4x - 5$
$2x^2 - x^2 - 7x - 4x + 3 + 5 = 0$
$x^2 - 11x + 8 = 0$
ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

$x^2 + 3x + 1 = x^2 - 2(x)(2) + 2^2$
$x^2 - x^2 + 3x + 4x + 1 - 4 = 0$
$7x - 3 = 0$
ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.

(vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

$x^3 + 2^3 + 3(x)(2)^2 + 3x^2(2) = 2x^3 - 2x$
$x^3 + 8 + 12x + 6x^2 = 2x^3 - 2x$
$x^3 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 2x + 8 = 0$
$-x^3 + 6x^2 + 14x + 8 = 0 \times -1$
$x^3 - 6x^2 - 14x - 8 = 0$
ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ.

(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

$x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 2^3 + 3(x)(2)^2 - 3x^2(2)$

$x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 8 + 12x - 6x^2$ ಅ

$x^3 - x^3 - 4x^2 + 6x^2 - x - 12x + 1 + 8 = 0$

$2x^2 - 13x + 9 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

(i) ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ನಿವೇಶನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $528m^2$ ಆಗಿದೆ. ನಿವೇಶನದ ಉದ್ದವು (ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ) ಅದರ ಅಗಲದ ಎರಡಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಆ ನಿವೇಶನದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಅಗಲ $b = x$ m ಆಗಿರಲಿ

$\Rightarrow$ ಉದ್ದ $l = (2x+1)$m

ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= l \times b$

$\Rightarrow 528 = x(2x+1)$

$\Rightarrow 528 = 2x^2 + x$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 528 = 0$

(ii) ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 306 ಆಗಿದೆ. ನಾವು ಆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು x ಮತ್ತು $(x+1)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 306$

$\Rightarrow x(x+1) = 306$

$\Rightarrow x^2 + x - 306 = 0$

(iii) ರೋಹನನ ತಾಯಿಯು ಅವನಿಗಿಂತ 26 ವರ್ಷ ದೊಡ್ಡವಳಾಗಿದ್ದಾಳೆ. 3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) ಗುಣಲಬ್ಧವು 360 ಆಗುತ್ತದೆ. ನಾವು ರೋಹನನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

ರೋಹನ್‌ನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು $= x$ ಆಗಿರಲಿ

ತಾಯಿಯ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು $= x + 26$

3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ

ರೋಹನ್‌ನ ವಯಸ್ಸು $= x + 3$

ತಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸು $= x + 26 + 3 = x + 29$

3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 360$

$\therefore (x+3)(x+29) = 360$

$x^2 + 29x + 3x + 87 = 360$

$x^2 + 32x - 273 = 0$

(iv) ಒಂದು ರೈಲು ಏಕರೂಪದ ಜವದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿ, 480km ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಜವವು 8km/h ಕಡಿಮೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅಷ್ಟೇ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ರೈಲು 3 ಘಂಟೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿತ್ತು. ನಾವು ರೈಲಿನ ಜವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ.

ರೈಲಿನ ಜವ $= x\ km/h$ ಆಗಿರಲಿ.

$480\ km$ ಚಲಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲ $= \frac{480}{x}\ hrs$

8 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ಚಲಿಸಿದಾಗ ರೈಲಿನ ಜವ $= (x-8)km/h$

$480\ km$ ಚಲಿಸಲು 3 ಘಂಟೆ ಜಾಸ್ತಿಯಾದ್ದರಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲ $= \left(\frac{480}{x} + 3\right) hrs$

ರೈಲಿನ ಜವ $= x\ km/h$ ಆಗಿರಲಿ.

$480\,km$ ಚಲಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲ $= \frac{480}{x}\ hrs$

8 ಘಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ಚಲಿಸಿದಾಗ ರೈಲಿನ ಜವ $= (x-8)km/h$

$480\,km$ ಚಲಿಸಲು 3 ಘಂಟೆ ಜಾಸ್ತಿಯಾದ್ದರಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲ $= \frac{480}{x-8}\ hrs$

$\Rightarrow \frac{480}{x} + 3 = \frac{480}{x-8}$

$\Rightarrow 480(x-8) + 3x(x-8) = 480x$

$\Rightarrow 480x - 3840 + 3x^2 - 24x = 480x$

$\Rightarrow 3840 + 3x^2 - 24x = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 24x + 3840 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 1280 = 0$

10.3 ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

ನೆನಪಿಡಿ: $ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$2x^2 - 5x + 3 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 0$

$\Rightarrow 2x(x-1) - 3(x-1) =$

$\Rightarrow (x-1)(2x-3) = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0, \quad 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow x = 1,\ 2x = 3$

$x = 1,\ x = \frac{3}{2}$

ಮೊದಲ ಪದ = $2x^2$.ಕಡೆಯ ಪದ $= +3$

ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $+6x^2$

ಮಧ್ಯದ ಪದ = $-5x$

ಗುಣಲಬ್ಧ = $+6x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-5x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$-5x = -2x - 3x$

ಉದಾಹರಣೆ 4: $6x^2 - x - 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$6x^2 - x - 2 = 0$

$6x^2 - 4x + 3x - 2 = 0$

$2x(3x-2) + 1(3x-2) = 0$

$(2x+1)(3x-2) = 0$

$2x + 1 = 0, 3x - 2 =$

$2x = -1, 3x = 2$

$x = \frac{-1}{2}, x = \frac{2}{3}$

ಮೊದಲ ಪದ = $6x^2$.ಕಡೆಯ ಪದ $= -2$

ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $-12x^2$

ಮಧ್ಯದ ಪದ = $-x$

ಗುಣಲಬ್ಧ = $-12x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$-x = -4x + 3x$

ಉದಾಹರಣೆ 5 : $3x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 2 = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$3x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 2 = 0$

$3x^2 - \sqrt{6}\,x - \sqrt{6}\,x + 2 = 0$

$(\sqrt{3})^2 x^2 - \sqrt{2}.\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}.\sqrt{3}\,x + (\sqrt{2})^2 = 0$

$\sqrt{3}\,x(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) = 0$

$(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2})(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) = 0$

$(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) = 0,\ (\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) = 0$

$\sqrt{3}\,x = \sqrt{2},\ \sqrt{3}\,x = \sqrt{2}$

$x = \sqrt{\frac{2}{3}},\ x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

ಮೊದಲ ಪದ = $3x^2$.ಕಡೆಯ ಪದ $= +2$

ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $6x^2$

ಮಧ್ಯದ ಪದ = $-2\sqrt{6}\,x$

ಗುಣಲಬ್ಧ = $6x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-2\sqrt{6}\,x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$-2\sqrt{6}\,x = \sqrt{6}\,x - \sqrt{6}\,x$

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ವಿಭಾಗ 10.1 ರಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾದ ಪ್ರಾರ್ಥನಾ ಮಂದಿರದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಧರ್ಮದರ್ಶಿಯೊಬ್ಬರು ಒಂದು ಪ್ರಾರ್ಥನಾ ಮಂದಿರವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬಯಸುತ್ತಾರೆ ಹಾಗೂ ಇದರ ಒಳಾಂಗಣ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $300m^2$ ಆಗಿದ್ದು, ಉದ್ದವು ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 1m ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತಾರೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆ ಮಂದಿರದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಎಷ್ಟಿರಬೇಕು?

$2x^2 + x - 300 = 0$

$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$

$2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$

$(x - 12)(2x + 25) =$

$x - 12 = 0, \quad 2x + 25 = 0$

$x = 12, \quad 2x = -25$

$x = \frac{-25}{2} = -12.5$

ಅಗಲ $= x = 12\,m$

ಉದ್ದ $= 2x + 1 = 2(12) + 1 = 24 + 1 = 25\,m$

ಮೊದಲ ಪದ $= 2x^2$.ಕಡೆಯ ಪದ $= -300$

ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -600x^2$

ಮಧ್ಯದ ಪದ $= +x$

ಗುಣಲಬ್ಧ $= -600x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $+x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$+x = -24x + 25x$

ಪರಿಹಾರ

1. ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ **(ii)** $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ **(iv)** $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$

$x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$

$x(x - 5) + 2(x - 5) = 0$

$(x - 5)(x + 2) = 0$

$(x - 5) = 0, (x + 2) = 0$

$x = 5, x = -2$

ಮೊದಲ ಪದ $= x^2$.ಕಡೆಯ ಪದ $= -10$

ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -10x^2$

ಮಧ್ಯದ ಪದ $= -3x$

ಗುಣಲಬ್ಧ $= -10x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-3x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$-3x = -5x + 2x$

(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

$2x^2 + x - 6 = 0$

$2x^2 + 4x - 3x - 6 = 0$

$2x(x + 2) - 3(x + 2) = 0$

$(x + 2)(2x - 3) = 0$

$x + 2 = 0, 2x - 3 = 0$

$x = -2, 2x = 3$

$x = -2, x = \frac{3}{2}$

ಮೊದಲ ಪದ $= 2x^2$.ಕಡೆಯ ಪದ $= -6$

ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -12x^2$

ಮಧ್ಯದ ಪದ $= +x$

ಗುಣಲಬ್ಧ $= -12x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $+x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$+ x = +4x - 3x$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\sqrt{2}x^2 + 2x + 5x + 5\sqrt{2} = 0$

$\sqrt{2}x(x + \sqrt{2}) + 5(x + \sqrt{2}) = 0$

$(\sqrt{2}x + 5)(x + \sqrt{2}) = 0$

$\sqrt{2}x + 5 = 0, \quad x + \sqrt{2} = 0$

$\sqrt{2}x = -5, \quad x = -\sqrt{2}$

$x = \frac{-5}{\sqrt{2}}, \quad x = -\sqrt{2}$

ಮೊದಲ ಪದ $= +\sqrt{2}x^2$.ಕಡೆಯ ಪದ $= +5\sqrt{2}$

ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= +10x^2$

ಮಧ್ಯದ ಪದ $= +7x$

ಗುಣಲಬ್ಧ $= +10x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $+7x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$+ 7x = +2x + 5x$

(iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

$16x^2 - 8x + 1 = 0$

$16x^2 - 4x - 4x + 1 =$

$4x(4x - 1) - 1(4x - 1) = 0$

$(4x - 1)(4x - 1) = 0$

$4x - 1 = 0, \quad 4x - 1 = 0$

$4x = 1, 4x = 1$

$x = \frac{1}{4}, \quad x = \frac{1}{4}$

ಮೊದಲ ಪದ $= +16x^2$.ಕಡೆಯ ಪದ $= +1$

ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= +16x^2$

ಮಧ್ಯದ ಪದ $= -8x$

ಗುಣಲಬ್ಧ $= +16x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-8x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$- 8x = -4x - 4x$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

$100x^2 - 20x + 1 = 0$

$100x^2 - 10x - 10x + 1 = 0$

$10x(10x - 1) - 1(10x - 1) = 0$

$(10x - 1)(10x - 1) = 0$

$10x - 1 = 0, 10x - 1 = 0$

$10x = 1, 10x = 1$

$x = \frac{1}{10}, x = \frac{1}{10}$

ಮೊದಲ ಪದ $=+100x^2$.ಕಡೆಯ ಪದ $=+1$
ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= +100x^2$
ಮಧ್ಯದ ಪದ $= -20x$
ಗುಣಲಬ್ಧ $= +100x^2$ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ $-20x$ ಇರುವಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಪದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ
$-20x = -10x - 10x$

ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು:

$ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗಪೂರ್ಣ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$ax^2 + bx = -c$ ಎರಡೂ ಕಡೆ $4a$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ ಎರಡೂ ಕಡೆ b^2 ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

$(2ax)^2 + 2(2ax)(b) + b^2 = b^2 - 4ac$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 3, \quad b = -5, \quad c = +2$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(3)(2)}}{2(3)}$

$x = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}$

$x = \frac{5\pm\sqrt{1}}{6}$

$x = \frac{5\pm1}{6}$

$x = \frac{6}{6}$ or $x = \frac{4}{6}$

$x = 1$ or $x = \frac{2}{3}$

(ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 1, \quad b = 4, \quad c = +5$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(4)\pm\sqrt{(4)^2-4(1)(5)}}{2(1)}$

$x = \frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}$

$x = \frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}$

$x = \frac{-4\pm2\sqrt{-1}}{2}$

ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಅಲ್ಲ.

(iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 2, \quad b = -2\sqrt{2}, \quad c = +1$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-2\sqrt{2}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$

$x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-8}}{4}$

$x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4}$

$x = \frac{2\sqrt{2}}{4}$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

ಉದಾಹರಣೆ 14: ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 3 \quad x \neq 0, x \neq 2$

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3$

$\frac{x-2-x}{x(x-2)} = 3$

$\frac{-2}{x^2-2x} = 3$

$-2 = 3x^2 - 6x$

$3x^2 - 6x + 2 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 3, \quad b = -6, \quad c = 2$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6}$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{4 \times 3}}{6}$

$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$

$x = \frac{2(3 \pm \sqrt{3})}{6}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

$x = \frac{3+\sqrt{3}}{3}, \quad x = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

(i) $x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$

$x + \frac{1}{x} = 3$ ಎರಡೂ ಕಡೆ x ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$x^2 + 1 = 3x$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 1, \quad b = -3, \quad c = 1$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

ಪರಿಹಾರ

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ವರ್ಗ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ **(ii) $2x^2 + x - 4 = 0$**

(iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ **(iv) $2x^2 + x + 4 = 0$**

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

$2x^2 - 7x = -3 \times 2$

$4x^2 - 14x = -6$

ಎರಡೂ ಕಡೆ b^2ನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು

$4x^2 - 14x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$(2x)^2 - 2(2x)(\frac{7}{2}) + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -6 + \frac{49}{4}$

$\left(2x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{-24+49}{4}$

$\left(2x - \frac{7}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$

$2x - \frac{7}{2} = \pm\frac{5}{2}$

$2x = \pm\frac{5}{2} + \frac{7}{2}$

$2x = \frac{\pm 5 + 7}{2}$

$x = \frac{\pm 5 + 7}{4}, \quad 2x = 1$

$x = \frac{5+7}{4}$, $x = \frac{-5+7}{4}$

$x = \frac{12}{4}$, $x = \frac{2}{4}$

$x = 3$, $x = \frac{1}{2}$

$2ab = 14x$

$2(2x)b = 14x$

$b = \frac{14x}{4x} = \frac{7}{2}$

$b^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$

(ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

$2x^2 + x = 4 \qquad \times 2$

$4x^2 + 2x = 8$

ಎರಡೂ ಕಡೆ b^2ನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು

$4x^2 + 2x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$(2x)^2 + 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8 + \frac{1}{4}$

$\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{32+1}{4}$

$\left(2x + \frac{1}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{33}{4}}$

$2x + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{33}}{2}$

$2x = \pm\frac{\sqrt{33}}{2} + \frac{1}{2}$

$2x = \frac{\pm\sqrt{33} - 1}{2}$

$x = \frac{\pm\sqrt{33} - 1}{4}$

$x = \frac{\sqrt{33}-1}{4}$. $x = \frac{-\sqrt{33}-1}{4}$

$2ab = 2x$

$2(2x)b = 2x$

$b = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$

$b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

2 ಪ್ರಶ್ನೆ 1ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 2, \quad b = -7, \quad c = 3$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$

$x = \frac{7 \pm 5}{4}$

$x = \frac{7+5}{4}, \quad x = \frac{7-5}{4}$

$x = \frac{12}{4}, \quad x = \frac{2}{4}$

$x = 3, \quad x = \frac{1}{2}$

(ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 2, \quad b = 1, \quad c = -4$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 32}}{2}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$

$x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2}, \quad x = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2}$

(iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 4, \quad b = 4\sqrt{3}, \quad c = +3$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(4\sqrt{3}) \pm \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 4(4)(3)}}{2(4)}$

$x = \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{16 \times 3 - 48}}{8}$

$x = \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{48 - 48}}{8}$

$x = \frac{-4\sqrt{3} \pm 0}{8},$

$x = \frac{-4\sqrt{3}}{8}, x = \frac{-4\sqrt{3}}{8}$

$x = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \quad x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 2, \quad b = 1, \quad c = 4$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 32}}{4}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-31}}{4}$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ.

3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x + \frac{1}{x} = 3, \quad x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, \quad x \neq -4, \ 7$

(i) $x - \frac{1}{x} = 3, \quad x \neq 0$

$x - \frac{1}{x} = 3$ ಎರಡೂ ಕಡೆ x ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$x^2 - 1 = 3x$

$x^2 - 3x - 1 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$a = 1, \quad b = -3, \quad c = -1$

ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}, \quad x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

10.5 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ

$b^2 - 4ac$ ಯ ಬೆಲೆಯು, $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದರಿಂದ

$b^2 - 4ac$ ಯನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು Δ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುವರು.

ಹೀಗೆ, $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು

i) $b^2 - 4ac > 0$ ಆದರೆ ಎರಡು ಭಿನ್ನವಾದ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ii) $b^2 - 4ac = 0$ ಆದರೆ ಎರಡು ಸಮನಾದ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

iii) $b^2 - 4ac < 0$ ಆದರೆ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಶೋಧಕ	ಸ್ವಭಾವ
$\Delta = 0$	ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ
$\Delta > 0$	ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ವಿಭಿನ್ನ
$\Delta < 0$	ಊಹಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಉದಾಹರಣೆ 16: $2x^2 - 4x + 3 = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸಿ.

$a = 2, \quad b = -4, \quad c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(2)(3)$

$\Delta = 16 - 24$

$\Delta = -8 < 0$ ಮೂಲಗಳು ಊಹಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಪರಿಹಾರ

1. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸಿ. ಅವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$a = 2, \quad b = -3, \quad c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(5)$

$\Delta = 9 - 40$

$\Delta = -31$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ ಮೂಲಗಳು ಊಹಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

(ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

$a = 3, \quad b = -4\sqrt{3}, \quad c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4(3)(4)$

$\Delta = 48 - 48$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ

ಮೂಲಗಳು $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4\sqrt{3})}{2(3)}, \frac{-(-4\sqrt{3})}{2(3)} = \frac{4\sqrt{3}}{6}, \frac{4\sqrt{3}}{6}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

$a = 2, \quad b = -6, \quad c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4(2)(3)$

$\Delta = 36 - 24$

$\Delta = 12$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಭಿನ್ನ

ಮೂಲಗಳು $= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{-(-6)+\sqrt{12}}{2(2)}, \frac{-(-6)-\sqrt{12}}{2(2)}$

$= \frac{6+\sqrt{12}}{4}, \frac{6-\sqrt{12}}{4}$

$= \frac{6+2\sqrt{3}}{4}, \frac{6-2\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

(i) ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮನಾದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(k - 2) + 6 = 0$

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$

$a = 2, \quad b = k, \quad c = 3$

$b^2 - 4ac = 0$

$(k)^2 - 4(2)(3) = 0$

$k^2 - 24 = 0$

$k^2 = 24$

$k = \pm\sqrt{24} = \pm\sqrt{4 \times 6} = \pm 2\sqrt{6}$

(ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

$kx^2 - 2kx + 6 = 0$

$a = k, \quad b = -2k, \quad c = 6$

$b^2 - 4ac = 0$

$(-2k)^2 - 4(k)(6) = 0$

$4k^2 - 24k = 0$

$4k(k - 6) = 0$

$4k = 0, k - 6 = 0$

$k = 0, \quad k = 6$

(ii) $800m^2$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಉದ್ದವು ಅಗಲದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಮಾವಿನ ತೋಪನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ, ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮಾವಿನ ತೋಟದ ಅಗಲ $= l$

ಮಾವಿನ ತೋಟದ ಉದ್ದ $= 2l$

ಮಾವಿನ ತೋಟದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಉದ್ದ × ಅಗಲ

$(l)(2l) = 800$

$2l^2 = 800$

$l^2 = \frac{800}{2} = 400$

$l = \pm\sqrt{400} = \pm 20$

ಮಾವಿನ ತೋಟದ ಅಗಲ $= l = 20$ m

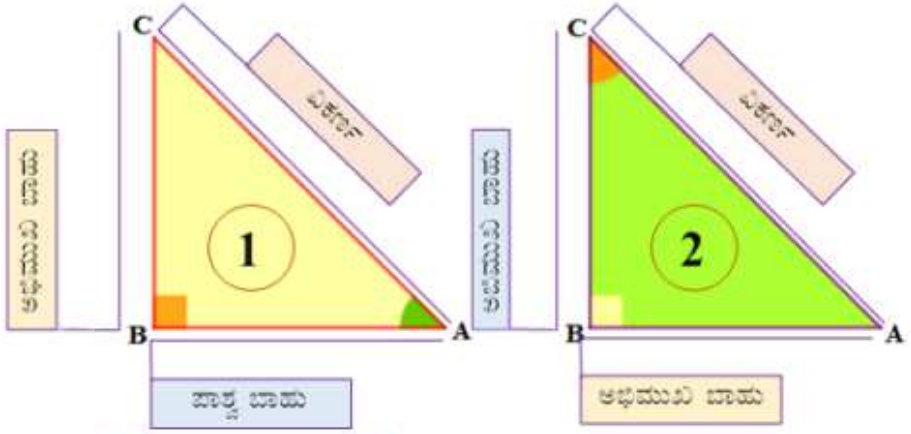
ಮಾವಿನ ತೋಟದ ಉದ್ದ $= 2l = 2 \times 20 = 40$ m

11 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಎಂದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವುದಾಗಿದೆ.

11.2 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.



ಒಟ್ಟು ಆರು ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಅನುಪಾತಗಳಿವೆ

ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು		ತ್ರಿಭುಜ 1	ತ್ರಿಭುಜ 2
SinA	$\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$	$\frac{BC}{AC}$	$\frac{AB}{AC}$
CosA	$\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$	$\frac{AB}{AC}$	$\frac{BC}{AB}$
Tan A	$\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$	$\frac{BC}{AB}$	$\frac{AB}{BC}$
CosecA	$\frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$	$\frac{AC}{BC}$	$\frac{AC}{AB}$
SecA	$\frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{AC}{BC}$
CotA	$\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$	$\frac{AB}{BC}$	$\frac{BC}{AB}$

ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತಗಳು		
$\frac{1}{\text{SinA}}$	$\frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$	**CosecA**
$\frac{1}{\text{CosA}}$	$\frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$	**SecA**
$\frac{1}{\text{Tan A}}$	$\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$	**CotA**
$\frac{1}{\text{CosecA}}$	$\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$	**SinA**
$\frac{1}{\text{SecA}}$	$\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$	**SecA**
$\frac{1}{\text{CotA}}$	$\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$	**CotA**

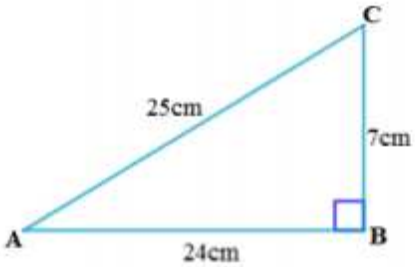
ಪರಿಹಾರ

[ಲೆಕ್ಕ ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಪಠ್ಯದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಅನುಪಾತ ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಅಳತೆಗಳನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ k ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆ $\text{Sin}A = \frac{3}{4}$ ಇದ್ದರೆ, ಅಳತೆಗಳು 3k ಮತ್ತು 4k ಇಲ್ಲಿ k ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ. ಆದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗಲಿ ಎಂಬ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ k = 1ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರುತ್ತೇನೆ]

1. **ΔABC ಯಲ್ಲಿ, B ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. AB = 24cm, BC = 7cm ಆದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

iii) sin A, cos A

iv) sin C, cos C



Δ ABC,ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^\circ$

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (24)^2 + 7^2$

$= (576+49)\ cm^2 = 625\ cm^2$

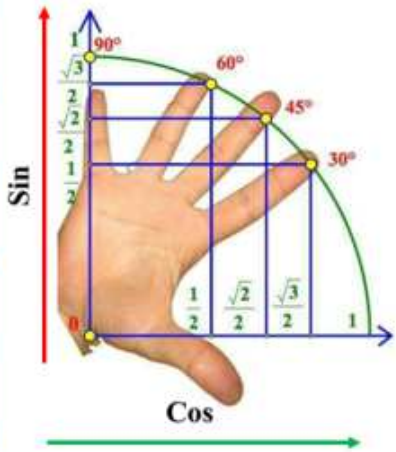
$\Rightarrow AC = 25$

(i) $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$, $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$

(ii) $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$; $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$

$\angle A$	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ND
osec	ND	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
Sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	ND
Cot	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ಕುತೂಹಲಕ್ಕಾಗಿ



ಉದಾಹರಣೆ 6: ΔABC ಯಲ್ಲಿ, B ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. AB = 5cm ಮತ್ತು ACB $= 30^0$ (ಚಿತ್ರ 11.19 ನೋಡಿ) BC ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\text{Tan}30^0 = \frac{5}{BC} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{BC} \Rightarrow 5\sqrt{3}cm$

$\text{Sin}30^0 = \frac{5}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{AC} \Rightarrow AC = 10cm$

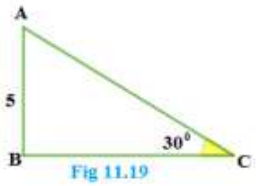


Fig 11.19

ಉದಾಹರಣೆ 7: ΔPQR ನಲ್ಲಿ, $\angle Q = 90^0$, PQ = 3cm, ಮತ್ತು PR = 6cm $\angle QPR$ ಮತ್ತು $\angle PRQ$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\text{Sin}R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \angle R = 30^0 \Rightarrow \angle PRQ = 30^0$

$\therefore \angle QPR = 60^0$

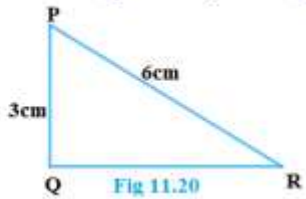


Fig 11.20

ಉದಾಹರಣೆ 8: $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, $0 < A + B \leq 90$, $A > B$ ಆಗಿದ್ದರೆ, A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\sin(A - B) = \frac{1}{2}$ ಆದರೆ $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A - B = 30^0$ (1)

$\cos(A + B) = \frac{1}{2}$ ಆದರೆ $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A + B = 60^0$ (2)

(1) + (2)

$= 2A = 90^0 \Rightarrow A = 45^0$

(2) ರಿಂದ $\Rightarrow 45^0 - B = 30^0 \Rightarrow B = 15^0$

ಪರಿಹಾರ

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $\sin 60^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$

ii) $2\tan^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 60^0$

iii) $\frac{\cos 45^0}{\sec 30^0 + \operatorname{cosec} 30^0}$ iv) $\frac{\sin 30^0 + \tan 45^0 - \operatorname{Cosec} 45^0}{\sec 30^0 + \cos 60^0 + \cot 45^0}$

iv) $\frac{5\cos^2 60^0 + 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0}$

i) $\sin 60^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

ii) $2\tan^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 60^0$

$= 2(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= 2$

iii) $\frac{\cos 45^0}{\sec 30^0 + \operatorname{cosec} 30^0}$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(2+2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}} \times \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{18}}{(2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{6})^2}$

$= \frac{2\sqrt{6}-6\sqrt{2}}{4x2-4x6} = \frac{2(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{8-24} = \frac{2(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{-16} = \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{-8}$

$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$

iv) $\frac{\sin 30^0 + \tan 45^0 - \operatorname{Cosec} 60^0}{\sec 30^0 + \cos 60^0 + \cot 45^0}$

$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1}$

$= \frac{\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}$

$= \frac{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}-4}{4+3\sqrt{3}}$

$= \frac{3\sqrt{3}-4}{4+3\sqrt{3}} \times \frac{4-3\sqrt{3}}{4-3\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}-16-9\sqrt{9}+12\sqrt{3}}{(4)^2-(3\sqrt{3})^2}$

$= \frac{12\sqrt{3}-16-27+12\sqrt{3}}{16-27} = \frac{24\sqrt{3}-43}{-11} = \frac{43-24\sqrt{3}}{11}$

iv) $\frac{5\cos^2 60^0 + 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0}$

$= \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{16}{3} - 1}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{15+64-12}{12}}{1} = \frac{67}{12}$

2. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ, ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) $\frac{2\tan 30^0}{1 + \tan^2 30^0}$

A) $\sin 60^0$ B) $\cos 60^0$ C) $\tan 60^0$ D) $\sin 30^0$

$= \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ans: A) $\sin 60^0$

ii) $\frac{1-\tan^2 45^0}{1+\tan^2 45^0}$

A) $\tan 90^0$ B) 1 C) $\sin 45^0$ D) 0

$\frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

Ans: D) 0

iii) $\sin 2A = 2 \sin A$ ಎಂಬುದು A ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

A) 0 B) 30 C) 45 D) 60

$\sin 2x0 = 2 \sin 0$

$= \sin 0 = 2 \sin 0$

$= 0 = 0 = 0$

Ans: A) 0

iv) $\frac{2\tan 30^0}{1-\tan^2 30^0}$

A) $\cos 60^0$ B) $\sin 60^0$ C) $\tan 60^0$ D) $\sin 30^0$

$\frac{2x\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Ans: C) $\tan 60^0$

3. $\tan (A + B) = \sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\tan (A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $0< A + B \leq 90$; $A > B$ ಆದರೆ, A ಮತ್ತು B ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\tan (A + B) = \sqrt{3} \Rightarrow A + B = 60^0$ (1)

$\tan (A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A - B = 30^0$ (2)

$(2) - (1) \Rightarrow 2B = 30^0 \Rightarrow B = 15^0$

(1) ರಿಂದ $A = 60 - 15 = 45^0$

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ತಿಳಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) $\sin (A + B) = \sin A + \sin B$

$A = 30^0$ ಮತ್ತು $B = 90^0$ ಆಗಿರಲಿ

$\sin (30^0 + 60^0) = \sin 90^0 = 1$

$\sin 30^0 + \sin 60^0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin (A + B) \neq \sin A + \sin B$

∴ ಹೇಳಿಕೆ ತಪ್ಪು.

ii) θ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ $\sin \theta$ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

$\sin 0^0 = 0$, $\sin 90^0 = 1$

∴ ಹೇಳಿಕೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

iii) θ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ $\cos \theta$ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

$\text{Cos } 0^0 = 1$, $\text{Cos } 90^0 = 0$

θ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ $\cos \theta$ ಬೆಲೆಯು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿದೆ.

∴ ಹೇಳಿಕೆ ತಪ್ಪು.

iv) θ ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $\sin \theta = \cos \theta$ ಆಗಿದೆ

$\sin 30^0 = \frac{1}{2}$; $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$θ ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $\sin \theta = \cos \theta$ ಆಗಿಲ್ಲ

∴ ಹೇಳಿಕೆ ತಪ್ಪು.

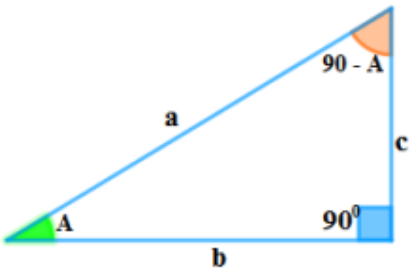
v) $A = 0^0$ ಗೆ cot A ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲ್ಲ

ಹೇಳಿಕೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆ.

11.4 ಪೂರಕ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 90 ಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವು ಪೂರಕ ಕೋನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಅನುಪಾತಗಳು		ಪೂರಕ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಅನುಪಾತಗಳು
SinA	$\frac{c}{a}$	Cos(90-A)
CosA	$\frac{b}{a}$	Sin(90-A)
TanA	$\frac{c}{b}$	Cot(90-A)
CosecA	$\frac{a}{c}$	Sec(90-A)
SecA	$\frac{a}{b}$	Cosec(90-A)
CotA	$\frac{b}{c}$	Tan(90-A)



ಉದಾಹರಣೆ 9: ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ :- $\frac{\tan 65^0}{\cot 25^0}$

$\frac{\tan 65^0}{\cot 25^0} = \frac{\tan (90-25)^0}{\cot 25^0} = \frac{\cot 25^0}{\cot 25^0} = 1$

ಉದಾಹರಣೆ 10: $\sin 3A = \cos (A - 26^0)$, 3A ಲಘು ಕೋನವಾದರೆ, A ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತದ ಪ್ರಕಾರ $\sin 3A = \cos (A - 26)$

$\Rightarrow \text{Cos}(90-3A) = \cos(A-26^0)$

$\Rightarrow 90-3A = A-26^0$

$\Rightarrow 90 + 26 = A + 3A$

$\Rightarrow 116 = 4A$

$\Rightarrow A = 29^0$

ಉದಾಹರಣೆ 11: $\cot 85^0 + \cos 75^0$ ನ್ನು, 0^0 ಮತ್ತು 45^0 ನಡುವಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\cot 85^0 = \text{Cot}(90-5^0) = \tan 5^0$

$\text{Cos}75^0 = \text{Cos}(90 - 15^0) = \text{Sin}15^0$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

1. ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ:- i) $\frac{\sin 18^0}{\cos 72^0}$ ii) $\frac{\sin 26^0}{\cos 64^0}$ iii) $\cos 48^0 - \sin 42^0$ vi) $\text{cosec}31^0 - \sec 59^0$
2. i) $\tan 48^0 \tan 23^0 \tan 42^0 \tan 67^0 = 1$
   ii) $\cos 38^0 \cos 52^0 - \sin 38^0 \sin 52^0 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
3. $\tan 2A = \cot (A - 180)$ ಮತ್ತು 2A ಲಘು ಕೋನವಾಗಿದೆ. A ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. If $\tan A = \cot B$, $A + B = 90^0$ 0 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ
5. $\sec 4A = \text{cosec} (A - 20^0)$ ಮತ್ತು 4A ಒಂದು ಲಘುಕೋನ ಆದರೆ A ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ΔABC ಯ ಒಳಕೋನಗಳಾದರೆ, $\sin\frac{(B+C)}{2} = \cos\frac{A}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
7. $\text{Sin}67^0 + \cos 75^0$ ನ್ನು, 0^0 ಮತ್ತು 45^0 ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

1. ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ:- i) $\frac{\sin 18^0}{\cos 72^0}$ ii) $\frac{\sin 26^0}{\cos 64^0}$ iii) $\cos 48^0 - \sin 42^0$ vi) $\text{cosec}31^0 - \sec 59^0$

i) $\frac{\sin 18^0}{\cos 72^0}$

$\frac{\sin 18^0}{\cos 72^0} = \frac{\sin(90-72^0)}{\cos 72^0} = \frac{\cos 72^0}{\cos 72^0} = 1$

ii) $\frac{\sin 26^0}{\cos 64^0}$

$\frac{\sin 26^0}{\cos 64^0} = \frac{\sin(90-64^0)}{\cos 64^0} = \frac{\cos 64^0}{\cos 64^0} = 1$

iii) $\cos 48^0 - \sin 42^0$

$\cos 48^0 - \sin(90-48^0) = \cos 48^0 - \cos 48^0 = 0$

vi) $\text{cosec}31^0 - \sec 59^0$

$\text{cosec}31^0 - \sec 59^0 = \text{cosec}31^0 - \sec(90 - 31^0) = \text{cosec}31^0 - \text{cosec}31^0 = 0$

2. i) $\tan 48^0 \tan 23^0 \tan 42^0 \tan 67^0 = 1$
ii) $\cos 38^0 \cos 52^0 - \sin 38^{=0} \sin 52^0 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

i) $\tan 48^0 \tan 23^0 \tan 42^0 \tan 67^0 = 1$

LHS $= \tan 48^0 \tan 23^0 \tan(90-48^0) \tan(90-23^0)$

$= \tan 48^0 \tan 23^0 \cot 48^0 \cot 23^0$

$= \tan 48^0 \text{ x } \tan 23^0 \text{ x } \frac{1}{\tan 48^0} \text{ x} \frac{1}{\tan 23^0} = 1$

ii) $\cos 38^0 \cos 52^0 - \sin 38^0 \sin 52^0 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

LHS $= \cos 38^0 \cos 52^0 - \sin 38^0 \sin 52^0$

$= \cos 38^0 \cos 52^0 - \sin(90 - 52^0) \sin(90-38)^0$

$= \cos 38^0 \cos 52^0 - \cos 52^0 \cos 38^0$

$= \cos 38^0 \cos 52^0 - \cos 52^0 \cos 38^0$

= 0 RHS

3. $\tan 2A = \cot (A - 180)$ ಮತ್ತು 2A ಲಘು ಕೋನವಾಗಿದೆ. A ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\tan 2A = \cot (A - 18^0)$

$\Rightarrow \cot(90-2A) = \cot(A-18^0)$

$\Rightarrow 90^0 - 2A = A-18^0$

$\Rightarrow 3A = 108^0 \quad \Rightarrow A = 36^0$

4. **If tan A = cot B, A + B = 90^0 0 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.**

LHS = tan A = cot B

$\Rightarrow$ cot(90-A) = cotB

$\Rightarrow 90 - A = B \Rightarrow A + B = 90^0$

5. **sec 4A = cosec (A - 20^0) ಮತ್ತು 4A ಒಂದು ಲಘುಕೋನ ಆದರೆ A ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

sec 4A = cosec (A - 20^0)

$\Rightarrow$cosec(90 – 4A) = cosec(A – 20^0)

$\Rightarrow 90 - 4A = A - 20^0$

$\Rightarrow 5A = 110$

$\Rightarrow A = 22^0$

6. **A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ΔABC ಯ ಒಳಕೋನಗಳಾದರೆ, $\sin\frac{(B+C)}{2} = \cos\frac{A}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.**

A , B ಮತ್ತು C ಗಳು ΔABC ಯ ಒಳಕೋನಗಳು

$\Rightarrow A + B + C = 180^0$

$\Rightarrow B + C = 180 - A$

$\Rightarrow \frac{B+C}{2} = \frac{180 - A}{2} \quad \Rightarrow \frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2}$

$\Rightarrow \sin\frac{(B+C)}{2} = \sin\left(90 - \frac{A}{2}\right)$

$\Rightarrow \sin\frac{(B+C)}{2} = \cos\frac{A}{2}$

7. **$\text{Sin}67^0 + \cos75^0$ ನ್ನು, 0^0 ಮತ್ತು 45^0 ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.**

$\text{Sin}67^0 + \cos75^0$

$= \sin(90-23^0) + \cos(90-15^0)$

$= \cos 23^0 + \sin 15^0$

11.5 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು

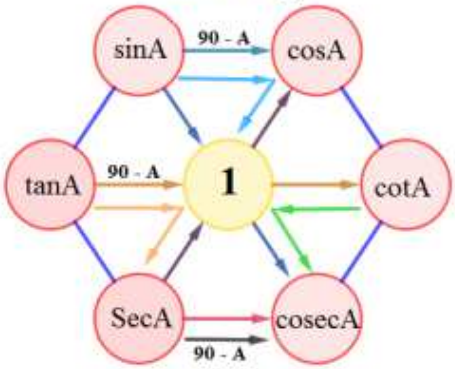
ಒಂದು ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಕುತೂಹಲಕ್ಕಾಗಿ

$\text{Sin}^2A + \cos^2A = 1$

$\tan^2 + 1 = \sec^2A$

$1 + \cot^2A = \text{cosec}^2A$



ನೆನಪಿಡಿ

$\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$

$\frac{\cos A}{\sin A} = \cot A$

ಉದಾಹರಣೆ 12: cos A, tan A ಮತ್ತು sec A ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು sin A ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\cos^2A + \sin^2A = 1$

$\Rightarrow \cos^2A = 1 - \sin^2A$

$\cos A = \sqrt{1 - \sin 2A}$

$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \Rightarrow \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin 2A}}$

$\sec A = \frac{1}{\cos A} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \sin 2A}}$

ಉದಾಹರಣೆ 13: sec A (1 - sin A)(sec A + tan A) = 1 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಎಡಭಾಗ = sec A (1 - sin A)(sec A + tan A)

$= \frac{1}{\cos A}(1 - \sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$

$= \left(\frac{1 - \sin A}{\cos A}\right)\left(\frac{1 + \sin A}{\cos A}\right)$

$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1$

ಉದಾಹರಣೆ 14: $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$$

$$= \frac{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)} = = \frac{\frac{1}{\sin A} - 1}{\frac{1}{\sin A} + 1} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$$

ಉದಾಹರಣೆ 15: $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಬಳಸಿ, $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}} = \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1} \times \frac{\tan\theta - \sec\theta}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(\tan\theta - \sec\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

ಪರಿಹಾರ

1. sinA, secA ಮತ್ತು tanA ಈ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು cotA ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

$\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 A} = 1 + \cot^2 A$

$\Rightarrow \sin^2 A = \frac{1}{1 + \cot^2 A}$

$\Rightarrow \sin A = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}$

$\sin^2 A = \frac{1}{1 + \cot^2 A}$

$\Rightarrow 1 - \cos^2 A = \frac{1}{1 + \cot^2 A}$

$\Rightarrow \cos^2 A = 1 - \frac{1}{1 + \cot^2 A}$

$\Rightarrow \cos^2 A = \frac{1 + \cot^2 A - 1}{1 + \cot^2 A}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sec^2 A} = \frac{\cot^2 A}{1 + \cot^2 A}$

$\Rightarrow \sec^2 A = \frac{1 + \cot^2 A}{\cot^2 A}$

$\Rightarrow \sec A = \frac{\pm\sqrt{1 + \cot^2 A}}{\cot A}$

$\Rightarrow \tan A = \frac{1}{\cot A}$

3. ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ:

i) $\frac{\sin^2 63^0 + \sin^2 27^0}{\cos^2 17^0 + \cos^2 73^0}$

ii) $\sin 25^0 \cos 65^0 + \cos 25^0 \sin 65^0$

i) $\frac{\sin^2 63^0 + \sin^2 27^0}{\cos^2 17^0 + \cos^2 73^0}$

$= \frac{\sin^2(90-27^0) + \sin^2 27^0}{\cos^2(90-73^0) + \cos^2 73^0}$

$= \frac{\cos^2 27^0 + \sin^2 27^0}{\sin^2 73^0 + \cos^2 73^0}$

$= \frac{1}{1} = 1$

ii) $\sin 25^0 \cos 65^0 + \cos 25^0 \sin 65^0$

$\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

$= \sin(90°-25°) \cos 65° + \cos(90°-65°) \sin 65°$

$= \cos 65° \cos 65° + \sin 65° \sin 65°$

$= \cos^2 65° + \sin^2 65° = 1$

4. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$

A) 1 B) 9 C) 8 D) 0

$9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$

$= 9 (\sec^2 A - \tan^2 A)$

$= 9 \times 1 = 9$ $[\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1]$

Ans: B) 9

ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta) =$

A) 0 B) 1 C) 2 D) -1

$(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$

$= \left(1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right)$

$= \frac{\cos\theta + \sin\theta + 1}{\cos\theta} \times \frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta}$

$= \frac{(\cos\theta + \sin\theta)^2 - 1}{\cos\theta . \sin\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta - 1}{\cos\theta . \sin\theta}$

$= \frac{1 + 2\cos\theta\sin\theta - 1}{\cos\theta . \sin\theta}$

$= \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta . \sin\theta} = 2$

Ans C) 2

iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) =$

A) secA B) sinA C) cosecA D) cosA

$(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$

$(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$

$= \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \sin A)$

$= \left(\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \sin A)$

$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos A}$

$= \frac{\cos^2 A}{\cos A} = \cos A$

Ans: D) cosA

iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} =$

A) $\sec^2 A$ B) -1 C) $\cot^2 A$ D) $\tan^2 A$

$$\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\cot^2 A}}{1+\cot^2 A}$$

$$= \frac{\cot^2 A+1}{\cot^2 A} \times \frac{1}{1+\cot^2 A}$$

$$= \frac{1}{\cot^2 A} = \tan^2 A$$

Ans: D) $\tan^2 A$

5. ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

i) $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

L.H.S. = $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2$

$= (\text{cosec}^2\theta + \cot^2\theta - 2\text{cosec}\,\theta\cot\theta)$

$$= \left(\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{1+\cos^2\theta-2\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\right)$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \text{ RHS}$$

ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

L.H.S. = $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A}$

$$= \frac{\cos^2 A+(1+\sin A)^2}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A+1+\sin^2 A+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$= \frac{1+1+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$= \frac{2+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$= \frac{2(1+\sin A)}{(1+\sin A)\cos A} = \frac{2}{\cos A}$$

$= 2\sec A =$ R.H.S.

iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1+\sec\theta.\cos\theta$

[ಸುಳುವು: $\sin\theta$ ಮತ್ತು $\cos\theta$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಿ]

L.H.S. = $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$

$$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{(\sin\theta-\cos\theta)}\left[\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{(\sin\theta-\cos\theta)}\left[\frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\cos\theta.\sin\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{(\sin\theta-\cos\theta)}\left[\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)}{\cos\theta.\sin\theta}\right]$$

$$= \left[\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)}{\cos\theta.\sin\theta}\right]$$

$$= \left[\frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta.\sin\theta}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{\cos\theta.\sin\theta} + 1\right]$$

$= 1 + \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta =$ R.H.S.

iv) $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A} = 2\sec A$

[ಸುಳುವು: ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ]

L.H.S. $= \frac{1+\sec A}{\sec A}$

$= \frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} \quad = \frac{\frac{\cos A+1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$

$= \frac{\cos A+1}{\cos A} \times \frac{\cos A}{1}$

$= \cos A + 1$

R.H.S. $= \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

$= \frac{(1+\cos A)(1-\cos A)}{1-\cos A}$

$= \cos A + 1$

L.H.S. = R.H.S.

v) $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \text{cosec } A + \cot A$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

L.H.S. $= \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1}$

ಛೇದ ಮತ್ತು ಅಂಶಗಳಿಗೆ $\sin A$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ.

$= \frac{\frac{\cos A - \sin A + 1}{\sin A}}{\frac{\cos A + \sin A - 1}{\sin A}}$

$= \frac{\cot A - 1 + \text{cosec} A}{\cot A + 1 - \text{cosec} A}$

$= \frac{\cot A - \text{cosec}^2 A + \cot^2 A + \text{cosec} A}{\cot A + 1 - \text{cosec} A}$ (using $\text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$)

$= \frac{\cot A + \text{cosec} A - (\text{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{\cot A + 1 - \text{cosec} A}$

$= \frac{(\cot A + \text{cosec} A)(1 - \text{cosec} A - \cot A)}{1 - \text{cosec} A + \cot A}$

$= \cot A + \text{cosec } A =$ R.H.S.

vi) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

$= \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A} \times \frac{1+\sin A}{1+\sin A}}$

$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$

$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}} = \frac{1+\sin A}{\cos A}$

$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \sec A + \tan A =$ RHS

vii) $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

L.H.S. $= \frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta[1 - 2(1-\cos^2\theta)]}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta[1 - 2 + 2\cos^2\theta]}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta[2\cos^2\theta - 1]}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \tan\theta =$ R.H.S.

viii) $(\sin A + \text{cosec } A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

L.H.S. $= (\sin A + \text{cosec } A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$

$= \sin^2 A + \text{cosec}^2 A + 2 \sin A \text{ cosec } A + \cos^2 A + \sec^2 A + 2 \cos A \sec A$

$= (\sin^2 A + \cos^2 A) + 2 \sin A\left(\frac{1}{\sin A}\right) + 2 \cos A\left(\frac{1}{\cos A}\right) + 1 + \tan^2 A + 1 + \cot^2 A$

$= 1 + 2 + 2 + 2 + \tan^2 A + \cot^2 A$

$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A =$ R.H.S.

ix) $(\text{cosec } A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

[ಸುಳಿವು: ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ]

L.H.S. $= (\text{cosec } A - \sin A)(\sec A - \cos A)$

$= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A} - \cos A\right)$

$= \left(\frac{\cos^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{\sin^2 A}{\cos A}\right)$

$= \cos A \sin A$

R.H.S. $= \frac{1}{\tan A + \cot A}$

$= \frac{1}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A}}$

$= \frac{1}{\frac{1}{\cos A \sin A}}$

$= \cos A . \sin A$

L.H.S. = R.H.S.

x) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

L.H.S. $= \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$

$= \frac{1+\tan^2 A}{1+\frac{1}{\tan^2 A}} = \frac{1+\tan^2 A}{\frac{\tan^2 A+1}{\tan^2 A}}$

$= \frac{1+\tan^2 A}{\frac{1+\tan^2 A}{\tan^2 A}} = \tan^2 A$

$\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{1-\frac{1}{\tan A}}\right)^2$

$= \left(\frac{1-\tan A}{\frac{\tan A-1}{\tan A}}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{\frac{-(1-\tan A)}{\tan A}}\right)^2$

$= (-\tan A)^2 = \tan^2 A$

ಸಾರಾಂಶ:

1. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^0$

SinA	$\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$
CosA	$\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$
Tan A	$\frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$

$\frac{1}{\text{SinA}}$	$\frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$	**CosecA**
$\frac{1}{\text{CosA}}$	$\frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$	**SecA**
$\frac{1}{\text{Tan A}}$	$\frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$	**CotA**

3. ಲಘುಕೋನದ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಆ ಕೋನದ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

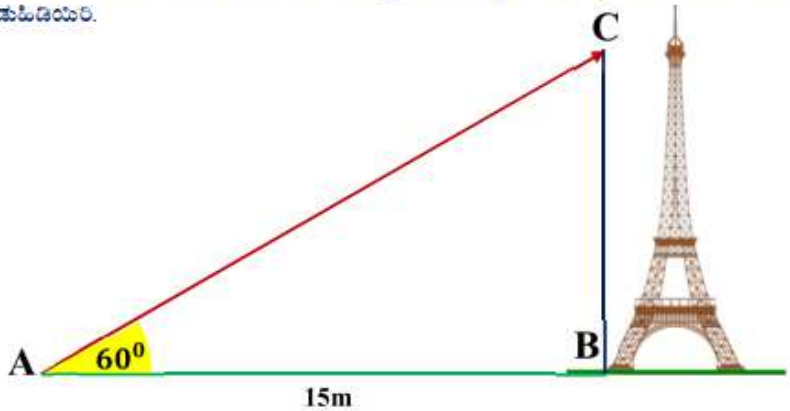
5. sin A ಅಥವಾ cos A ಬೆಲೆಯು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಆದರೆ, sec A ಅಥವಾ cosec A ಬೆಲೆಯು ಯಾವಾಗಲು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ 1 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

6. $\sec^2 A - \tan^2 A = 1, 0^0 \le A < 90^0$

$\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A, 0^0 \le A < 90^0$

12 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳು

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ಗೋಪುರವು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ನೇರವಾಗಿ ನಿಂತಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ 15m ದೂರದ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60^0 ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = BC ಆಗಿರಲಿ. AB = 15m

$\tan 60^0 = \frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{BC}{15}$

$\Rightarrow BC = 15\sqrt{3}$ m

ಪರಿಹಾರ

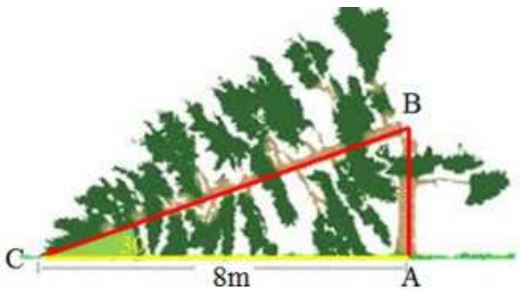
1. ಒಬ್ಬ ಸರ್ಕಸ್‌ನ ಕಲಾವಿದನು, ನೇರ ಸ್ತಂಭದಿಂದ ಹಿಗ್ಗಿಸಿ ನೆಲಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿರುವ 20m ಉದ್ದದ ಹಗ್ಗದ ಮೇಲೆ ಹತ್ತುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ನೆಲದೊಂದಿಗೆ ಹಗ್ಗದ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 30^0 ಆದರೆ, ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 12.11 ನೋಡಿ)

ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ BC

$\text{Sin}30^0 = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{20} \Rightarrow BC = 10m$

∴ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ BC = 10m

2. ಬಿರುಗಾಳಿಗೆ ಸಿಕ್ಕಿ ಒಂದು ಮರವು ಮುರಿದು, ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿದಾಗ ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 30 ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ ಮತ್ತು ಮರದ ತುದಿಯು ಮರದ ಬುಡದಿಂದ 8m ದೂರದಲ್ಲಿ ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮುರಿದು ಬೀಳುವ ಮುನ್ನ ಮರದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟಿತ್ತೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



BC ಯು ಮರದ ಮುರಿದ ಭಾಗವಾಗಿರಲಿ.

∴ ಮರದ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ = AB+BC

$\cos 30° = \frac{AC}{BC}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{BC}$

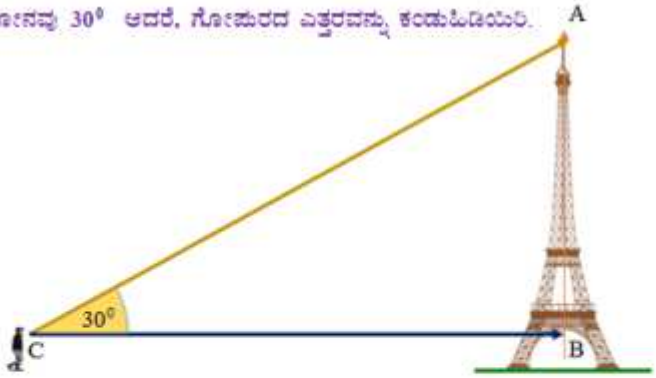
$\Rightarrow BC = \frac{16}{\sqrt{3}}$

$\tan 30° = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{8} \Rightarrow AB = \frac{8}{\sqrt{3}}$ m

∴ ಮರದ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ = AB+ BC = $\frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$m

4. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ 30m ದೂರದ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಗೋಪುರದ ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30^0 ಆದರೆ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = AB ಆಗಿರಲಿ.

ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ BC = 30m

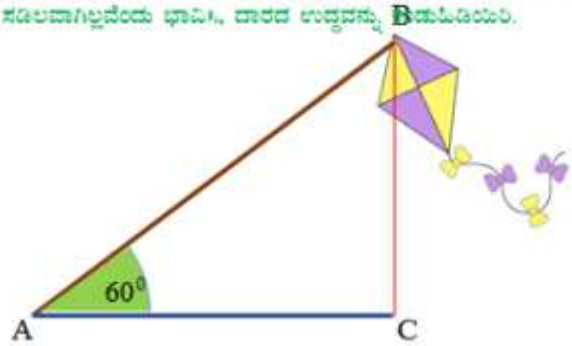
ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ,

$\tan 30^0 = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{30}$

$\Rightarrow AB = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}m$

5. ಗಾಳಿಪಟವೊಂದು ನೆಲದ ಮೇಲಿನಿಂದ 60m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಹಾರಾಡುತ್ತಿದೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಲಾದ ದಾರವನ್ನು ತಾತ್ಕಾಲಿಕವಾಗಿ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಗೂಟಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿದೆ. ದಾರವು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 60^0 ಯ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ. ದಾರವು ಸಡಿಲವಾಗಿಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ, ದಾರದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಗಾಳಿಪಟದ ಎತ್ತರ BC = 60m

ದಾರದ ಉದ್ದ = AB ಆಗಿರಲಿ.

ಲಂಬಕೋನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ,

$\sin 60^0 = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{AB}$

$\Rightarrow AB = \frac{120}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}m$

13.2 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿ

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ $[\, i = 1 \text{ to } n \,]$

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10ನೇ ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 100 ಅಂಕಗಳ ಗಣಿತ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
y	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

x_i	f_i	$x_i f_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	96
	$\sum f_i = 30$	$\sum x_i f_i = 1779$

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.53$

ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ "ನೇರ ವಿಧಾನ" :

ವರ್ಗಾಂತರ	10–25	25–40	40–55	55–70	70–85	85–100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	7	6	6	6

ವರ್ಗಾಂತರ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	ಮಧ್ಯಬಿಂದು (x_i)	$f_i x_i$
10–25	2	17.5	35.0
25–40	3	32.5	97.5
40–55	7	47.5	332.5
55–70	6	62.5	375.0
70–85	6	77.5	465.0
85–100	6	92.5	555.0
	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860$

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30} = 62$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ:

$d_i = x_i - a$ [ಇಲ್ಲಿ $a = 47.5$]

ವರ್ಗಾಂತರ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f_i)	ಮಧ್ಯಬಿಂದು (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10–25	2	17.5	–30	–60
25–40	3	32.5	–15	–45
40–55	7	47.5	0	0
55–70	6	62.5	15	90
70–85	6	77.5	30	182
85–100	6	92.5	45	270
	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$

ಪರಿಹಾರ

1. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಂದು ತಂಡವು ತಮ್ಮ 'ಪರಿಸರ ಅರಿವು ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ'ದ ಭಾಗವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿ ಒಂದು ಜನವಸತಿ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ 20 ಮನೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿತು. ಪ್ರತಿ ಮನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14
ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1	2	1	5	6	2	3

ನೀವು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಯಾವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೀರಿ ಮತ್ತು ಏಕೆ?

a = 7 , h = 2

ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x_i	ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 7$	$u_i = \frac{x_i - 20}{2}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
0–2	1	1	–6	–3	1	–6	–3
2–4	2	3	–4	–2	6	–8	–4
4–6	1	5	–2	–1	5	–2	–1
6–8	5	7	0	0	35	0	0
8–10	6	9	2	1	54	12	6
10–12	2	11	4	2	22	8	4
12–14	3	13	6	3	39	18	9
	$\sum f_i = 20$			0	162	22	11

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $\sum f_i = 35$, $\sum f_i x_i = 162$, $\sum f_i d_i = 20$, $\sum f_i u_i = 11$

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1620}{20} = 8.1$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 7 + \frac{22}{20} = 7 + 1.1 = 8.1$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h = 7 + \frac{11}{20} \times 2 = 7 + 1.1 = 8.1$

[ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಜಾಸ್ತಿ ಇಲ್ಲದ ಕಾರಣ ನೇರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು]

2. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ 50 ನೌಕರರ ದಿನಗೂಲಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

ದಿನಗೂಲಿ ರೂಗಳಲ್ಲಿ	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200
ನೌಕರರ ಸಂಖ್ಯೆ	12	14	8	6	10

ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ನೌಕರರ ಸರಾಸರಿ ದಿನಗೂಲಿಯನ್ನು ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

a = 75.5, h = 3

ದಿನಗೂಲಿ ರೂಗಳಲ್ಲಿ x_i	ನೌಕರರ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 150$	$u_i = \frac{x_i - 150}{20}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
100–120	12	110	–40	–2	1320	–480	–24
120–140	14	130	–20	–1	1820	–280	–14
140–160	8	150	0	0	1200	0	0
160–180	6	170	20	1	1020	120	6
180–200	10	190	40	2	1900	400	20
	$\sum f_i = 50$				7260	–240	–12

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $\sum f_i = 50$, $\sum f_i x_i = 7260$, $\sum f_i d_i = -240$, $\sum f_i u_i = -12$

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{7260}{50} = 145.2$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 150 + \frac{-240}{50} = 150 - 4.8 = 145.2$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h = 150 + \frac{-12}{50} \times 20 = 150 - 4.8 = 145.2$

[ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ.]

3. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಮಕ್ಕಳ ದಿನನಿತ್ಯದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣವನ್ನು **(Pocket allowance)** ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಸರಾಸರಿ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣವು ರೂ **18** ಆದರೆ ಬಿಟ್ಟು ಹೋಗಿರುವ ಆವೃತ್ತಿ **f** ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದಿನ ನಿತ್ಯದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣ(ರೂ)	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	6	9	13	f	5	4

a = 18 , h = 2

ದಿನ ನಿತ್ಯದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣ (ರೂ x_i	ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 18$	$u_i = \frac{x_i - 18}{2}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
11–13	7	12	–6	–3	84	–42	–21
13–15	6	14	–4	–2	84	–24	–12
15–17	9	16	–2	–1	144	–18	–9
17–19	13	18	0	0	234	0	0
19–21	f	20	2	1	20f	2f	1f
21–23	5	22	4	2	110	20	10
23–25	4	24	6	3	96	24	12
	$\sum f_i$ =44+ f				752+20f	–40+2f	–20+ f

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $\sum f_i = 44 + f$, $\sum f_i x_i = 752 + 20f$, $\sum f_i d_i = -40 + 2f$, $\sum f_i u_i = -20 + f$

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$18 = \frac{752 + 20f}{44 + f} \Rightarrow 18(44 + f) = 752 + 20f$

$\Rightarrow 792 + 18f = 752 + 20f$

$\Rightarrow 40 = 2f \Rightarrow f = 20$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$18 = 18 + \frac{-40 + 2f}{44 + f} \Rightarrow 0 = (-40 + 2f)$

$\Rightarrow 2f = 40 \Rightarrow f = 20$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$\Rightarrow 18 = 18 + \frac{-20 + f}{44 + f} \times 20$

$\Rightarrow -20 + f = 0 \Rightarrow f = 20$

[ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು]

4. ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವೈದ್ಯರ ಬಳಿ 30 ಮಹಿಳೆಯರು ತಪಾಸಣೆಗೊಳಗಾದರು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಅವರ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಲಾಯಿತು. ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಈ ಮಹಿಳೆಯರ ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷದ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	65–68	68–71	71–74	74–77	77–80	80–83	83–86
ಮಹಿಳೆಯರ ಸಂಖ್ಯೆ	2	4	3	8	7	4	2

a = 75.5 , h = 3

ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x_i	ಮಹಿಳೆಯರ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 75.5$	$u_i = \frac{x_i - 75.5}{3}$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
65–68	2	66.5	–9	–3	–18	–6
68–71	4	69.5	–6	–2	–24	–8
71–74	3	72.5	–3	–1	–9	–3
74–77	8	75.5	0	0	0	0
77–80	7	78.5	3	1	21	7
80–83	4	81.5	6	2	24	8
83–86	2	84.5	9	3	18	6
	$\sum f_i = 30$				12	4

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $\sum f_i = 30, \sum f_i d_i = 12, \sum f_i u_i = 4$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = 75.5 + \frac{12}{30} = 75.5 + 0.4 = 75.9$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h = 75.5 + \frac{4}{30} \times 3 = 75.5 + 0.4 = 75.9$

[ಇಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಕಷ್ಟಕರವಾಗಿದ್ದ ಕಾರಣ ನೇರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ ಉಳಿದೆರಡು ವಿಧಾನ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ]

5. ಒಂದು ಚಿಲ್ಲರೆ ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಹಣ್ಣು ಮಾರಾಟಗಾರರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮಾರುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದವು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ವಿತರಣೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	50–52	53–55	56–58	59–61	62–64
ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	15	110	135	115	25

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನೀವು ಯಾವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ?

$a = 57, h = 3$

ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x_i	ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 150$	$u_i = \frac{x_i - 75.5}{3}$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
50–52	15	51	–6	–2	–90	–30
53–55	110	54	–3	–1	–330	–110
56–58	135	57	0	0	0	0
59–61	115	60	3	1	345	115
62–64	25	63	6	2	150	50
	$\sum f_i = 400$				75	25

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum d_i x_i}{\sum f_i}$

$= 57 + \frac{75}{400} = 57 + 0.1875 = 57.1875 \approx 57.19$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= 57 + \frac{25}{400} \times 3 = 57 + 0.1875 = 57.1875 \approx 57.19$

ಇಲ್ಲಿ ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ ಸೂಕ್ತ.

6. ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 25 ಕುಟುಂಬಗಳ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯದ ಆಹಾರದ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ದಿನ ನಿತ್ಯದ ವೆಚ್ಚ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	100–150	150–200	200–250	250–300	300–350
ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	5	12	2	2

ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯದ ಆಹಾರದ ವೆಚ್ಚದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a = 225, h = 50$

ದಿನ ನಿತ್ಯದ ವೆಚ್ಚ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ) x_i	ವೆಚ್ಚಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 150$	$u_i = \frac{x_i - 75.5}{3}$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
100–150	4	125	–100	–2	–400	–8
150–200	5	175	–50	–1	–250	–5
200–250	12	225	0	0	0	0
250–300	2	275	50	1	100	2
300–350	2	325	100	2	200	4
	$\sum f_i = 25$				–350	–7

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$= 225 + \frac{-350}{25} = 225 - 14 = 211$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= 225 + \frac{-7}{25} \times 50 = 225 - 14 = 211$

ಇಲ್ಲಿ ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ.

8. ಒಬ್ಬ ತರಗತಿ ಶಿಕ್ಷಕನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ವಾರ್ಷಿಕ ಗೈರು ಹಾಜರಾತಿಯ ದಾಖಲೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಗೈರು ಹಾಜರಾತಿಯ ದಿನಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0 – 6	6 – 10	10 – 14	14 – 20	20 – 28	28 – 38	38 – 40
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	11	10	7	4	4	3	1

ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x_i	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$f_i x_i$
0–6	11	3	33
6–10	10	8	80
10–14	7	12	84
14–20	4	17	68
20–28	4	24	96
28–38	3	33	99
38–40	1	39	39
	$\sum f_i = 40$		499

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $\sum f_i = 40$. $\sum f_i x_i = 499$.

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{499}{40} = 12.475$

9. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 35 ನಗರಗಳ ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು (ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ) ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣ %	45–55	55–65	65–75	75–85	85–95
ನಗರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	3	10	11	8	3

ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣ x_i	ನಗರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$f_i x_i$	$d_i = x_i - 70$	$f_i d_i$
45–55	3	50	150	–20	–60
55–65	10	60	600	–10	–100
65–75	11	70	770	0	0
75–85	8	80	640	10	80
85–95	3	90	270	20	60
	$\sum f_i = 35$		2430	0	–20

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $\sum f_i = 35$, $\sum f_i x_i = 2430$,

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಸರಾಸರಿ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2430}{35} = 69.43$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum d_i x_i}{\sum f_i}$

$= 70 + \frac{-20}{35} = 60.43$

13.3 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕ (ರೂಢಿಬೆಲೆ)

ಬಹುಲಕ ಅಥವಾ ರೂಢಿಬೆಲೆಯು ದತ್ತ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಇರುವ ಮೌಲ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: 10 ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಬೌಲರನು ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0	1	2	3	4	5	6
ಪಂದ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1	1	3	2	1	1	1

ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಬೌಲರನು ಗರಿಷ್ಠ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ 3) ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 2

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$l =$ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ

$h =$ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಬೌಲರನು ಗರಿಷ್ಠ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ 3) ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 2

$f_1 =$ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

$f_0 =$ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ, ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

$f_2 =$ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ, ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಒಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತಂಡವು ಒಂದು ಜನವಸತಿ ಪ್ರದೇಶದ 20 ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಮೀಕ್ಷೆ ನಡೆಸಿತು. ಇದರಂತೆ ಒಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿರುವ ಸದಸ್ಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಕುಟುಂಬದ ಗಾತ್ರ	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
ಕುಟುಂಬದ ಸಂಖ್ಯೆ	7	8	2	2	1

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಯು 8 ಆಗಿದ್ದು ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ವರ್ಗಾಂತರವು 3 – 5 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವು 3 – 5 ಆಗಿದೆ.

ಈಗ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ = 3 – 5,

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ $l = 3$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ $h = 2$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 8$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 7$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 2$

ಈಗ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸೋಣ:

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

ಬಹುಲಕ $= 3 + \left[\frac{8-7}{2(8)-7-2}\right] \times 2$

ಬಹುಲಕ $= 3 + \left[\frac{1}{16-9}\right] \times 2$

ಬಹುಲಕ $= 3 + \frac{2}{7}$

ಬಹುಲಕ $= 3.286$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 3.286 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಉದಾಹರಣೆ 1 ರ ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ರಲ್ಲಿ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕ ಹಂಚಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದಲ್ಲದೆ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	10–25	25–40	40–55	55–70	70–85	85–100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	7	6	6	6

ಪರಿಹಾರ: ಉದಾಹರಣೆ 1 ರ ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ನ್ನು ನೋಡಿ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯು (ಅಂದರೆ, 7) ವರ್ಗಾಂತರ 40 – 45 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 40$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 15$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 7$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 3$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 6$

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

ಬಹುಲಕ $= 40 + \left[\frac{7-3}{2(7)-3-6}\right] \times 15$

ಬಹುಲಕ $= 40 + \left[\frac{4}{14-9}\right] \times 15$

ಬಹುಲಕ $= 40 + \frac{4}{5} \times 15$

ಬಹುಲಕ $= 40 + 12$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 52 ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 13.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ರೋಗಿಗಳ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	5 – 15	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65
ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	11	21	23	14	5

ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಈ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

2. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು 225 ವಿದ್ಯುತ್ ಉಪಕರಣಗಳ ಬಿಡಿಭಾಗಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ) ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	0 – 20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	10	35	52	61	38	29

ಉಪಕರಣಗಳ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳ ಬಾಳಿಕೆಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

1. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ರೋಗಿಗಳ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	5 – 15	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65
ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	11	21	23	14	5

ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಈ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

ರೋಗಿಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯು =23

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 35 – 45 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 35$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 10$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 23$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 21$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 14$

$$\text{ಬಹುಲಕ} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

$$\text{ಬಹುಲಕ} = 35 + \left[\frac{23 - 21}{2(23) - 21 - 14}\right] \times 10$$

$$\text{ಬಹುಲಕ} = 35 + \left[\frac{2}{46 - 35}\right] \times 10$$

$$\text{ಬಹುಲಕ} = 35 + \frac{2}{11} \times 10$$

$$\text{ಬಹುಲಕ} = 35 + 1.81$$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 36.81 ಆಗಿದೆ.

$a = 30$, $h = 10$

ವಯಸ್ಸು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ	ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 70$	$u_i = \frac{x_i - 30}{10}$	$f_i u_i$
5–15	6	10	–20	–2	–12
15–25	11	20	–10	–1	–11
25–35	21	30	0	0	0
35–45	23	40	10	1	23
45–55	14	50	20	2	28
55–65	5	60	30	3	15
	$\sum f_i = 80$				43

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$= 30 + \frac{43}{80} \times 10 = 30 + 5.375 = 35.375$

ಆದ್ದರಿಂದ 36.8 ವರ್ಷ ವಯಸ್ಸಿನವರು ಅತೀ ಹೆಚ್ಚು ಮಂದಿ ಆಸ್ಪತ್ರೆಗೆ ದಾಖಲಾಗಿರುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗೂ ಆಸ್ಪತ್ರೆಗೆ ದಾಖಲಾದ ರೋಗಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು 35.37 ವರ್ಷಗಳಾಗಿವೆ.

2. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು 225 ವಿದ್ಯುತ್ ಉಪಕರಣಗಳ ಬಿಡಿಭಾಗಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ) ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಬಾಳಿಕೆ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ)	0 – 20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
ಆವೃತ್ತಿ	10	35	52	61	38	29

ಉಪಕರಣಗಳ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳ ಬಾಳಿಕೆಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ =61

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 60 – 80 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 60$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 20$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 61$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 52$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 38$

ಬಹುಲಕ = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \text{x } h$

ಬಹುಲಕ = $60 + \left[\frac{61 - 52}{2(61) - 52 - 38}\right] \text{x } 20$

ಬಹುಲಕ = $60 + \left[\frac{9}{122 - 90}\right] \text{x } 20$

ಬಹುಲಕ = $60 + \frac{9}{32} \text{ x } 20$

ಬಹುಲಕ = $60 + 5.625 = 65.625$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 65.625 ಆಗಿದೆ.

3. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ 200 ಕುಟುಂಬಗಳ ಒಟ್ಟು ಮಾಸಿಕ ಗೃಹೋಪಯೋಗಿ ವೆಚ್ಚದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಕುಟುಂಬಗಳ ಮಾಸಿಕ ವೆಚ್ಚದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅಲ್ಲದೆ, ಮಾಸಿಕ ವೆಚ್ಚದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೆಚ್ಚ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1000 – 1500	24
1500 – 2000	40
2000 – 2500	33
2500 – 3000	28
3000 – 3500	30
3500 – 4000	22
4000 – 4500	16
4500 – 5000	7

ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ = 40

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 1500 – 2000 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 1500$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, h = 500

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 40$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 24$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 33$

ಬಹುಲಕ = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \text{x } h$

ಬಹುಲಕ = $1500 + \left[\frac{40 - 24}{2(40) - 24 - 33}\right] \text{x } 500$

ಬಹುಲಕ = $1500 + \left[\frac{16}{80 - 57}\right] \text{x } 500$

ಬಹುಲಕ = $1500 + \frac{16}{23} \text{ x } 500$

ಬಹುಲಕ = $1500 + 347.83 = 1847.83$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 1847.83 ಆಗಿದೆ.

ವೆಚ್ಚ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 2750$	$u_i = \frac{x_i - 2750}{500}$	$f_i u_i$
1000 – 1500	24	1250	–1500	–3	–72
1500 – 2000	40	1750	–1000	–2	–80
2000 – 2500	33	2250	–500	–1	–33
2500 – 3000	28	2750	0	0	0
3000 – 3500	30	3250	500	1	30
3500 – 4000	22	3750	1000	2	44
4000 – 4500	16	4250	1500	3	48
4500 – 5000	7	4750	2000	4	28
	$\sum f_i = 200$				-35

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \text{x h}$

$= 2750 + \frac{-35}{200} \text{ x } 500 = 2750 - 87.5 = 2662.5$

5. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಭಾರತದ ರಾಜ್ಯಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶಿಕ್ಷಕ – ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಎರಡೂ ಅಳತೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

ಪ್ರತಿ ಶಿಕ್ಷಕನಿಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ರಾಜ್ಯಗಳು/ ಕೇಂ.ಪ್ರ.ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
15 – 20	3
20 – 25	8
25 – 30	9
30 – 35	10
35 – 40	3
40 – 45	0
45 – 50	0
50 – 55	2

ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ = 10

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 30 – 35 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 30$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 5$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 10$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 9$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 3$

ಬಹುಲಕ = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \text{x } h$

ಬಹುಲಕ = $30 + \left[\frac{10-9}{2(10)-9-3}\right] \text{x } 5$

ಬಹುಲಕ = $30 + \left[\frac{1}{20-12}\right] \text{x } 5$

ಬಹುಲಕ = $30 + \frac{1}{8} \text{x } 5$

ಬಹುಲಕ = $30 + 0.625 = 30.625$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 30.625 ಆಗಿದೆ.

ಪ್ರತಿ ಶಿಕ್ಷಕನಿಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ರಾಜ್ಯಗಳು/ ಕೇಂ.ಪ್ರ.ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 32.5$	$u_i = \frac{x_i - 32.5}{5}$	$f_i u_i$
15 – 20	3	17.5	–15	–3	–9
20 – 25	8	22.5	–10	–2	–16
25 – 30	9	27.5	–5	–1	–9
30 – 35	10	32.5	0	0	0
35 – 40	3	37.5	5	1	3
40 – 45	0	42.5	10	2	0
45 – 50	0	47.5	15	3	0
50 – 55	2	52.5	20	4	8
	$\sum f_i = 35$				–23

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \text{x h}$

$= 32.5 + \frac{-23}{35} \text{x } 5 = 32.5 - 3.29 = 29.21$

ಶಿಕ್ಷಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅನುಪಾತವು 30.625 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು 29.21 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

6. ದತ್ತ ವಿತರಣೆಯು ಏಕದಿನ ಅಂತರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವದ ಕೆಲವು ಉತ್ತಮ ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ಮನ್‌ಗಳು ಗಳಿಸಿದ ರನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಗಳಿಸಿದ ರನ್ನುಗಳು	ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ಮನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
3000 – 4000	4
4000 – 5000	18
5000 – 6000	9
6000 – 7000	7
7000 – 8000	6
8000 – 9000	3
9000 – 10000	1
10000 – 11000	1

ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ = 18

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 4000 – 5000 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 4000$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 1000$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 18$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 4$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 9$

ಬಹುಲಕ = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

ಬಹುಲಕ = $4000 + \left[\frac{18-4}{2(18)-4-9}\right] \times 1000$

ಬಹುಲಕ = $4000 + \left[\frac{14}{36-13}\right] \times 1000$

ಬಹುಲಕ = $4000 + \frac{14}{23} \times 1000$

ಬಹುಲಕ = $4000 + 608.7 = 4608.7$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 4608.7 ಆಗಿದೆ.

7. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪ್ರತಿ 3 ನಿಮಿಷದ 100 ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋದ ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಸಮೂಹಿಸಿದ್ದಾನೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0 – 10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
ಆವೃತ್ತಿ	7	14	13	12	20	11	15	8

ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ = 20

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 40 – 50 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 40$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 10$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 20$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 12$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 11$

ಬಹುಲಕ = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

ಬಹುಲಕ = $40 + \left[\frac{20-12}{2(20)-12-11}\right] \times 10$

ಬಹುಲಕ = $40 + \left[\frac{8}{40-23}\right] \times 10$

ಬಹುಲಕ = $40 + \frac{8}{17} \times 10$

ಬಹುಲಕ = $40 + 4.71 = 44.71$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 44.71 ಆಗಿದೆ.

13.4 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ (ಮಧ್ಯಮ ಬೆಲೆ)

ಮಧ್ಯಾಂಕವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಒಂದು ಅಳತೆಯಾಗಿದ್ದು, ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗಿದೆ. ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಮೊದಲಾಗಿ ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ 'n' ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು 'n' ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು $\left(\frac{n}{2}\right)$ ನೇ ಮತ್ತು $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ನಂತರ, ನಾವು ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ (ಮಧ್ಯಮ ಬೆಲೆ)

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

ಇಲ್ಲಿ, l = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ.

n = ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

cf = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

f = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

h = ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10ನೇ ತರಗತಿಯ 51 ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರಗಳಿಗೆ (cm ಗಳಲ್ಲಿ) ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಲಾಯಿತು ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಯಿತು.

ಎತ್ತರಗಳು(ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಳಲ್ಲಿ)	ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ
140ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	4
145ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	11
150ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	29
155ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	40
160ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	46
165ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	51

ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
140ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	4	4
140 – 145	7	11
145 – 150	18	29
150 – 155	11	40
155 – 160	6	46
160 – 165	5	51

ಈಗ $n = 51, \therefore \frac{n}{2} = 25.5$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 145 – 150 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 145 .

cf (145 - 150ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 11

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 145 – 150 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 18

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 5

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = 145 + \left[\frac{25.5 - 11}{18}\right] \times 5$$

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = 145 + \left[\frac{72.5}{18}\right] = 149.03$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 149.03 ಆಗಿದೆ.

ಪರಿಹಾರ:

1. ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 68 ಗ್ರಾಹಕರ ಮಾಸಿಕ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ.

ಮಾಸಿಕ ಬಳಕೆ (ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	ಗ್ರಾಹಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
65 – 85	4	4
85 – 105	5	9
105 – 125	13	22
125 – 145	20	42
145 – 165	14	56
165 – 185	8	64
185 – 205	4	68

ಈಗ $n = 68, \therefore \frac{n}{2} = 34$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 125 – 145 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 125 .

cf (125 - 145ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 22

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 145 – 150 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 20

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 20

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \text{x h}$

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= 125 + \left[\frac{34 - 22}{20}\right] \text{x } 20$

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= 125 + \left[\frac{12}{20}\right] \text{x } 20 = 125 + 12 = 137\text{units}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 137units ಆಗಿದೆ.

ಸರಾಸರಿ:

ಮಾಸಿಕ ಬಳಕೆ (ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	ಗ್ರಾಹಕರ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 135$	$u_i = \frac{x_i - 135}{20}$	$f_i d_i$
65 – 85	4	75	−60	−3	−12
85 – 105	5	95	−40	−2	−10
105 – 125	13	115	-20	-1	-13
125 – 145	20	135	0	0	0
145 – 165	14	155	20	1	14
165 – 185	8	175	40	2	16
185 – 205	4	195	60	3	12
	$\sum f_i = 68$				7

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \text{x h}$

$= 135 + \frac{7}{68} \text{x } 20 = 135 + 2.1 = 137.05$

ಬಹುಲಕ:

ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ = 20

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 125 – 145 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 125$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 20$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 20$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 13$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 14$

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \text{x } h$

ಬಹುಲಕ $= 125 + \left[\frac{20 - 13}{2(20) - 13 - 14}\right] \text{x } 20$

ಬಹುಲಕ $= 125 + \left[\frac{7}{40 - 27}\right] \text{x } 20$

ಬಹುಲಕ $= 125 + \frac{7}{13} \text{x } 20$

ಬಹುಲಕ $= 125 + 10.77 = 135.77$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 135.77 ಆಗಿದೆ.

ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.

2. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 28.5 ಆಗಿದ್ದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
0 - 10	5	5
10 - 20	x	5+x
20 - 30	20	25+x
30 - 40	15	40+x
40 - 50	y	40+x+y
50 - 60	5	45+x+y
ಒಟ್ಟು	60	

ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಗಳು = 45 + x + y

$\Rightarrow 60 = 45 + x + y$

$\Rightarrow x + y = 15$ ----------(1)

ಈಗ $n = 60, \therefore \frac{n}{2} = 30$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 20 – 30 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 20 .

cf (20 - 30ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 5 + x

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 20 – 30 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 20

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 10

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

$28.5 = 20 + \left[\frac{30 - (5+x)}{20}\right] \times 10$

$8.5 \times 20 = (30 - 5 - x)10$

$170 = 250 - 10x$

$10x = 80 \Rightarrow x = 8$

$x = 8$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 137units ಆಗಿದೆ.

$\Rightarrow 8 + y = 15 \Rightarrow y = 7$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 8$ ಮತ್ತು $y = 7$

3. ಒಬ್ಬ ಜೀವ ವಿಮಾ ಏಜೆಂಟನು ಪಡೆದ 100 ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ವಿತರಣೆಯ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇವೆ. ಪಾಲಿಸಿಗಳನ್ನು 18 ವರ್ಷ ದಾಟಿದ ಮತ್ತು 60 ವರ್ಷಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ವಯಸ್ಸಿರುವ ಜನರಿಗೆ ಮಾತ್ರ ನೀಡಿದ್ದರೆ, ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ
20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	2
25 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	6
30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	24
35 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	45
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	78
45 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	89
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	92
55 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	98
60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	100

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ
15–20	2	2
20–25	4	6
25–30	18	24
30–35	21	45
35–40	33	78
40–45	11	89
45–50	3	92
50–55	6	98
55–60	2	100

ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಗಳು = 100

ಈಗ $n = 100, \therefore \frac{n}{2} = 50$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 35 – 40 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 35

cf (35 - 40ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 45

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 20 – 30 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 33

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 5

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = 35 + \left[\frac{50 - 45}{33}\right] \times 5$$

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = 35 + \left[\frac{5}{33}\right] \times 5$$

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = 35 + \frac{25}{33}$$

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = 35 + 0.76$$

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = 35.76$$

5. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 400 ನಿಯಾನ್ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
1500-2000	14
2000-2500	56
2500-3000	60
3000-3500	86
3500-4000	74
4000-4500	62
4500-5000	48

ಬಲ್ಬ್‌ನ ಬಾಳಿಕೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
1500-2000	14	14
2000-2500	56	70
2500-3000	60	130
3000-3500	86	216
3500-4000	74	290
4000-4500	62	352
4500-5000	48	400

ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಗಳು = 400

ಈಗ $n = 400, \therefore \frac{n}{2} = 200$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 3000 – 3500 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 3000

cf (3000 – 3500ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 130

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 20 – 30 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 86

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 500

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = 3000 + \left[\frac{200 - 130}{86}\right] \times 500$$

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = 3000 + \left[\frac{70}{86}\right] \times 500$$

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = 3000 + 406.98$$

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = 3406.98$$

6. ಒಂದು ಸ್ಥಳೀಯ ದೂರವಾಣಿ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಿ **(Telephone directory)** ಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ **100** ಉಪನಾಮಗಳನ್ನು **(surname)** ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಆಂಗ್ಲಭಾಷಾ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19
ಉಪನಾಮಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	30	40	16	4	4

ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ. ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಅಲ್ಲದೆ, ಉಪನಾಮಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
1-4	6	6
4-7	30	36
7-10	40	76
10-13	16	92
13-16	4	96
16-19	4	100

ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಗಳು = 100

ಈಗ $n = 100, \therefore \frac{n}{2} = 50$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 7 – 10 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 7

cf (7 – 10ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 36

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 20 – 30 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 40

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 3

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= 7 + \left[\frac{50 - 36}{40}\right] \times 3$

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= 7 + \left[\frac{14}{40}\right] \times 3$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = 7 + 1.05

ಮಧ್ಯಾಂಕ = 8.05

ಸರಾಸರಿ:

$a = 8.5, h = 3$

ಮಾಸಿಕ ಬಳಕೆ (ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	ಗ್ರಾಹಕರ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	x_i	$d_i = x_i - 135$	$u_i = \frac{x_i - 135}{20}$	$f_i d_i$
1-4	6	2.5	−6	−2	−12
4-7	30	5.5	−3	−1	−30
7-10	40	8.5	0	0	0
10-13	16	11.5	3	1	16
13-16	4	14.5	6	2	8
16-19	4	17.5	9	3	12
	$\sum f_i$ =100				-6

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} \times h$

$= 8.5 + \frac{-6}{100} \times 3 = 8.5 - 0.18 = 8.32$

ಬಹುಲಕ:

ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ = 40

ಇದು ವರ್ಗಾಂತರ 7 – 10 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ, $l = 7$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ, $h = 3$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_1 = 30$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_0 = 30$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $f_2 = 16$

ಬಹುಲಕ = $l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

ಬಹುಲಕ = $7 + \left[\frac{40 - 30}{2(40) - 30 - 16}\right] \times 3$

ಬಹುಲಕ = $7 + \left[\frac{10}{80 - 46}\right] \times 3$

ಬಹುಲಕ = $7 + \frac{10}{34} \times 3$

ಬಹುಲಕ = $7 + 0.88 = 7.88$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 7.88 ಆಗಿದೆ.

7. ಒಂದು ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತೂಕ(ಕೆ.ಜಿ.ಗಳಲ್ಲಿ)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	8	6	6	3	2

ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಅಲ್ಲದೆ, ಉಪನಾಮಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಆವೃತ್ತಿ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ
40-45	2	2
45-50	3	5
50-55	8	13
55-60	6	19
60-65	6	25
65-70	3	28
70-75	2	30

ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಗಳು = 30

ಈಗ $n = 30$, $\therefore \frac{n}{2} = 15$ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 55 – 60 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ, l (ಕೆಳಮಿತಿ) = 55

cf (55 – 60ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 13

f (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 55 – 60 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 6

h (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 5

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $55 + \left[\frac{15 - 13}{6}\right] \times 5$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $7 + \left[\frac{2}{6}\right] \times 5$

ಮಧ್ಯಾಂಕ = $55 + 1.67 = 56.67$kg

13.5 ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು

ಉದಾಹರಣೆ 9: ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ವ್ಯಾಪಾರ ಮಳಿಗೆಯ 30 ಅಂಗಡಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ವಾರ್ಷಿಕ ಲಾಭದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

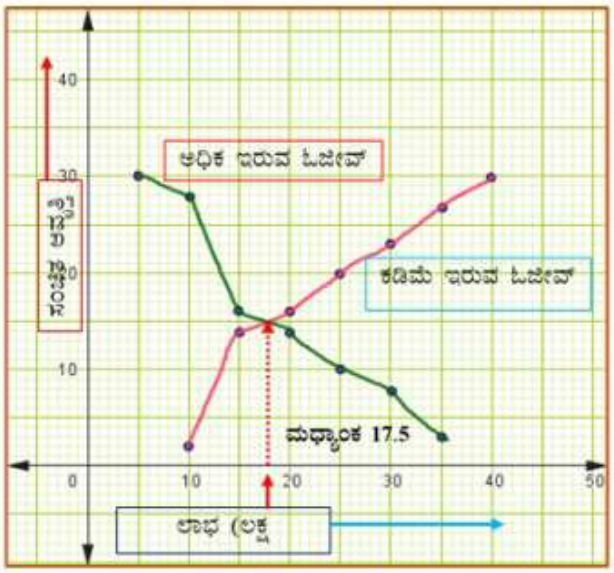
ಲಾಭ (ಲಕ್ಷ ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	ಅಂಗಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ(ಆವೃತ್ತಿ)
5 ಅಥವಾ 5ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	30
10 ಅಥವಾ 10ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	28
15 ಅಥವಾ 15ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	16
20 ಅಥವಾ 20ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	14
25 ಅಥವಾ 25ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	10
30 ಅಥವಾ 30ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	7
35 ಅಥವಾ 35ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	3

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಎರಡೂ ಓಜೀವ್‌ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅದರಿಂದ ಲಾಭಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ :

ಪರಿಹಾರ : ನಾವು ಮೊದಲು, x - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಲಾಭಾಂಶದ ಕೆಳಮಿತಿಗಳು ಮತ್ತು y - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳು ಇರುವಂತೆ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ ನಂತರ (5, 30), (10, 28), (15, 16, (20, 14), (25, 10), (30, 7) ಮತ್ತು (35, 3) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಧನಗಳ ನೆರವಿಲ್ಲದೆ ಸೇರಿಸಿದಾಗ "ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ" ಓಜೀವ್‌ನ್ನು ಚಿತ್ರ 13.5 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು, ಅವುಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ.

ವರ್ಗಾಂತರ	5-10	10-15	15-20	20-15	25-30	30-35	35-40
ಅಂಗಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	12	2	4	3	4	3
ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ	2	14	16	20	23	27	30



ಅಭ್ಯಾಸ 13.4

1. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ 50 ಕೆಲಸಗಾರರ ದೈನಂದಿನ ಆದಾಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

ದೈನಂದಿನ ಆದಾಯ(ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	12	14	8	6	10

ಮೇಲಿನ ವಿತರಣೆಯನ್ನು "ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ" ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ.

2. ಒಂದು ತರಗತಿಯ 35 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳು, ಅವರ ವೈದ್ಯಕೀಯ ತಪಾಸಣೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ದಾಖಲಾದವು.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
38 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	0
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	3
42 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	5
44 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	9
46 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	14
48 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	28
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	32
52 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	35

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ "ಕಡಿಮೆ ವಿಧಾನ" ದ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ತೂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿ.

3. ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ 100 ಹೊಲಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಹೆಕ್ಟೇರ್‌ಗೆ ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ಗೋಧಿಯ ಇಳುವರಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

ಉತ್ಪಾದನಾ ಇಳುವರಿ(Kg/ha)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
ಹೊಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	8	12	24	38	16

ಈ ವಿತರಣೆಯನ್ನು "ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ" ವಿತರಣೆಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ, ಇದರ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ.

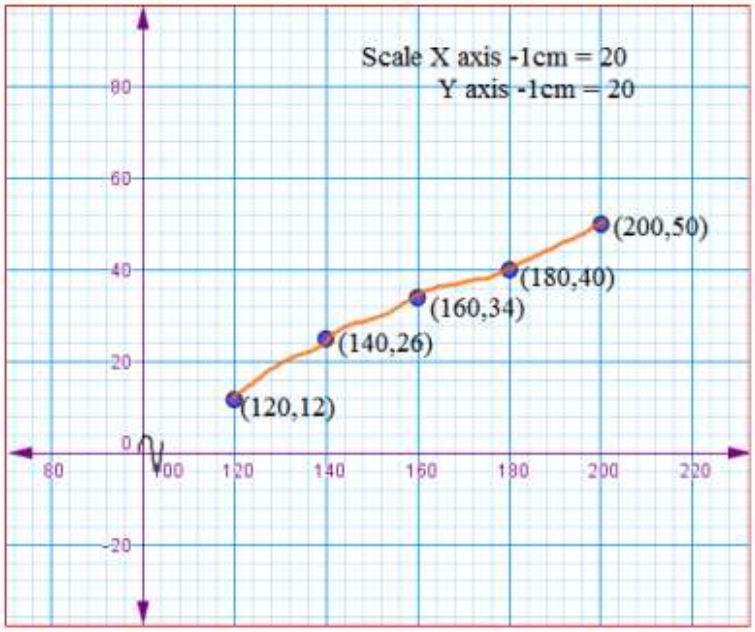
ಅಭ್ಯಾಸ 13.4

1. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ 50 ಕೆಲಸಗಾರರ ದೈನಂದಿನ ಆದಾಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

ದೈನಂದಿನ ಆದಾಯ(ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	12	14	8	6	10

ಮೇಲಿನ ವಿತರಣೆಯನ್ನು "ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ" ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ.

ದೈನಂದಿನ ಆದಾಯ(ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	12	14	8	6	10
ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ	12	26	34	40	50

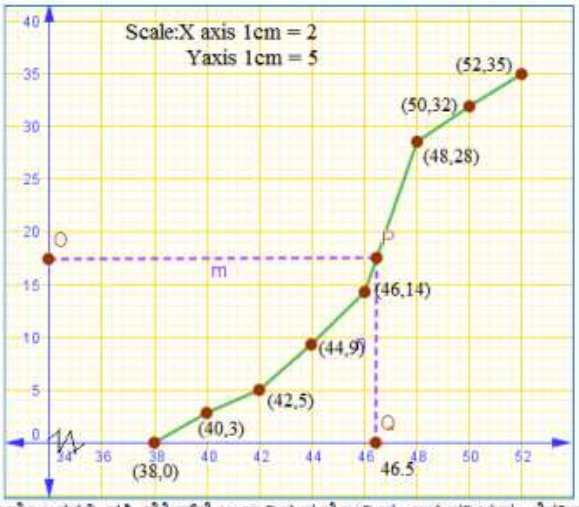


2. ಒಂದು ತರಗತಿಯ 35 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳು, ಅವರ ವೈದ್ಯಕೀಯ ತಪಾಸಣೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ದಾಖಲಾದವು.

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
38 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	0
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	3
42 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	5
44 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	9
46 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	14
48 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	28
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	32
52 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	35

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ "ಕಡಿಮೆ ವಿಧಾನ" ದ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ತೂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	38	40	42	44	46	48	50	52
ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	0	3	5	9	14	28	32	35

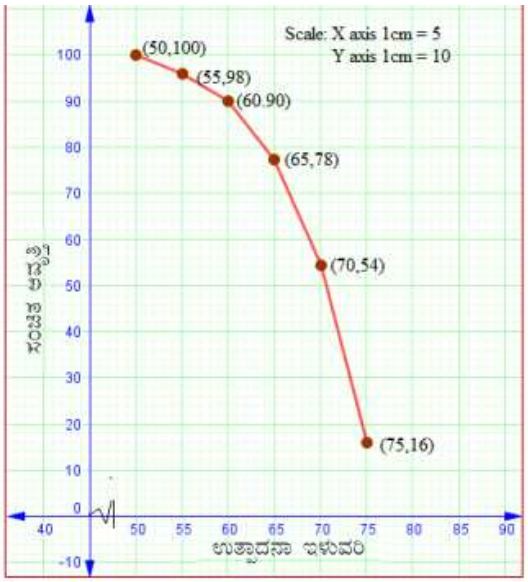


3. ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ 100 ಹೊಲಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಹೆಕ್ಟೇರ್‌ಗೆ ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ಗೋಧಿಯ ಇಳುವರಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

ಉತ್ಪಾದನಾ ಇಳುವರಿ(Kg/ha)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
ಹೊಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	8	12	24	38	16

ಈ ವಿತರಣೆಯನ್ನು "ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ" ವಿತರಣೆಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ, ಇದರ ಓಜೀವ್ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಉತ್ಪಾದನಾ ಇಳುವರಿ	50	55	60	65	70	75
ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ	2	10	22	46	84	100
ಆವೃತ್ತಿ	100	98	90	78	54	16



ಸಾರಾಂಶ

1. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ನೇರ ವಿಧಾನ: $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ: $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ: $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯು ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರಿಕೃತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಲಾಗಿದೆ.

2. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕೇತಗಳು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ

3. ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

4. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಈ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕೇತಗಳು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

5. ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯಾಗಿ ಅಥವಾ ಓಜೀವ್ ಆಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

6. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಎರಡೂ ಓಜೀವ್‌ಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ x - ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವೇ ಆ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಇದನ್ನು ನಾವು ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯಬಹುದು.

14 ಸಂಭವನೀಯತೆ

14.2 ಸಂಭವನೀಯತೆ : ಒಂದು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ವಿಧಾನ.

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಚಿಮ್ಮಲಾಗಿದೆ. ನಾಣ್ಯವು ನೆಲಕ್ಕೆ ಬೀಳುವ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶಿರ ಅಥವಾ ಮುಚ್ಚ ಮಾತ್ರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು.

ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದರೆ.

ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳು 1,2,3,4,5 ಮತ್ತು 6 ಆಗಿವೆ.

ಒಂದು ಘಟನೆ 'E' ಯ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅಥವಾ ಅನುಭವವೇದ್ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ

$$P(E) = \frac{\text{ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸಿದ ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ನಾವು ನಾಣ್ಯದ ಬಗ್ಗೆ ಹೇಳುವಾಗ ಇದು ಕುಂದಿಲ್ಲದ (fair) ನಾಣ್ಯವೆಂದು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿ ಅದು ಕೆಳಕ್ಕೆ ಬಂದಾಗ ಒಂದೇ ಬದಿಯು ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಬೀಳಲು ಯಾವುದೇ ಕಾರಣ ಇರದಂತೆ ಅದು ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ನಾಣ್ಯದ ಈ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ನಾವು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತ (unbiased) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. 'ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಿಮ್ಮುಪಕೆ' ಈ ಪದವನ್ನು, ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಪಕ್ಷಪಾತ (bias) ಅಥವಾ ಹಸ್ತಕ್ಷೇಪ (interference) ಇಲ್ಲದೆ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಬೀಳಲು ಬಿಡಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಅರ್ಥೈಯಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ (ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ).

ಸಾರಾಂಶ

1. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ನೇರ ವಿಧಾನ: $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ: $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ: $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯು ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರಿಕೃತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಲಾಗಿದೆ.

2. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಬಹುಲಕ $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕೇತಗಳು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ

3. ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

4. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಈ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕೇತಗಳು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

5. ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯಾಗಿ ಅಥವಾ ಓಜೀವ್ ಆಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

6. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಎರಡೂ ಓಜೀವ್‌ಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ x - ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವೇ ಆ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಇದನ್ನು ನಾವು ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯಬಹುದು.

E ಯನ್ನು P(E) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

$$P(E) = \frac{\text{ಘಟನೆ E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ, ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಒಂದು ಪುಚ್ಛವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಯದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ: ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಚಿಮ್ಮುವುದು.

S - { ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಚಿಮ್ಮುವುದು};

S - {H, T} [ಇಲ್ಲಿ H ಅಂದರೆ ಶಿರ ಮತ್ತು T ಅಂದರೆ ಪುಚ್ಛ] – n(S) = 2

A - { ಶಿರವು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವುದು }- n(A) = 1

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$

B - { ಪುಚ್ಛವು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವುದು }- n(B) = 1

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರದ ಒಂದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡು, ಒಂದು ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಮತ್ತು ಒಂದು ಹಳದಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಕೃತಿಕಾಳು ಚೀಲದೊಳಗೆ ನೋಡದೆಯೇ, ಅದರಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತಾಳೆ ಅವಳು ತೆಗೆಯುವ ಚೆಂಡು ಒಂದು (i) ಹಳದಿ ಚೆಂಡು (ii) ಕೆಂಪುಚೆಂಡು (iii) ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡಿಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

S – {ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಚೆಂಡುಗಳು } –{ ಕೆಂಪು, ನೀಲಿ, ಹಳದಿ}

n(S) = 3

A – { ಕೃತಿಕಾಳು ಹಳದಿ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು} – n(A) = 1

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{3}$

B – { ಕೃತಿಕಾಳು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು} – n(B) = 1

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{3}$

C – { ಕೃತಿಕಾಳು ನೀಲಿ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು} – n(C) = 1

$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{3}$

ಗಮನಿಸಿ: ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: ನಾವು ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಿದ್ದೇವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. (i) 4 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? (ii) 4 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 4 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

S – {ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆಯುವುದು } –{ 1,2,3,4,5,6}

n(S) = 6

A – { 4ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು} – {5,6} - n(A) = 2

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

B – { 4ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 4ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು} – {1,2,3,4} - n(B) = 4

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$: ಇಲ್ಲಿ A ಯು ಒಂದು ಘಟನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, $\bar{A}$ ಅದರ ಪೂರಕ ಘಟನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಂಭವಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ಘಟನೆಯು ಸಂಭವನೀಯತೆಯು '0'. ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು(ಮುಖಗಳ ಮೇಲೆ 1ರಿಂದ 6ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರುವ) ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವುದು.

ಖಚಿತವಾಗಿ (ಅಥವಾ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ) ಸಂಭವಿಸುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು ಖಚಿತ ಘಟನೆ ಅಥವಾ ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ 7 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವುದು.

$0 \le P(E) \le 1$

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆ ಕಾರ್ಡ್

(i) ಒಂದು ಏಸ್ ಆಗಿರುವ.

(ii) ಒಂದು ಏಸ್ ಆಗಿಲ್ಲದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) S – ಇಸ್ಪೀಟ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು

$n(S) = 52$

E – ತೆಗೆದ ಕಾರ್ಡ್ ಒಂದು ಏಸ್ ಆಗಿರುವುದು.

$P(E) = 4$

$P(A) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

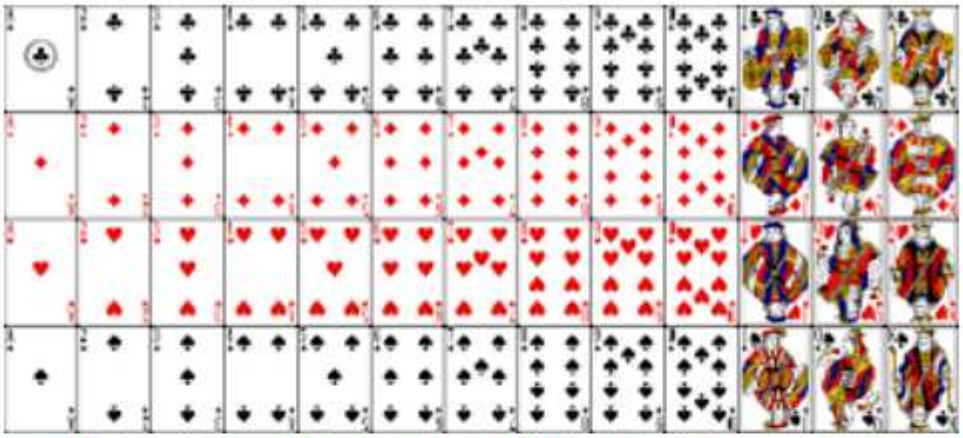
(ii) F - ತೆಗೆದ ಕಾರ್ಡ್ ಒಂದು ಏಸ್ ಆಗಿರದಿರುವುದು.

$n(F) = 48$

$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{48}{52} = \frac{11}{13}$

ಅಥವಾ $P(F) = P(\overline{E}) = 1 - p(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{11}{13}$

ಆಟದ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಕಟ್ಟು 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ 13 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಂತೆ 4 ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ (suits) ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ. ಸ್ಪೇಡ್ (♠), ಹಾರ್ಟ್(♥), ಡೈಮಂಡ್ (♦) ಮತ್ತು ಕ್ಲಬ್ (♣). ಕ್ಲಬ್ಸ್ ಮತ್ತು ಸ್ಪೇಡ್ಸ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದವುಗಳಾಗಿದ್ದು ಹಾರ್ಟ್ಸ್ ಮತ್ತು ಡೈಮಂಡ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ್ದಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳೆಂದರೆ, ಏಸ್, ರಾಜ, ರಾಣಿ, ಜ್ಯಾಕ್, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 ಮತ್ತು 2. ರಾಜ, ರಾಣಿ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಕ್ ಈ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು (ಗೌರವಾನ್ವಿತ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.



ಉದಾಹರಣೆ 5: ಸಂಗೀತಾ ಮತ್ತು ರೇಶ್ಮಾ ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ಆಟಗಾರ್ತಿಯರು ಒಂದು ಟೆನ್ನಿಸ್ ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಆಡುತ್ತಾರೆ. ಸಂಗೀತಾಳು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.62 ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ರೇಶ್ಮಾಳು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಸಂಗೀತಾ ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $P(A) = 0.62$

ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಶ್ಮಾ ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.62 = 0.38$

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಸವಿತಾ ಮತ್ತು ಹಮೀದಾ ಗೆಳತಿಯರು ಇವರಿಬ್ಬರ ಜನ್ಮದಿನವು

(i) ಪ್ರತ್ಯೇಕ ದಿನಗಳಾಗಿರುವ

(ii) ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? (ಅಧಿಕ ವರ್ಷವನ್ನು ನಿರ್ಲಕ್ಷಿಸಿ)

(i) ಸವಿತಾ ಮತ್ತು ಹಮೀದಾರ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬವು ಪ್ರತೇಕ ದಿನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅನುಕೂಲಿಸುವ ದಿನಗಳು 365–1 = 364

ಜನ್ಮದಿನ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ದಿನಗಳಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{364}{365}$

ಜನ್ಮದಿನ ಒಂದೇ ದಿನವಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{1}{365}$

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10 ನೇ ತರಗತಿಯ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 25 ಬಾಲಕಿಯರು ಮತ್ತು 15 ಬಾಲಕರಿದ್ದಾರೆ. ತರಗತಿ ಶಿಕ್ಷಕರು ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ತರಗತಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಯಾಗಿ ಆರಿಸಬೇಕಿದೆ. ಶಿಕ್ಷಕರು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಹೆಸರನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. ನಂತರ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಕಲಕುತ್ತಾರೆ. ನಂತರ ಅವರು ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಚೀಲದಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಕಾರ್ಡ್‌ನಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಹೆಸರು (i) ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕಿಯ (ii) ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕನದ್ದಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ: $n(S) = 40$

ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ – $n(A) = 25$

ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ – $n(B) = 15$

ಬಾಲಕಿಯ ಹೆಸರಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

ಬಾಲಕನ ಹೆಸರಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

ಅಥವಾ $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 3 ನೀಲಿ, 2 ಬಿಳಿ ಮತ್ತು 4 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಅದು

(i) ಬಿಳಿ (ii) ನೀಲಿ (iii) ಕೆಂಪು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಗೋಲಿಗಳು = $n(S) = 9$

ಗೋಲಿಯು ಬಿಳಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(W) = \frac{2}{9}$

ಗೋಲಿಯು ನೀಲಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(B) = \frac{3}{9}$

ಗೋಲಿಯು ಕೆಂಪಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(B) = \frac{4}{9}$

ಉದಾಹರಣೆ 9: ಹರ್ಷಿತಳು ಎರಡು ಭಿನ್ನ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸುತ್ತಾಳೆ. (ರೂ 1 ರ ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಮತ್ತು ರೂ 2 ರ ಒಂದು ನಾಣ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ) ಅವಳು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಎರಡು ಭಿನ್ನ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಫಲಿತ ಗಣ

$S = \{ HH, HT, TH, TT \}$

$n(S) = 4$

ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು – $\{HT, TH, TT\}$

ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ – $\frac{3}{4}$

[ಉದಾಹರಣೆ 10 ಮತ್ತು 11 ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅಲ್ಲವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೈ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.]

ಉದಾಹರಣೆ 12: ಒಂದು ರಟ್ಟಿನ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 100 ಶರ್ಟ್‌ಗಳಿವೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 88 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಉತ್ತಮವಾಗಿವೆ. 8 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಅಲ್ಪದೋಷಗಳಿಂದ ಕೂಡಿವೆ ಮತ್ತು 4 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಹೆಚ್ಚು ದೋಷಗಳಿಂದ ಕೂಡಿವೆ. ಜಿಮ್ಮಿ ಎಂಬ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಉತ್ತಮ ಶರ್ಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸ್ವೀಕರಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಸುಜಾತ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಹೆಚ್ಚು ದೋಷವಿರುವ ಶರ್ಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತಿರಸ್ಕರಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಶರ್ಟ್‌ನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ.

(i) ಇದನ್ನು ಜಿಮ್ಮಿಯು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ

(ii) ಇದನ್ನು ಸುಜಾತಳು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಒಟ್ಟು ಶರ್ಟ್‌ಗಳು = $n(S) = 100$

ಉತ್ತಮವಾದ ಶರ್ಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 88

(i) ಜಿಮ್ಮಿಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ (ಅತ ಸ್ವೀಕರಿಸುವ) ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 88

ಜಿಮ್ಮಿ ಶರ್ಟ್ ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{88}{100} = 0.88$

(ii) ಸುಜಾತಳಿಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 88 + 8 = 96

ಸುಜಾತಳು ಶರ್ಟ್ ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{96}{100} = 0.96$

ಉದಾಹರಣೆ 13: ಒಂದು ನೀಲಿ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬೂದು ಬಣ್ಣದ ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆದಿದೆ. ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ದಾಳಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

(i) 8 (ii) 13 (iii) 12 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 12 ಕ್ಕೆ ಸಮ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ:

ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),(1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

$n(S) = 6x6 = 36$

(i) A - ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 8 ಆಗಿರುವುದು

$A – \{ (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$

$n(A) = 5$

∴ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 8 ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{5}{36}$

(ii) B - ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 13 ಆಗಿರುವುದು

$n(B) = 0$

∴ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 8 ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{0}{36} = 0$

(iii) C - ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 12ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಅಥವಾ 12ಕ್ಕೆ ಸಮ ಆಗಿರುವುದು

$n(C) = 36$

∴ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 8 ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{36}{36} = 1$

ಅಭ್ಯಾಸ 14.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ.

(i) ಒಂದು ಘಟನೆ E ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ + E ಅಲ್ಲದ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ = _____

(ii) ಸಂಭವಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು _____ ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು _____ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

(iii) ಖಚಿತವಾಗಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು _____ ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು _____ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

(iv) ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು _____

(v) ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು _____ ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಅಥವಾ ಸಮ ಮತ್ತು _____ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉತ್ತರಗಳು:

(i) 1

(ii) 0 , ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ

(iii) 1, ಖಚಿತ ಘಟನೆ

(iv) 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ

(v) 0 , 1

2. ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಸಮಾನ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ? ವಿವರಿಸಿ.

(i) ಒಬ್ಬ ಚಾಲಕನು ಕಾರನ್ನು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕಾರು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಆಗುವುದು ಅಥವಾ ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಆಗದಿರುವುದು.

(ii) ಒಬ್ಬ ಆಟಗಾರ ಬಾಸ್ಕೆಟ್‌ಬಾಲ್‌ನ್ನು ಗುರಿಯತ್ತ ಎಸೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾನೆ ಅವನ/ಅವಳ ಗುರಿ ಮುಟ್ಟುವುದು ಅಥವಾ ಗುರಿಮುಟ್ಟದೇ ಇರುವುದು.

(iii) ಸರಿ – ತಪ್ಪು ಉತ್ತರವಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲಾಗಿದೆ ಉತ್ತರವು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ಆಗಿರುವುದು.

(iv) ಒಂದು ಮಗುವು ಜನಿಸಿದೆ ಇದು ಒಂದು ಗಂಡು ಅಥವಾ ಒಂದು ಹೆಣ್ಣು ಆಗಿರುವುದು.

(i) ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಕಾರು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಆಗದಿರಲು ಅದರ ಮೆಕಾನಿಸಂ ನಲ್ಲಿ ತೊಂದರೆ ಉಂಟಾದರೆ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ.

(ii) ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಇದರಲ್ಲಿ ಗುರಿಗಾರನ ತೀಕ್ಷ್ಣತೆ, ಅವನಿಗೆ ಲಭಿಸಿದ ತರಬೇತಿ ಮುಂತಾದ ಅನೇಕ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಅವನಿಗೆ ಸರಿ ಇಲ್ಲವೆ ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಿಸುವ ಅವಕಾಶ ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ.

(iv) ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಹುಟ್ಟುವ ಮಗು ಗಂಡು ಇಲ್ಲವೇ ಹೆಣ್ಣು ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

3. ಒಂದು ಫುಟ್‌ಬಾಲ್ ಆಟದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ, ಯಾವ ತಂಡವು ಮೊದಲು ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು ಒಂದು ಉತ್ತಮ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಏಕೆ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ?

ನಾಣ್ಯ ಚಿಮ್ಮುಗೆಯು ಎರಡೇ ಫಲಿತವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಶಿರ ಅಥವಾ ಪುಚ್ಛ, ಮತ್ತು ಇದರ ಫಲಿತಾಂಶವು ಪೂರ್ವ ನಿರ್ಧರಿತವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

4. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

A) $\frac{2}{3}$ B) -1.5 C) 15% D) 0.7 3

B) -1.5 ಇದು ಯಾವುದೇ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಯಾವತ್ತೂ $0 \leq$ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ≤ 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

5. **$P(E) = 0.05$ ಆದರೆ, 'E ಅಲ್ಲದ' ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

'E ಅಲ್ಲದ' ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= 1 - P(E) = 1 - 0.05 = 0.95$

6. **ಒಂದು ಚೀಲವು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಮಾಲಿನಿಯು ಚೀಲದೊಳಗೆ ನೋಡದೆ ಒಂದು ಕ್ಯಾಂಡಿಯನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳು ಹೊರತೆಗೆಯುವ ಕ್ಯಾಂಡಿಯು**

(i) ಒಂದು ಕಿತ್ತಳೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

(ii) ಒಂದು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

(i) ಒಂದು ಕಿತ್ತಳೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು = 0
ಏಕೆಂದರೆ ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಕಿತ್ತಾಳೆ ಪರಿಮಳದ ಯಾವುದೇ ಕ್ಯಾಂಡಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) ಒಂದು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು = 1
ಏಕೆಂದರೆ ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ಯಾಂಡಿಗಳು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

7. **3 ಮಕ್ಕಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ, 2 ಮಕ್ಕಳ ಜನ್ಮದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.992 ಎಂದು ನೀಡಿದೆ. 2 ಮಕ್ಕಳ ಜನ್ಮದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

ಜನ್ಮ ದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = 1 – ಜನ್ಮ ದಿನ ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ
$= 1 - 0.992 = 0.008$

8. **ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 3 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು 5 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಚೀಲದಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ತೆಗೆದ ಚೆಂಡು (i) ಕೆಂಪು (ii) ಕೆಂಪು ಅಲ್ಲದ ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಚೆಂಡುಗಳು $= n(S) = 3 + 5 = 8$

(i) ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= n(A) = 3$

ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

(ii) ಕೆಂಪು ಅಲ್ಲದ ಚೆಂಡು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

9. **ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 5 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳು, 8 ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಗಳು ಮತ್ತು 4 ಹಸುರು ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೊರತೆಗೆದ ಗೋಲಿಯು (i) ಕೆಂಪು (ii) ಬಿಳಿ (iii) ಹಸುರು ಅಲ್ಲದ ಗೋಲಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

ಚೀಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಚೆಂಡುಗಳು $= n(S) = 5 + 8 + 4 = 17$

(i) ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= n(A) = 5$

ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{17}$

(ii) ಬಿಳಿ ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= n(B) = 8$

ಬಿಳಿ ಚೆಂಡು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{8}{17}$

(iii) ಹಸುರು ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= n(C) = 4$

ಬಿಳಿ ಚೆಂಡು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{17}$

10. **ಒಂದು ಗೋಲಕವು (ಹಣದ ಹುಂಡಿ) 50 ಪೈಸೆಯ 100 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, ರೂ 1 ರ 50 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, ರೂ 2 ರ 20 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ರೂ 5 ರ 10 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಅದನ್ನು ಬೋರಲು ಹಾಕಿದಾಗ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಹೊರ ಬೀಳುವ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ. ಆ ನಾಣ್ಯವು (i) ಒಂದು 50 ಪೈಸೆ ನಾಣ್ಯವಾಗಿರುವ (ii) ಒಂದು ರೂ 5 ರ ನಾಣ್ಯ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

ಗೋಲಕದಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ನಾಣ್ಯಗಳು $= 100 + 50 + 20 + 10 = 180$

ಗೋಲಕದಲ್ಲಿರುವ 50 ಪೈಸೆಯ ನಾಣ್ಯಗಳು $= n(A) = 100$

ಗೋಲಕದಲ್ಲಿರುವ 5ರೂ ನಾಣ್ಯಗಳು $= n(B) = 10$

(i) ಒಂದು 50 ಪೈಸೆ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$

(ii) ಒಂದು 5ರೂ ನಾಣ್ಯವಾಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ $1 - P(B) = 1 - \frac{n(B)}{n(S)} = 1 - \frac{10}{180} = \frac{17}{18}$

11. **ಗೋಪಿಯು ತನ್ನ ಅಕ್ವೇರಿಯಂ ಗೆ ಒಂದು ಅಂಗಡಿಯಿಂದ ಒಂದು ಮೀನನ್ನು ಖರೀದಿಸುತ್ತಾನೆ. ಅಂಗಡಿಯವನು ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನಲ್ಲಿರುವ 5 ಗಂಡು ಮೀನುಗಳು ಮತ್ತು 8 ಹೆಣ್ಣು ಮೀನುಗಳಿಂದ (ಚಿತ್ರ 14.4 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಮೀನನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾನೆ. ಹೊರ ತೆಗೆಯುವ ಮೀನು ಗಂಡು ಮೀನು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?**

Fig. 15.4

ಟ್ಯಾಂಕ್ ನಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಮೀನುಗಳು $= n(S) = 5+8 = 13$

ಗಂಡು ಮೀನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= n(A) = 5$

ಆದ್ದರಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆದ ಮೀನು ಗಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ

$= P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{13}$

12. ಒಂದು ಅವಕಾಶದ ಆಟದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸೂಚಕವು (ಬಾಣವು) ಚಕ್ರಾಕಾರವಾಗಿ ತಿರುಗಿ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ಈ ಅಂಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅಂಕಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ನಿಶ್ಚಲವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ (ಚಿತ್ರ 14.5 ನ್ನು ನೋಡಿ). ಸೂಚಕವು (i) 8 (ii) ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ (iii) 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (iv) 9 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

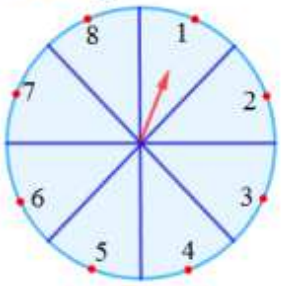


Fig 14.5

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 8

(i) ಸೂಚಕವು 8 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 1

ಸೂಚಕವು 8 ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{1}{8}$

(ii) ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆ (1, 3, 5 ಮತ್ತು 7) = 4

ಸೂಚಕವು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(iii) 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 3, 4, 5, 6, 7 ಮತ್ತು 8

2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6

ಸೂಚಕವು 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{6}{8} = \frac{4}{4}$

(iv) 9 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 1,2,3,4,5,6,7,8

9 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 8

ಸೂಚಕವು 9ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{8}{8} = 1$

13. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ.(i) ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ (ii) 2 ಮತ್ತು 6 ರ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (iii) ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6

ದಾಳದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 1,2,3,4,5 ಮತ್ತು 6

(i) ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 2, 3 ಮತ್ತು 5

ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 3

ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) 2 ಮತ್ತು 6ರ ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 3, 4 ಮತ್ತು 5

2ರಿಂದ6ರ ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 3

2 ರಿಂದ 6ರ ನಡುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(iii) ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 1, 3 ಮತ್ತು 5

ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 3

ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

14. ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. (i) ಒಂದು ಕೆಂಪು ರಾಜ (ii) ಒಂದು ಮುಖ (ಗೌರವಾನ್ವಿತ) ಕಾರ್ಡ್(iii) ಒಂದು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಮುಖ (ಗೌರವಾನ್ವಿತ) ಕಾರ್ಡ್ (iv) ಹಾರ್ಟ್‌ನ ಜ್ಯಾಕ್ (v) ಒಂದು ಸ್ಪೇಡ್ (vi) ಡೈಮಂಡ್‌ನ ರಾಣಿ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 52

(i) ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ರಾಜರ ಸಂಖ್ಯೆ = 2

ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ರಾಜನನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

(ii) ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಸಮಖ್ಯೆ = 12

ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

(iii) ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು = 6

ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

(iv) ಹಾರ್ಟ್ ಜಾಕ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ =1

ಹಾರ್ಟ್ ಜಾಕ್ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{1}{52}$

(v) ಸ್ಪೇಡ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 13

ಸ್ಪೇಡ್ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

(vi) ಡೈಮಂಡಿನ ರಾಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 1

ಡೈಮಂಡಿನ ರಾಣಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{1}{52}$

15. ಡೈಮಂಡ್‌ನ 5 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಾದ, 10, ಜ್ಯಾಕ್, ರಾಣಿ, ರಾಜ ಮತ್ತು ಏಸ್‌ಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಮುಖ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಇರುವಂತೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಲಾಗಿದೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(i) ಆ ಕಾರ್ಡ್ ರಾಣಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) ರಾಣಿ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದು ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರಿಸಿ, ಎರಡನೇ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಅದು a) ಒಂದು ಏಸ್ b) ಒಂದು ರಾಣಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಟ್ಟು ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 5

(i) ಒಟ್ಟು ರಾಣಿ = 1

ರಾಣಿಯನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{1}{5}$

(ii) ರಾಣಿ ಕಾರ್ಡ್ ತೆಗೆದು ಪಕ್ಕಕ್ಕಿರಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು = 4

(a) ಏಸ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 1

ಏಸ್‌ನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{1}{4}$

(b) ಒಟ್ಟು ರಾಣಿ = 0

ರಾಣಿಯನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{0}{4} = 0$

16. 12 ದೋಷಪೂರಿತ ಪೆನ್‌ಗಳು ಆಕಸ್ಮಿಕವಾಗಿ 132 ಉತ್ತಮ ಪೆನ್‌ಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಕೊಂಡಿವೆ. ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ನೋಡಿದ ಕೂಡಲೇ ಅದು ದೋಷಪೂರಿತವೇ? ಅಲ್ಲವೇ? ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ಗುಂಪಿನಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೊರತೆಗೆದ ಪೆನ್ ಉತ್ತಮವಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೋಷಪೂರಿತ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 12

ಉತ್ತಮ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 132

ಒಟ್ಟು ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 132 + 12 = 144

ಹೊರ ತೆಗೆದ ಪೆನ್ನು ಉತ್ತಮ ಪೆನ್ನು ಆಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 132

ಹೊರ ತೆಗೆದ ಪೆನ್ನು ಉತ್ತಮ ಪೆನ್ನು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{132}{144} = \frac{11}{12}$

17. (i) 20 ಬಲ್ಬ್‌ಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 4 ಬಲ್ಬ್‌ಗಳು ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿವೆ. ಗುಂಪಿನಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಬಲ್ಬನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದು ದೋಷಪೂರಿತ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) (i) ರಲ್ಲಿ ಹೊರ ತೆಗೆದ ಬಲ್ಬ್ ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿರದಿದ್ದರೂ ಸಹ ಅದನ್ನು ಬಲ್ಬ್ ಗಳ ಗುಂಪಿನಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿದೆ. ಈಗ ಉಳಿದ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳಿಂದ ಒಂದು ಬಲ್ಬ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಹೊರ ತೆಗೆದರೆ ಈ ಬಲ್ಬ್ ದೋಷಪೂರಿತ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(i) ಒಟ್ಟು ಬಲ್ಬುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 20

ದೋಷಪೂರಿತ ಬಲ್ಬುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4

ದೋಷಪೂರಿತ ಬಲ್ಬು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

(ii) (i) ರಲ್ಲಿ ದೋಷಪೂರಿತ ಬಲ್ಬು ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಅದನ್ನು ಹೊಗಿಟ್ಟಾಗ ಉಳಿದ ಬಲ್ಬುಗಳು = 19

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 19

ದೋಷಪುರಿತವಲ್ಲದ ಬಲ್ಬು ಪಡೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆ = 19 - 4 = 15

ದೋಷಪೂರಿತವಲ್ಲದ ಬಲ್ಬು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{15}{19}$

18. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ 90 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮೂದಾಗಿರುವ 90 ಬಿಲ್ಲೆಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದರೆ ಅದು (i) 2 ಅಂಕಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (ii) ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ (iii) 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಬವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಟ್ಟು ಬಿಲ್ಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 50

(i) ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆ = 81

ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{81}{90} = \frac{9}{10}$

(ii) ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 ಮತ್ತು 81

ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 9

ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{9}{90} = \frac{1}{10}$

(iii) 5ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85ಮತ್ತು 90

5ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 18

5ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{18}{90} = \frac{1}{5}$

19. ಒಂದು ಮಗುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಾಳವಿದೆ. ಅದರ ಮುಖಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತಿವೆ.

ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಿದೆ. i) A ii) D ಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6

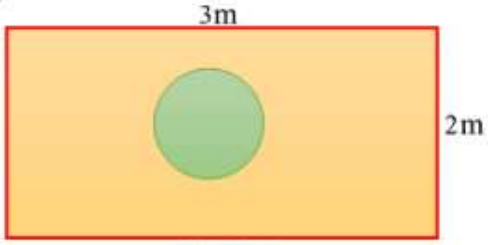
(i) A ಅಕ್ಷರವಿರುವ ಮುಖಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 2

A ಅಕ್ಷರವಿರುವ ಮುಖವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ= $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(ii) D ಅಕ್ಷರವಿರುವ ಮುಖಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 1

D ಅಕ್ಷರವಿರುವ ಮುಖವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{1}{6}$

20. ಚಿತ್ರ 14.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನೀವು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಆಯತಾಕಾರದ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಬೀಳಿಸಿದ್ದೀರಿ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದು 1m ವ್ಯಾಸದ ವೃತ್ತಾಕಾರದೊಳಗೆ ನಿಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?



(ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅಲ್ಲ)

ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $(3 \times 2)\ m^2 = 6m^2$

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\ m^2$

ದಾಳವು ವ್ಯಾಸದ ವೃತ್ತಾಕಾರದೊಳಗೆ ನಿಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{\frac{\pi}{4}}{6}=\frac{\pi}{24}$

21. ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ 144 ಬಾಲ್‌ಪೆನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ 20 ಪೆನ್ನುಗಳು ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದವು ಉತ್ತಮವಾಗಿವೆ. ನೂರಿಯು ಪೆನ್ನು ಉತ್ತಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಖರೀದಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಖರೀದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂಗಡಿಯವನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಕೆಗೆ ನೀಡುತ್ತಾನೆ.(i) ಅವಳು ಇದನ್ನು ಖರೀದಿಸುವ (ii) ಅವಳು ಇದನ್ನು ಖರೀದಿಸದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

ದೋಷಪೂರಿತ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 20

ಉತ್ತಮವಾಗಿರುವ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 144 - 20 = 124

(i) ಖರೀದಿಸುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 124

ಆಕೆಯು ಪೆನ್ನನ್ನು ಖರೀದಿಸುವ ಸಮಬವನೀಯತೆ = $\frac{124}{144}=\frac{31}{36}$

(ii) ಖರೀದಿಸದಿರುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 20

ಆಕೆಯು ಖರೀದಿಸದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{20}{144}=\frac{5}{36}$

22. ಉದಾಹರಣೆ 13 ನ್ನು ನೋಡಿ (i) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ

ಘಟನೆ ಎರಡು ದಾಳಗಳ ಮೊತ್ತ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ಸಂಭವನೀಯತೆ	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು 'ಇಲ್ಲಿ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ಮತ್ತು 12 ಎಂಬ 11 ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{1}{11}$ ಎಂದು ವಾದಿಸುತ್ತಾನೆ. ನೀವು ಈ ವಾದವನ್ನು ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಾ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),(1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

n(S) = 6x6 = 36

(i) ಮೊತ್ತ 2 ಆಗಿರುವುದು = (1,1)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,2) ಮತ್ತು (2,1)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,3); (3,1); ಮತ್ತು (2,2)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,4); (4,1); (2,3); ಮತ್ತು (3,2)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,5); (5,1); (2,4); (4,2); ಮತ್ತು (3,3)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (1,6); (6,1); (5,2); (2,5); (4,3); ಮತ್ತು (3,4)

ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (2,6); (6,2); (3,5); (5,3); ಮತ್ತು (4,4)
ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (3,6); (6,3); (4,5); ಮತ್ತು (5,4)
ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (4,6); (6,4) ಮತ್ತು (5,5)
ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (5,6) ಮತ್ತು (6,5)
ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದು = (6,6)

ಘಟನೆ ಎರಡು ದಾಳಗಳ ಮೊತ್ತ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ಸಂಭವನೀಯತೆ	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) ಒಪ್ಪಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಅವು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

23. ಒಂದು ಆಟದಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೂಪಾಯಿಯ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಸಲದ ಫಲಿತವನ್ನು ದಾಖಲಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹನೀಫನು, ಪ್ರತಿ ಸಲವೂ ಒಂದೇ ಫಲಿತಾಂಶ ಅಂದರೆ, 3 ಶಿರಗಳು ಅಥವಾ 3 ಪುಚ್ಛಗಳು ಬಂದರೆ, ಆಟದಲ್ಲಿ ಗೆಲ್ಲುತ್ತಾನೆ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಸೋಲುತ್ತಾನೆ. ಹನೀಫನು ಆಟದಲ್ಲಿ ಸೋಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಫಲಿತಗಳು = HHH, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, TTT

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 8

ಹನೀಫನು ಸೋಲುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು – HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT

ಹನೀಫನು ಸೋಲುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6

ಹನೀಫನು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಸೋಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

24. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು 2 ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ. (I) ಎರಡೂ ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬರದಿರುವ (ii) ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

[ಸುಳುಹು: ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಎಸೆಯುವುದು ಮತ್ತು ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆಯುವುದು, ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು]

(i) ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 6 x 6 = 36

ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದಾಗ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),(1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4),(4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,6)

ಎರಡೂ ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬಾರದಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು = 25

ಎರಡೂ ಸಲ ಮೇಲೆ 5 ಬಾರದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{25}{36}$

(ii) 5 ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಬಾರಿ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = 1 – ಎರಡೂ ಸಲ ಮೇಲೆ 5 ಬಾರದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ

Probability = $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

25. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಾದಗಳು ಸರಿಯಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಯಾವುವು ತಪ್ಪಾಗಿವೆ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ.

(i) ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ. ಮೂರು ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಇರುತ್ತವೆ – ಎರಡು ಶಿರಗಳು, ಎರಡು ಪುಚ್ಛಗಳು ಅಥವಾ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಒಂದರಂತೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{1}{3}$

(ii) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ, ಎರಡು ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು ಇರುತ್ತವೆ – ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು– $\frac{1}{2}$

(i) ತಪ್ಪು

ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯುಳ್ಳ ಘಟನೆಗಳಲ್ಲ.

ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಘಟನೆಗಳು: (H,H); (H,T); (T,H) ಮತ್ತು (T,T)

ಎರಡು ಶಿರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = $\frac{1}{4}$

ಒಂದು ಶಿರ ಮತ್ತು ಒಂದು ಪುಚ್ಛ ಪಡೆಯುವ ಸಂಬವನೀಯತೆ = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(ii)ಸರಿ – ಈ ಎರಡೂ ಘಟನೆಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯುಳ್ಳ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾರಾಂಶ:

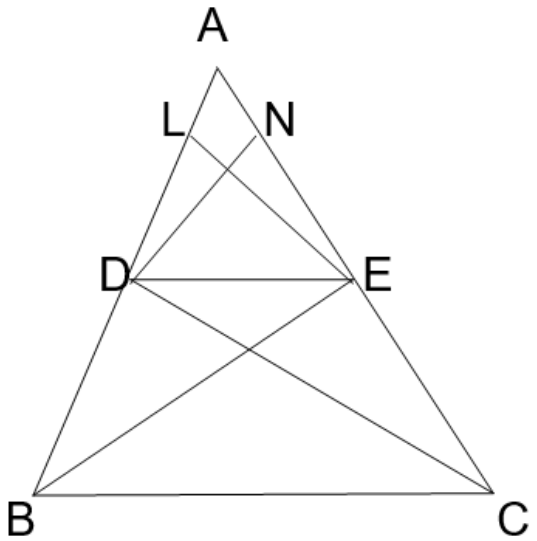
1. ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮತ್ತು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ
2. ಒಂದು ಘಟನೆ `E' ಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ (ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ) ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

   $$P(E) = \frac{\text{ಘಟನೆ E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

   ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಗಳ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯದಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ.
3. ಖಚಿತ ಘಟನೆ (ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ) ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 1 ಆಗಿದೆ.
4. ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0 ಆಗಿದೆ.
5. ಒಂದು ಘಟನೆ `E' ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(E)$ ಯು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು $0 \leq$ ಕ(ಇ) ≤ 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
6. ಒಂದು ಘಟನೆಗೆ ಕೇವಲ ಒಂದು ಫಲಿತವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.
7. ಯಾವುದೇ ಘಟನೆ `E' ಗೆ $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

1. ಥೇಲ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯ (ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ)

ಹೇಳಿಕೆ :– ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಸಮಾಂತರ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಉಳಿದೆರೆಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ



ದತ್ತ :– $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ $DE \parallel BC$

ಸಾಧನೀಯ :– $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

ರಚನೆ:– B,E ಮತ್ತು D,C ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. $EL \perp AB$ ಮತ್ತು $DM \perp AC$ ಗೆ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ :– $\triangle ADE$ ಮತ್ತು $\triangle BDE$ ಗಳಲ್ಲಿ

$$\frac{\Delta ADE \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta BDE \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{\frac{1}{2}\times AD\times EL}{\frac{1}{2}\times DB\times EL}$$ (ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}$ ×ಪಾದ ×ಎತ್ತರ)

$$\frac{\Delta ADE \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta BDE \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{AD}{DB} \quad -(1)$$

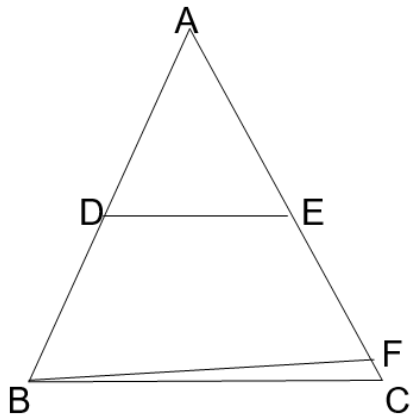
$$\frac{\Delta ADE \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta CDE \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{\frac{1}{2}\times AE\times DM}{\frac{1}{2}\times EC\times DM}$$ (ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}$ ×ಪಾದ ×ಎತ್ತರ)

$$\frac{\Delta ADE \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta CDE \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{AE}{EC} \quad -(2)$$

$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ $(\Delta BDE \cong \Delta CDE)$ ಪ್ರಮೇಯ ಸಾಧಿಸಿದೆ.

2. ಥೇಲ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ

ಹೇಳಿಕೆ :– ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ ಆ ರೇಖೆಯು ಮಾರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ದತ್ತ :– $\triangle$ ABC ಯಲ್ಲಿ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

ಸಾಧನೀಯ :– **DE ∥ BC**

ರಚನೆ:– DE ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ BF ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ :– $\triangle$ ABF ಯಲ್ಲಿ

DE ∥ BF (ರಚನೆ)

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EF}$ (ಥೇಲ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯ)

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (ದತ್ತ)

$\frac{AE}{EC} = \frac{AE}{EF}$ (ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ–1)

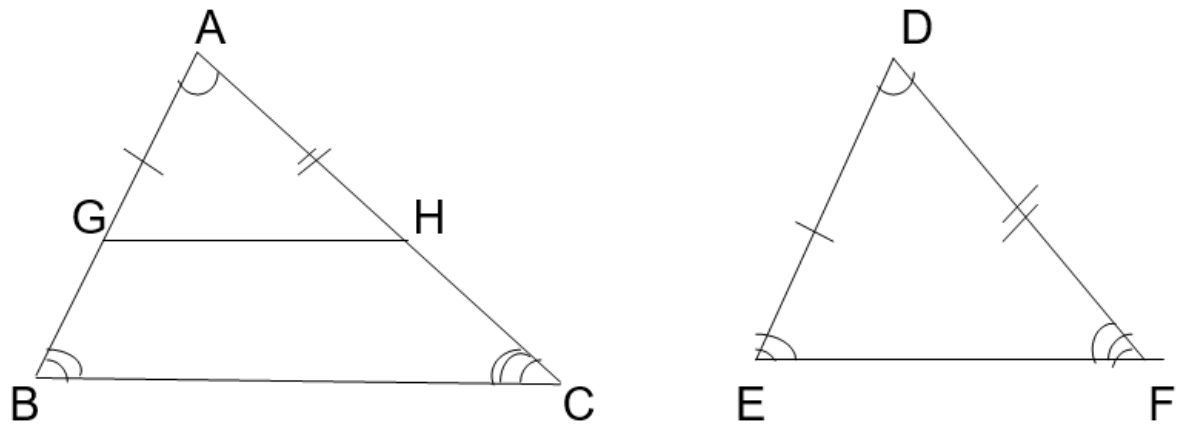
⇒ EC = EF

⇒ ಬಿಂದು Cಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದು Fವಿಲೀನವಾಗಿದೆ.

DE ∥ BC ಸಾಧಿಸಿದೆ.

3. ಕೋನ–ಕೋನ ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ

ಹೇಳಿಕೆ :– ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮಕೋನಿಯಗಳಾಗಿದ್ದರೆ. ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.



ದತ್ತ :– $\triangle$ ABC ಮತ್ತು $\triangle$ DEF ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle BAC = \angle EDF$

$\angle ABC = \angle DEF$

ಸಾಧನೀಯ :– $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

ರಚನೆ:– AG = DE ಮತ್ತು AH = DF ಆಗುವಂತೆ AB ಯ ಮೇಲೆ G ಮತ್ತು AC ಯ ಮೇಲೆ H ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ G ಮತ್ತು Hನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ :– $\triangle$ AGH ಮತ್ತು $\triangle$DEF ಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ

AG = DE (ರಚನೆ)

$\angle GAH = \angle EDF$ (ದತ್ತ) AH = DF (ರಚನೆ)

$\triangle AGH \cong \triangle DEF$ (ಬಾಕೊಬಾ)

$\angle AGH = \angle DEF$ (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

$\angle ABC = \angle DEF$ (ದತ್ತ)

$\Rightarrow \angle AGH = \angle ABC$ (ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ –1)

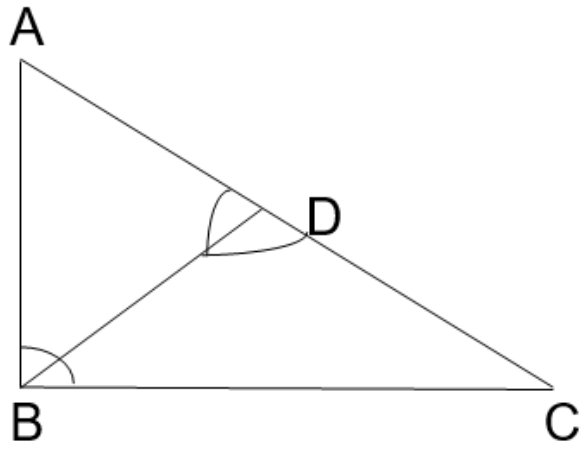
$\therefore$ GH ∥ BC (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ)

$\triangle$ ABC ಯಲ್ಲಿ $\frac{AB}{AG} = \frac{BC}{GH} = \frac{CA}{HA}$ (ಥೇಲ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪಪ್ರಮೇಯ)

ಹಾಗಾಗಿ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ ($\triangle$ AGH $\cong \triangle DEF$)

4. ಪ್ರಮೇಯ

ಹೇಳಿಕೆ :– ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಶೃಂಗದಿಂದ ವಿಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ದತ್ತ :– $\triangle$ ABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle ABC = 90°$, $BD \perp AC$

ಸಾಧನೀಯ :– $\triangle ABD \sim \triangle BDC \sim \triangle ABC$

ಸಾಧನೆ :– $\triangle$ ADB ಮತ್ತು $\triangle$ ABC ಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ.

$\angle ADB = \angle ABC = 90°$ (ದತ್ತ)

$\angle BAD = \angle BAC$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

$\therefore \triangle ADB \sim \triangle ABC$ .....(¡) (ಸಮಕೋನಿಯ ತ್ರಿಭುಜಗಳು)

$\triangle$ BDC ಮತ್ತು $\triangle$ ABC ಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ.

$\angle BDC = \angle ABC$ (ದತ್ತ)

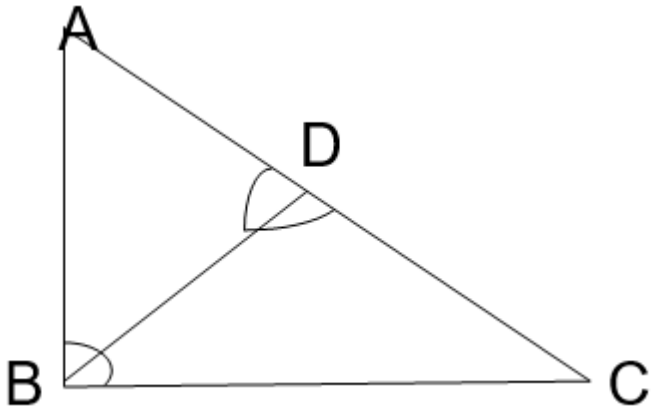
$\angle BCD = \angle BCA$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

$\therefore \triangle BDC \sim \triangle ABC$ .....(¡¡) (ಸಮಕೋನಿಯ ತ್ರಿಭುಜಗಳು)

$\triangle ADB \sim \triangle BDC \sim \triangle ABC$ ((¡) ಮತ್ತು (¡¡) ರಿಂದ)

5. ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ

ಹೇಳಿಕೆ :– ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿರ್ಕಣದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ದತ್ತ :– △ABC ಯಲ್ಲಿ ∠ABC = 90°

ಸಾಧನೀಯ :– $(AC)^2 = AB^2 + BC^2$

ರಚನೆ:– BD ⊥ AC ಇರುವಂತೆ ರಚಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ :– △ ABC ಮತ್ತು △ ADB ಗಳಲ್ಲಿ

∠ABC = ∠ADB = 90° (ದತ್ತ ಮತ್ತು ರಚನೆ)

∠BAC = ∠BAD (ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

△ ABC ~ △ ADB (ಸಮಕೋನಿಯ ತ್ರಿಭುಜಗಳು)

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$ (ಕೋ ಕೋ ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿಬಂಧನೆ)

(AB) (AB) = (AC) (AD)

$AB^2 = (AC)(AD)$ → (1)

△ ABC ಮತ್ತು △ BDC ಗಳಲ್ಲಿ

∠ABC = ∠BDC = 90° (ದತ್ತ ಮತ್ತು ರಚನೆ)

∠BCA = ∠BCD (ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

△ ABC ~ △ BDC (ಸಮಕೋನಿಯ ತ್ರಿಭುಜಗಳು)

$\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ (ಕೋ ಕೋ ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿಬಂಧನೆ)

(BC) (BC) = (AC) (DC)

$(BC)^2 = (AC)(DC)$ → (2)

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)(AD) + (AC)(DC)$ (1 +2 ಕೂಡಿದಾಗ)

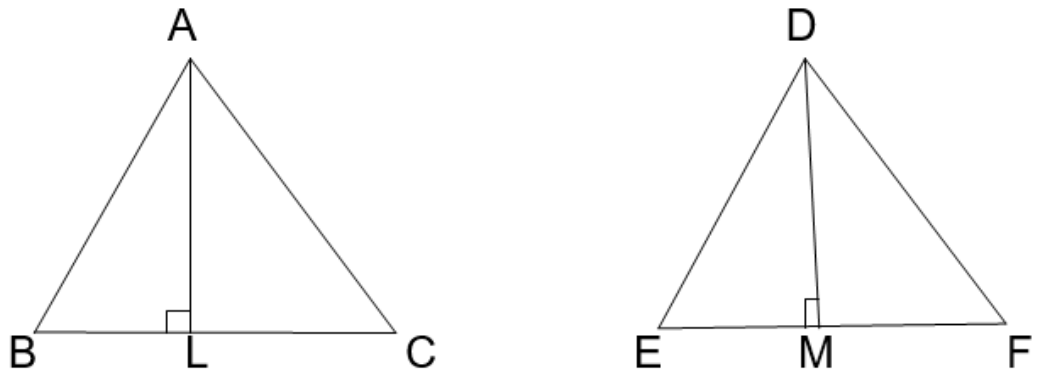
$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)(AD + DC)$ $(AC = AD + DC)$

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)(AC)$

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

6. ಪ್ರಮೇಯ

ಹೇಳಿಕೆ :– "ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ವರ್ಗಗಳಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ."



ದತ್ತ :– △ ABC ಮತ್ತು △ DEF ಗಳಲ್ಲಿ

△ ABC ~ △ DEF

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

ಸಾಧನೀಯ :– $\frac{\Delta ABC \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta DEF \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{(BC)^2}{(EF)^2}$

ರಚನೆ:– AL ⊥ BC ಮತ್ತು DM ⊥ EF ಎಳೆಯಿರಿ

ಸಾಧನೆ :– △ ALD ಮತ್ತು △ DME ಗಳಲ್ಲಿ

∠ABL = ∠DEM (ದತ್ತ)

∠ALB = ∠DME = 90° (ರಚನೆ)

∴ △ ALB ~ △ DME (ಸಮಕೋನಿಯ ತ್ರಿಭುಜಗಳು)

$\frac{AL}{DM} = \frac{AB}{DE}$ (ಕೋ ಕೋ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ (ದತ್ತ)

$\frac{AL}{DM} = \frac{BC}{EF}$ – 1 (ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ–1)

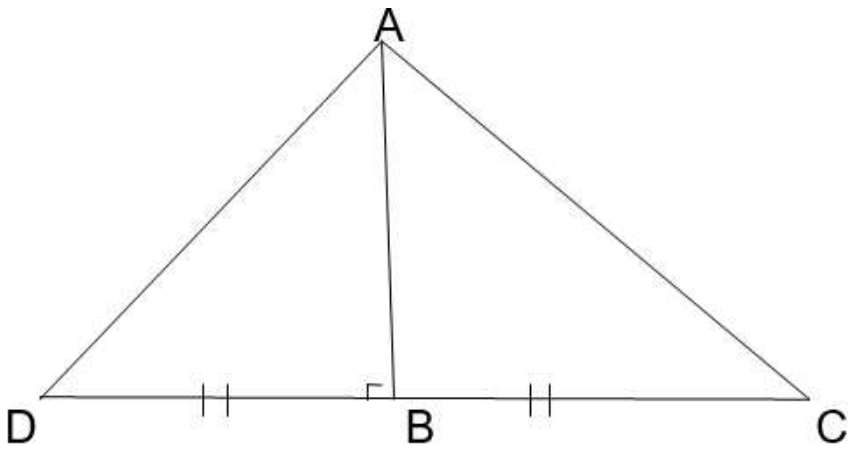
$\frac{\Delta ABC \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta DEF \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{\frac{1}{2}\times BC\times AL}{\frac{1}{2}\times EF\times DM}$ (ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}$ ×ಪಾದ ×ಎತ್ತರ)

$\frac{\Delta ABC \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta DEF \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{BC}{EF} \times \frac{AL}{DM}$

$\frac{\Delta ABC \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta DEF \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \left(\frac{BC}{EF}\right) \left(\frac{AL}{DM}\right)$ – $\frac{\Delta ABC \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta DEF \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{(BC)^2}{(EF)^2}$

7. ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ

ಹೇಳಿಕೆ :– ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರೆಡು ಬಾಹುಗಳು ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಅ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.



ದತ್ತ :– △ ABC ಯಲ್ಲಿ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ಸಾಧನೀಯ :– ∟ABC = 90°

ರಚನೆ:– 'B' ನಲ್ಲಿ AB ಗೆ ಲಂಬವಿರುವಂತೆ ಅದರಲ್ಲಿ DB = BC ಇರುವಂತೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ 'A' ಮತ್ತು 'D' ನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ :– △ ABC ಯಲ್ಲಿ

ABD = 90° (ರಚನೆ)

$AD^2 = AB^2 + BD^2$ (ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ)

△ ABC ಯಲ್ಲಿ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (ದತ್ತ)

$\Rightarrow AD^2 = AC^2$

AD = AC

△ ABD ಮತ್ತು △ ABC ಗಳಲ್ಲಿ

AD = AC BD = BC (ರಚನೆ)

AB = AB (ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

△ ABD ≅ △ ABC (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. ಸಿದ್ಧಾಂತ)

⇒ ∟ABD = ∟ABC (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

∟ABC = 90° ಪ್ರಮೇಯ ಸಾಧಿಸಿದೆ.

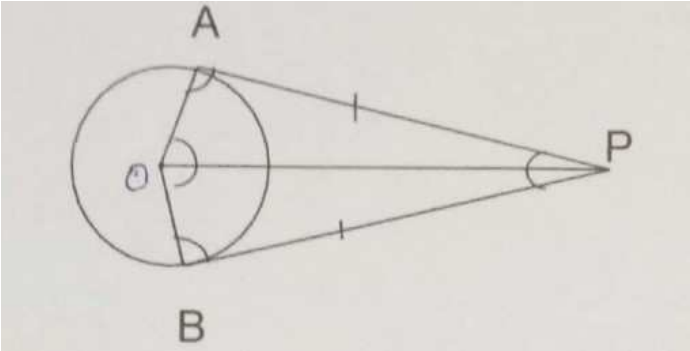
8. ಪ್ರಮೇಯ

ಹೇಳಿಕೆ :– ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು

a) ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

b) ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುತ್ತವೆ.

c) ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯೊಡನೆ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.



ದತ್ತ :– O ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ, P ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು PA ಮತ್ತು PBಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು OA, OB ಮತ್ತು OPಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದೆ.

ಸಾಧನೀಯ :– a) PA = PB

b) ∠AOP = ∠BOP

c) ∠OPA = ∠OPB

ಸಾಧನೆ :– △ APO ಮತ್ತು △ BPO ಗಳಲ್ಲಿ

OA = OB (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

∠OAP = ∠OBP = 90° (ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ)

OP = OP (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

∴ △ APO ≅ △ BPO (ಲಂ.ವಿ.ಬಾ ಪ್ರಮೇಯ)

∴ a) PA = PB (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು)

b) ∠AOP = ∠BOP

c) ∠OPA = ∠OPB

ಪ್ರಮೇಯ ಸಾಧಿಸಿದೆ.